1er Año Medio

MATEMÁTICA

Texto para el Estudiante

Andrés Ortiz Jiménez
Profesor de Matemática.
Licenciado en Educación.
Magister en Enseñanza de las Ciencias.
Facultad de Educación, Universidad de Concepción.

Cristián Reyes Reyes
Doctor en Matemática.
Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile.

Marisol Valenzuela Chandía
Profesora de Matemática.
Facultad de Filosofía y Humanidades.
Licenciada en Matemática.
Facultad de Ciencias, Universidad de Chile.
Coordinadora de Ciencias y Matemáticas EDUCAUC.

Eugenio Chandía Muñoz
Magíster en Educación.
Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile.

McGraw-Hill Interamericana

SANTIAGO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID
MÉXICO • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SÂO PAULO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TORONTO

Matemática 1° Año Medio
Texto para el Estudiante

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro ni su tratamiento informático ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, tal sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otro método sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

DERECHOS RESERVADOS © 2012.

McGRAW-HILL / INTERAMERICANA DE CHILE LTDA.
Evaristo Lillo 112 - Piso 7, Las Condes.
Tel: 562- 661 3000
Santiago de Chile.

Autores
Andrés Ortiz Jiménez.
Cristián Reyes Reyes.
Marisol Valenzuela Chandía.
Eugenio Chandía Muñoz.

Editora
Paola González M.

Correción de estilo
Patricia Romero M.

Coordinadora de arte
Pamela Madrid F.

Portada
Pamela Madrid F.

Ilustraciones
Felipe Tapia R.
Cristian "Chamán" González & Carlos "Vieje" Carrasco (Invasor Studio)

Archivo gráfico
Banco de fotografía McGraw-Hill.

La materialidad y fabricación de este texto está certificada por el IDIEM – Universidad de Chile.

ISBN: 978-956-278-222-7
N° de Inscripción: 186.066

Impreso en Chile por: RR Donnelley Chile.
Se terminó de imprimir esta reimpresión de la primera edición de 250.000 ejemplares,
en el mes de noviembre de 2012.

Estimado alumno, alumna

Este libro pretende ayudarte a abrir las puertas al conocimiento matemático, pero la llaves de esas puertas las tienes tú y son el trabajo, la reflexión, la investigación y la falta de temor a hacerse todas las preguntas por absurdas que parezcan en primera instancia. Preguntas como: ¿es el cero un número par?, ¿puedo llenar con baldosas hexagonales todo el plano? Parecen triviales, pero sin duda te llevarán a definiciones precisas y propiedades que al tenerlas claras podrás resolver las dudas.

Las matemáticas poseen verdad. Si los triángulos rectángulos los entendemos como hoy lo hacemos, entonces el teorema de Pitágoras es cierto; hoy y para siempre. Si tú demuestras un resultado matemático, por ejemplo, que la suma de dos números pares es un número par, nadie puede decirte que ese resultado es falso, y si tu demostración alguien la entiende, no puede decirte no te creo, no es un asunto de fe, es matemática. Esta es una razón para hacer o conocer las demostraciones, para dejar por sentada la veracidad de un resultado. Además, las demostraciones te permiten desarrollar habilidades de razonamiento matemático referidas a la argumentación, para ello es necesario que tu comunicación sea clara. En este texto encontrarás varias invitaciones y pistas para hacer y seguir demostraciones. También te entregamos diferentes estrategias para enfrentar estas pruebas.

La matemática además nos permite aproximarnos a la realidad y así lograr una mayor comprensión de la misma. Mediante modelos matemáticos podemos inferir conclusiones referentes a procesos de la realidad, de las ciencias sociales y naturales, además podemos anticipar resultados que nos ayuden a tomar decisiones con mayor certeza. En este libro encontrarás problemas que te invitan a presentar un modelo algebraico, reconociendo variables y sus relaciones que te ayudan a comprender el problema real.

Las actividades de este libro están dirigidas a lograr un conocimiento profundo de las ideas matemáticas que desarrollarás en él. Estas actividades están enmarcadas en contextos reales, informaciones obtenidas de diferentes medios: periódicos, Internet, artículos de organizaciones de salud, medioambientales, etc.

En definitiva, este texto lo hicimos pensando en ti, pensando en que logres un conocimiento significativo de las matemáticas, para que descubras su belleza y utilidad. Motivados por el respeto y cariño al conocimiento es que queremos que con esta obra descubras, a tu ritmo, los conocimientos y desarrolles las habilidades necesarias para hacer de ti un ciudadano crítico, investigador, "preguntón", y que, por sobre todo, intentes dar tus propias respuestas y argumentos. Esperamos que te sea útil y que con la ayuda de tu profesor, uses la llave para abrir la puerta del conocimiento matemático, lo aprecies y lo utilices en diversas situaciones.

Los autores.

Este libro pertenece a:

Nombre: _____

Curso: _____

Colegio: _____

Te lo ha hecho llegar gratuitamente el Ministerio de Educación a través del establecimiento educacional en el que estudias.
Es para tu uso personal tanto en tu colegio como en tu casa; cuídalo para que te sirva durante todo el año.
Si te cambias de colegio lo debes llevar contigo y al finalizar el año, guardarlo en tu casa.

• INDICE DE CONTENIDOS •

Unidad 1

NÚMEROS 8

Para recordar 10
1. Potencias de base positiva y exponente entero. 11
2. Propiedades de las potencias 13

Problema resuelto 15

Aplicando lo aprendido 17
3. Notación decimal 18
4. Notación científica 19

Información en los medios 22

Aplicando lo aprendido 23
5. Número racionales v/s números irracionales 24
Suma y productos de números racionales 25
Un número no racional 27
Notación decimal de los números racionales 29

Aplicando lo aprendido 30
Transformación de notación decimal a fraccionaria 32

Aplicando lo aprendido 36

Un poco de historia:
Los números irracionales 37

Aplicando lo aprendido 39
6. Aproximaciones 42
7. Regularidades numéricas 44

Aplicando lo aprendido 49

Actividades finales 50

Autoevaluación 53

Unidad 2

ÁLGEBRA 54

Para recordar 56
1. Variables 57

Aplicando lo aprendido 61
2. Términos semejantes 62

Aplicando lo aprendido 63
3. Potencias en álgebra 64

Aplicando lo aprendido 68
4. Igualdades y ecuaciones 69

Problema resuelto 71

Problema resuelto 72

Información en los medios 73

Aplicando lo aprendido 75
5. Generalidades numéricas 77

Aplicando lo aprendido 82
6. Patrones 84

Problema resuelto 86

Aplicando lo aprendido 87

Un poco de historia: Los polinomios 88
7. Producto de polinomios 89

Aplicando lo aprendido 92
8. Factorización: primera parte 93
9. Sigamos distribuyendo 95

Aplicando lo aprendido 96
10. Productos notables: el cuadrado del binomio . . . 97
11. La suma por la diferencia 98

Aplicando lo aprendido 99
12. Factorización: segunda parte 100
13. El cuadrado es lo máximo 101
14. Demostración del Teorema de Pitágoras 103

Información en los medios 105
15. Función lineal y función afín 106

Aplicando lo aprendido 109
16. Función 110

Aplicando lo aprendido 113
17. Gráfico de una función afín 114
18. Interpretación de gráficos 118

Actividades finales 120

Autoevaluación 125

Unidad 3

GEOMETRÍA 126

Para recordar 128
1. Ubiquémonos en un sistema de referencia 129
2. Figuras en el Plano Cartesiano 131
3. Visualización del Plano Cartesiano con Geogebra 132

Aplicando lo aprendido 133
4. Mingaco de traslado 134
Composición de traslaciones 137

Aplicando lo aprendido 139
5. Reflexiones 140
6. Figuras simétricas 142

Aplicado lo aprendido 143
7. Rotaciones 144
8. ¿Cómo rotar un punto? 146
9. Composición de isometrías 147
10. ¿Qué pasa con la composición de reflexiones? 149

Aplicando lo aprendido 150
11. Teselaciones regulares 154
12. Vitral 157

Aplicado lo aprendido 158
13. Congruencias 159

Aplicado lo aprendido 163
14. Triángulos congruentes 164

Aplicado lo aprendido 167
15. Aplicaciones geométricas 168

Problema resuelto 170
16. Programas computacionales 171
17. Puzles geométricos 172

Aplicando lo aprendido 173

Un poco de historia:
Euclides y sus elementos 174

Información en los medios 176

Actividades finales 178

Autoevaluación 181

Unidad 4

DATOS Y AZAR 182

Para recordar 184
1. ¿Qué dice? 185
2. Acumulado 188
3. Si tengo información, ¿cómo la presento? 189
4. ¿Qué se puede hacer con Excel? 191

Aplicando lo aprendido 194
5. ¿Quién debe representar a los datos? 195
6. Medida de posición 198

Problema resuelto 199

Aplicando lo aprendido 200
7. ¿Se cumple para toda la población? 201
Método de selección de la muestra 202
8. El error muestral y el tamaño de la muestra . . . 204
9. Simetría y dispersión de datos 205
10. Variabilidad en los gráficos 206
11. ¿Cuál es la probabilidad de la frecuencia? 207
12. Problemas complementarios con las probabilidades 209
13. Árbol de probabilidades 210
14. Contando las probabilidades 211

Un poco de historia:
La estadística 212

Un poco de historia:
Probabilidad en la historia 213

Aplicando lo aprendido 214

Información en los medios 216

Actividades finales 218

Autoevaluación 221

Solucionario 222

• ESTRUCTURA GRÁFICA •

Inicio de Unidad

Nombre de la Unidad.

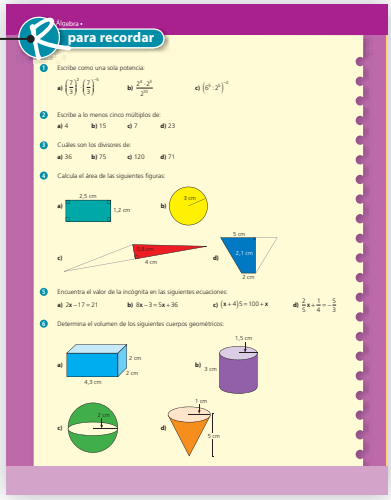
Número de la Unidad.

Esquema representativo de la relación entre los contenidos de la unidad y las metas de tu aprendizaje.

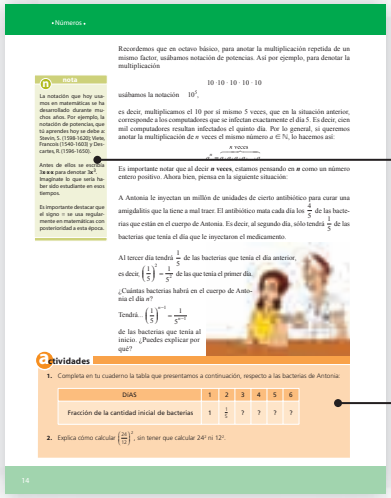
Texto introductorio a los contenidos de la unidad.

Desarrollo de contenidos

Para recordar
Desarrollando estos ejercicios activarás tus conocimientos previos.

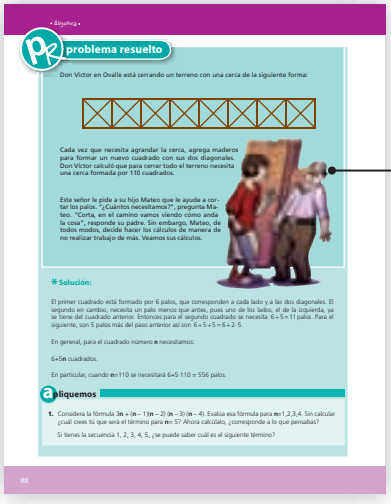


Nota
Destaca ciertos conceptos que debes tomar en cuenta para una mejor comprensión.



Actividades
Propuesta de desarrollo de habilidades página a página. **Encontrarás algunas marcadas con asterisco (*), que representarán un desafío para tí.**

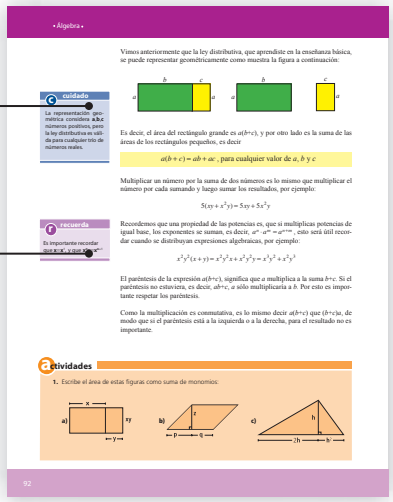
Información en los medios
Extractada de diversos medios de comunicación, la que podrás comprender con la ayuda de la matemática.

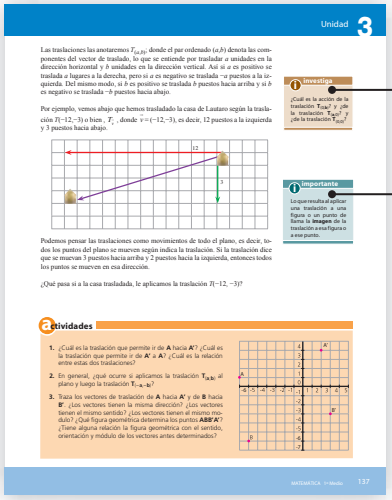


Problema resuelto
Es un ejemplo de solución de problemas propuestos, que entrega un método de resolución.

Cuidado
Alerta sobre posibles errores o ambivalencias respecto de un concepto.

Recuerda
Sección que te ayuda a recordar lo que has visto en años anteriores.

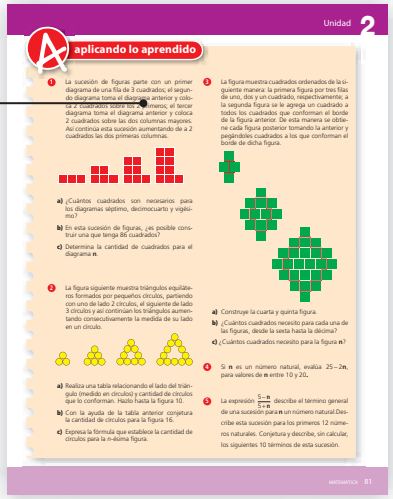


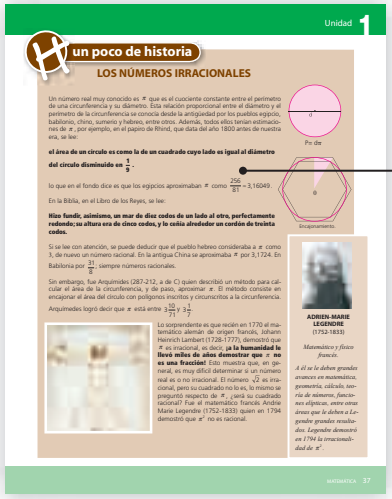


Investiga
Te invita a indagar sobre diversos temas.

Importante
Sección que enfatiza algún concepto importante tratado en la página.

Aplicando lo aprendido
Profundiza, apoya y confirma tus conocimientos por medio de la aplicación práctica de los contenidos. Encontrarás ejercicios marcados con asterisco (*), que representarán un desafío para tí.





Un poco de historia
Sección que te entrega una visión histórica de cómo se ha formado la matemática.

Cierre de Unidad

Actividades finales
Ejercicios graduados de transferencias de aprendizajes. **Encontrarás algunos marcados con asterisco (*), que representarán un desafío para tí.**

Autoevaluación
Propuesta de evaluación de tus conocimientos de la Unidad.

Números

Al finalizar esta Unidad serás capaz de:

- Multiplicar y dividir potencias.
- Comprender y emplear la relación entre el cambio de signo del exponente y el inverso multiplicativo de la potencia.
- Describir y operar con números pequeños y grandes.
- Resolver problemas que impliquen el cálculo de operaciones con números racionales.
- Discriminar entre números racionales e irracionales.
- Estimar y aproximar resultados en la resolución de problemas.
- Transformar de notación decimal a fraccionaria y viceversa.
- Conjeturar acerca de la generalización.
- Argumentar la veracidad de resultados.
  Resolver problemas.

Temas que estudiaremos en esta Unidad:

- Potencias de base positiva y exponente entero.
- utilizando
- Notación científica.
- Números racionales e irracionales.
- de
- Regularidades numéricas.
- referentes a

Unidad 1

Los virus computacionales constituyen la peor amenaza para la informática de los últimos tiempos. Actúan como plagas muy difíciles de eliminar y provocan daños irreversibles a nuestros computadores.

Al 18 de diciembre del año 2005 el virus denominado Sober A.G, calificado de alta peligrosidad logró, a través del correo electrónico de los usuarios, infectar a 2 857 339 computadores en sólo 7 días.

¿Puedes imaginar cuántos de estos aparatos resultarían infectados en un mes o en un año si no encuentras el antivirus adecuado? ¿Cómo crees tú que ocurre esto?

para recordar

1 Escribe los siguientes números en forma de notación decimal:

a) -5 **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** 2^3 **d)** $\frac{4,8}{2}$ **e)** $\frac{-1}{3}$ **f)** -5^2

2 Un día de invierno en la Antártica chilena el termómetro marcó una temperatura de 20°C bajo cero. El mismo día, en pleno verano caribeño, el termómetro marcó 35°C.

a) Ubica estas temperaturas en la recta numérica.

b) ¿Cuál es la diferencia de temperaturas entre estos dos lugares?

3 Analiza y determina, en cada caso, si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Justifica tu respuesta.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$

b) $\frac{7}{8}<\frac{11}{12}$

c) 200 es la quinta parte de 1 000

d) $(-5)^2 = -25$

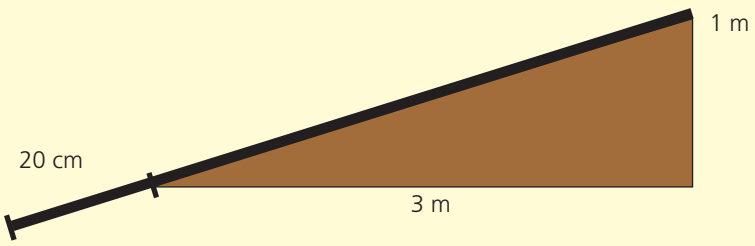
e) $(2^2)^3 = 2^5$

f) En un cubo de arista 4 cm caben 64 cubitos de arista 1 cm.

g) Al dividir un número **a** por otro **b** resulta un número menor que **a**.

4 ¿Cómo encontrarías una fracción comprendida entre $\frac{21}{35}$ y $\frac{22}{35}$?

5 Se quiere construir un techo de 1 m de altura y 3 m de largo, como lo indica la figura de más abajo. ¿Cuál debe ser el largo de la viga si debe pasarse en 20 cm?



6 Resuelve las siguientes operaciones:

a) $-5\cdot\frac{2}{15}+\frac{3}{4}:9$ **b)** $\frac{3}{5}:\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}:\frac{3}{7}$ **c)** $\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{1}{4}}$ **d)** $\frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{0,25+\frac{3}{8}}$

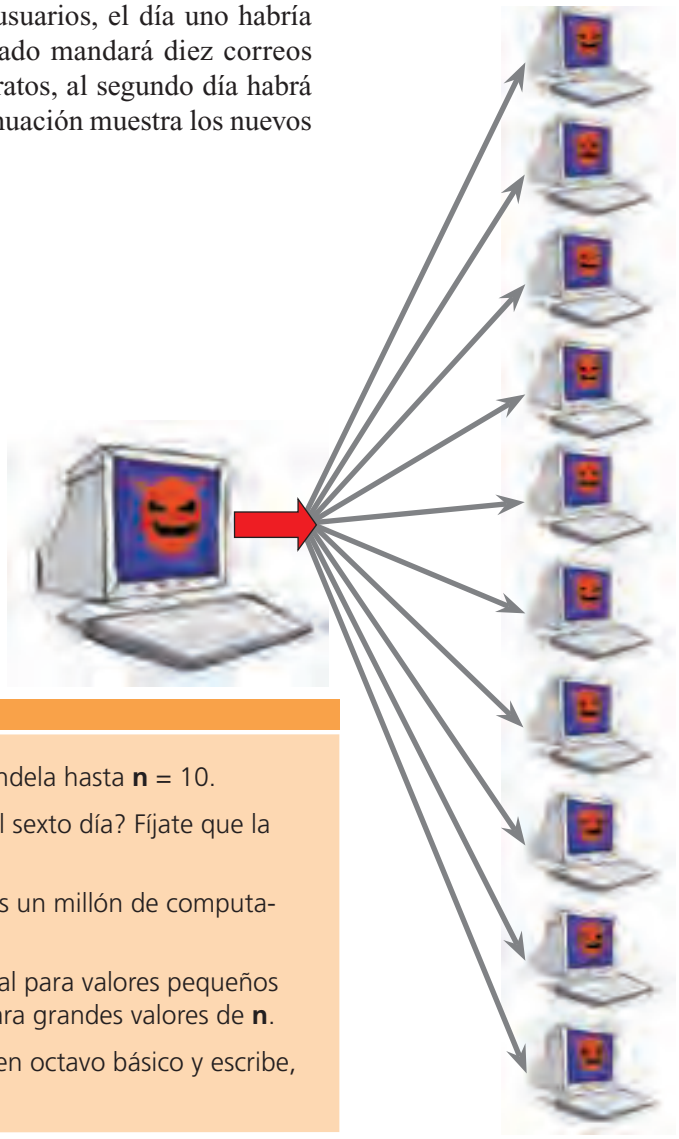
1 Potencias de base positiva y exponente entero

Un **virus computacional** es un fragmento de programa o un programa que se añade a un programa legítimo con la intención de infectar a otros. Existen virus computacionales que llegan a tu computador mediante un correo electrónico, que incluso puede haber sido enviado desde el computador de un usuario conocido por ti. Éste ingresa a tu lista de direcciones y cada vez que abres tu correo, el intruso envía copias de sí mismo a las direcciones de tu lista. El virus llega al computador de tu amigo y se repite el proceso una y otra vez.

Acotemos el problema: imaginemos que el virus sale de tu computador en 10 correos electrónicos, al día siguiente, de cada uno de los 10 computadores infectados salen 10 correos electrónicos con el virus y así sucesivamente; es decir, si el virus llega a mi computador hoy, mañana saldrían otros 10 correos infectados.

Si en el primer día el creador del virus lo envía a 10 usuarios, el día uno habría 10 computadores infectados. Cada computador infectado mandará diez correos electrónicos con virus y como tenemos 10 de esos aparatos, al segundo día habrá $10 \cdot 10 = 100$ computadores infectados. La tabla a continuación muestra los nuevos infectados en el día n.

día n	Número de nuevos infectados
1	10
2	100
3	1 000
4	10 000
5	?
6	?



actividades

1. Completa en tu cuaderno la tabla superior y extiéndela hasta **n** = 10.
2. En total, ¿cuántos computadores infectados hay al sexto día? Fíjate que la respuesta no es 100 000.
3. ¿Cuánto tiempo se requiere para infectar al menos un millón de computadores?
4. Explica por qué este modelo de propagación es real para valores pequeños de **n**, pero no se ajusta demasiado a la realidad para grandes valores de **n**.
5. Recuerda la notación de potencia que aprendiste en octavo básico y escribe, ¿cuántos nuevos contagiados habrá el día **n**?

Recordemos que en octavo básico, para anotar la multiplicación repetida de un mismo factor, usábamos notación de potencias. Así por ejemplo, para denotar la multiplicación

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

usábamos la notación 10^5, es decir, multiplicamos el 10 por sí mismo 5 veces, que en la situación anterior, corresponde a los computadores que se infectan exactamente el día 5. Es decir, cien mil computadores resultan infectados el quinto día. Por lo general, si queremos anotar la multiplicación de n veces el mismo número $a \in \mathbb{N}$, lo hacemos así:

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}}$$

Es importante notar que al decir ***n* veces**, estamos pensando en ***n*** como un número entero positivo. Ahora bien, piensa en la siguiente situación:

nota

La notación que hoy usamos en matemáticas se ha desarrollado durante muchos años. Por ejemplo, la notación de potencias, que tú aprendes hoy se debe a: Stevin, S. (1598-1620); Viete, Francois (1540-1603) y Descartes, R. (1596-1650).

Antes de ellos se escribía $3\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ para denotar $3\mathbf{x}^3$. Imagínate lo que sería haber sido estudiante en esos tiempos.

Es importante destacar que el signo = se usa regularmente en matemáticas con posterioridad a esta época.

A Antonia le inyectan un millón de unidades de cierto antibiótico para curar una amigdalitis que la tiene a mal traer. El antibiótico mata cada día los $\frac{4}{5}$ de las bacterias que están en el cuerpo de Antonia. Es decir, al segundo día, sólo tendrá $\frac{1}{5}$ de las bacterias que tenía el día que le inyectaron el medicamento.

Al tercer día tendrá $\frac{1}{5}$ de las bacterias que tenía el día anterior, es decir, $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5^2}$ de las que tenía el primer día.

¿Cuántas bacterias habrá en el cuerpo de Antonia el día n?

Tendrá... $\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{5^{n-1}}$

de las bacterias que tenía al inicio. ¿Puedes explicar por qué?

actividades

1. Completa en tu cuaderno la tabla que presentamos a continuación, respecto a las bacterias de Antonia:

DÍAS	1	2	3	4	5	6
Fracción de la cantidad inicial de bacterias	1	$\frac{1}{5}$	?	?	?	?

2. Explica cómo calcular $\left(\frac{24}{12}\right)^2$, sin tener que calcular 24^2 ni 12^2.

2 Propiedades de las potencias

Como hemos visto en los problemas anteriores, hay situaciones en que surgen las potencias en problemas recursivos. Lo que ocurre en el paso n depende de lo que había en el paso anterior. Por ejemplo, en el problema de los virus computacionales, la cantidad de nuevos infectados es 10 veces mayor que de los que había en el caso anterior. En el caso de las bacterias en Antonia, cada día le quedan $\frac{1}{5}$ de las que tenía el día anterior.

recuerda

Si **a** > 0 y **n,m** $\in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Si **n** > **m** son números naturales y **a** > 0, entonces

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

1º En general, si inicialmente se tiene una cierta cantidad a y en cada periodo siguiente se considera la cantidad anterior multiplicado por a, entonces en el periodo n habrá a^n unidades de dicha cantidad.

Como hemos visto, a puede ser un número entero o una fracción positiva, en cualquiera de estos casos tenemos que:

$$a^n \cdot a^m = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ veces}} = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n+m \text{ veces}} = a^{n+m}$$

cuidado

No es cierto que $0^0 = 1$, tampoco es $0^0 = 0$

No está definida esa expresión.

Nota que implícitamente estamos considerando n, m números naturales.

2º Del mismo modo, al considerar el cuociente de dos potencias se tiene:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ veces}}} = \underbrace{\frac{a}{a} \cdot \frac{a}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{a}}_{m \text{ veces}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n-m \text{ veces}} = a^{n-m}$$

Cuando n es un número natural mayor que m.

Notemos que en el caso anterior, al tener $n = m$, se tiene que

$$\frac{a^n}{a^n} = 1 = a^{n-n} = a^0$$

es por esta razón que es necesario notar que $a^0 = 1$ cuando $a \neq 0$

actividades

1. Calcula las siguientes potencias:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^4$ **b)** $\left(\frac{-1}{3}\right)^3$ **c)** $\left(\frac{2}{-3}\right)^4$ **d)** $\left(\frac{6}{3}\right)^2$ **e)** $\left(\frac{3}{3}\right)^3$

2. Explica por qué, sin hacer todos los cálculos, los resultados de **a)** y **c)**, si se multiplican, resulta 1.

3. ¿Cuántos días deben transcurrir para que Antonia tenga sólo una millonésima parte de las bacterias que tenía al inicio?

cuidado

Cuando decimos que "podemos extender" una propiedad queremos decir que es consecuencia de una propiedad anterior. Esta extensión es igual de válida y se puede demostrar. La demostración de ella se indicará en los ejercicios.

cuidado

No es cierto que

$$a^{n^m} = (a^n)^m$$

Por ejemplo, 10^{3^2} es un número que tiene 9 ceros después de un 1, es decir, mil millones; en cambio, $(10^3)^2$ es un número formado por 6 ceros después de un 1, es decir, un millón.

3º Otra propiedad es una forma abreviada de calcular las potencias de una potencia, es decir, ¿cómo calcular $(a^n)^m$, si $a > 0$ y $n, m \in \mathbb{N}$?

Para responder esta pregunta basta recordar las definiciones de potencias: $(a^n)^m$ es multiplicar m veces a^n, esto es:

$$\left(a^n\right)^m = \overbrace{a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}^{m \text{ veces}} = \overbrace{a^{n+n+n+\ldots+n}}^{m \text{ veces}} = a^{nm}$$

Recordemos que al inverso multiplicativo de a lo anotamos por a^{-1} cuando a no es cero. Es decir, $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Como $5^n \cdot \frac{1}{5^n} = \frac{5^n}{5^n} = 1$, es decir, el número 5^n y $\frac{1}{5^n}$ son inversos multiplicativos, es lógico anotar $\left(5^n\right)^{-1} = \frac{1}{5^n}$.

Además, si queremos extender la propiedad de potencias que acabamos de ver, para potencias de base un número positivo y exponente entero, se debería cumplir que:

$$5^{-n} = \frac{1}{5^n}$$

De hecho, es así como lo anotamos y se tiene en general:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{con } a > 0 \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

En resumen, podemos extender todas las propiedades de potencias de base positiva y exponente natural a propiedades de potencias de base cualquier fracción y exponente entero. Estas son:

Si a es fracción y $n,m \in \mathbb{Z}$ se tiene:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad a^0 = 1$$

actividades

1. Calcula las siguientes potencias: **a)** 3^{-2} **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **c)** $(0,5)^2$ **d)** $(0,\overline{3})^{-3}$ **e)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

2. Ordena de menor a mayor: $\left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{-2}\right)^0, \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

3. Si $a > 0$ y $n > 0$, ¿es cierto que $a^n > a$?

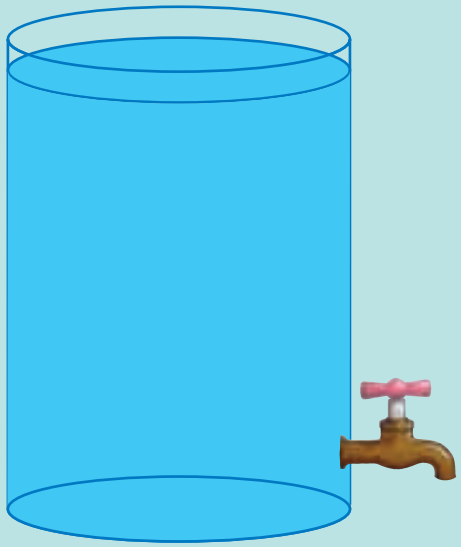
4. ¿Cuál es la última cifra de 6^{24}?

5. Una hoja cuadrada de papel de 1 m por lado se dobla por la mitad, luego por la mitad y otra vez por la mitad y así sucesivamente. Confecciona una tabla donde en una columna se muestre el número de dobleces y en la otra el ancho del papel doblado. Otro alumno confeccionará una nueva tabla que en una columna muestre un número par de dobleces y en la otra el lado del cuadrado que resulta. ¿Qué pasa con la segunda columna en cada caso?, ¿van creciendo los valores?, ¿o se van achicando?, ¿cuántos cuadraditos quedan al octavo doblez?, ¿cuál es el grosor del papel que resulta al octavo doblez?, ¿cuál es el lado del cuadrado que resulta?

problema resuelto

En cierta localidad de un país vecino se está estudiando el efecto de administrar agua fluorada a la población, para disminuir la caries en las personas y mejorar la salud bucal. Varios estudios internacionales, recomiendan que el agua fluorada de consumo diario no debe tener una concentración menor a 0,5 miligramos por litro, ni más que 2,5 miligramos por litro. Sin embargo, hay otros estudios que dicen que el efecto no es mucho mejor respecto a los que no consumen agua fluorada. Por lo tanto, en cierto jardín infantil de esta localidad se dispusieron tanques de 200 litros de capacidad cada uno, llenados con 180 litros de agua fluorada, con una concentración de 2,5 miligramos por litro, para ser administrados como consumo habitual a los niños del jardín que acuden al mismo en jornada completa. Si este consumo produce efectos positivos, respecto a un grupo control que continuará utilizando agua sin flúor, se implementará el agua fluorada de consumo público a toda la población.

Los investigadores capacitan a las parvularias, funcionarios y directivos del jardín infantil, para que rellenen los tanques de agua con agua pura, de modo de que la concentración va disminuyendo, pero sin bajar de los límites inferiores recomendados.



Las indicaciones de los investigadores son las siguientes:

1. Llene el tanque con agua pura, hasta el tope y comience a dar a los niños en forma habitual. Además de preparar los alimentos con esta agua, en forma normal.

2. Cuando el nivel del agua llegue a los 180 litros vuelva a rellenar el tanque con agua pura. Y repita el proceso hasta que nosotros le indiquemos.

Los investigadores saben cuál es la cantidad que se puede rellenar el tanque sin disminuir la concentración de flúor a niveles inferiores de 0,5 miligramos por litro. ¿Puedes decidir ese momento?

Solución:

Si suponemos que después de llenado el tanque la solución se distribuye homogéneamente, podemos suponer que la concentración es constante en todo el tanque.

Entonces al principio había $2{,}5 \cdot 180 = 450$ miligramos de fluor en el tanque. Cuando se llena con agua pura, hasta completar los 200 litros de solución, siguen habiendo 450 mg de flúor en el tanque. Pero la concentración es $\frac{450}{200}\ mg\ /\ litro = 2{,}25$ mg por litro.

Como en el tanque de 200 litros solo puede haber una solución de flúor cuya concentración no sea menor que 0,5 mg por litro, entonces en el tanque de 200 litros no puede haber menos que 90 mg de flúor.

Es decir, tenemos que encontrar la cantidad de veces que se puede repetir el proceso de relleno, hasta que la cantidad de flúor en el tanque sea de 90 mg.

Pues bien, cuando se sacan 20 litros de solución del tanque, por primera vez, salen 2,25 mg por cada litro, es decir, cuando se sacan los primeros 20 litros, salen 2,25 x 20 = 45 mg de flúor, por lo tanto quedan en el tanque 450 – 45 = 405 mg. Al rellenar con agua la concentración es:

$$\frac{405}{200}\, mg\,/\,litro = 2,025 mg\,/\,litro$$

Cuando se sacan los segundos 20 litros, del tanque salen 2,025 x 20 = 40,5 mg de flúor, por lo tanto quedan en el tanque 405 – 40,5 = 364,5 mg. Al rellenar con agua la concentración es:

$$\frac{364,5}{200}\, mg\,/\,litro = 1,8225 mg\,/\,litro$$

Más generalmente, si en algún momento en el tanque lleno hay **A** mg de flúor, después de repetir el proceso de quitar 20 litros de solución y rellenar con agua pura, se tendrá en el tanque:

$$\mathbf{A} - 20 \times \frac{\mathbf{A}}{200} = \mathbf{A} - \frac{1}{10}\mathbf{A} = \frac{9}{10}\mathbf{A}$$

En el proceso siguiente se tendrá, $\frac{9}{10}$ de lo que había, es decir $\frac{9}{10}$ de $\frac{9}{10}$ A. Por lo tanto en el paso siguiente, se tendrá $\left(\frac{9}{10}\right)^2 \mathbf{A}$. En el paso siguiente de éste se tendrá $\left(\frac{9}{10}\right)^3 \mathbf{A}$. Y así sucesivamente. Es decir, después de **n** procesos, desde que los investigadores dejaron los tanques en el jardín, se tendrá $\left(\frac{9}{10}\right)^n \mathbf{A}$, de miligramos de flúor en el tanque. Completando la tabla para diferentes valores de **n** se tiene, con ayuda de una calculadora (o una planilla de cálculo) :

n	Cantidad de flúor en el tanque (mg)
1	405
2	364,5
4	295,245
6	239,14845
8	193,7102445
10	156,905298
12	127,0932914
14	102,945566
15	92,65100944
16	83,3859085

Por lo tanto se necesitan 15 procesos como los antes descritos, para mantener la concentración en los niveles sugeridos.

aplicando lo aprendido

1 Escribe como potencia o producto de potencias:

a) 32

b) 27

c) $64 \cdot 125$

d) $36 \cdot 81$

2 Expresa como número decimal cada una de las siguientes potencias:

a) 5^{-3}

b) 2^{-2}

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2}$

d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

e) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}$

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

g) 3^{-4}

h) $\left(\frac{6}{11}\right)^{0}$

3 Compara. Escribe $<$, $>$ o $=$

a) 4^2 y 2^4

b) 8^3 y 24

c) 6^3 y $2^3 + 4^3$

d) $7^2 - 5^2$ y 2^2

e) 2^0 y 0

f) 2^{-2} y -2^2

4 Resuelve las siguientes operaciones:

a) $2^{-2} - 2^2$

b) $3^{-2} \cdot 3 - 3^0 + 1$

c) $\frac{4^{-3} + 2^{-3}}{2^{-3}}$

d) $\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{5}}{\left(\frac{1}{8}\right)^{-4}}$

e) $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)^{-1}$

f) $\left(\frac{6}{3}\right)^{2} : \left(\frac{5}{10}\right)^{3}$

5 ¿Cuál es el volumen de un cubo de arista 3 cm? Si ahora duplicamos su arista, ¿cuántas veces mayor es el volumen del nuevo cubo?, ¿qué ocurre si se triplica o cuadruplica el tamaño de la arista del cubo inicial?

6 Dibuja un diagrama que represente el árbol genealógico de tu familia partiendo contigo, luego tus padres, tus abuelos, tus bisabuelos y así sucesivamente. ¿Cuántos bisabuelos son?, ¿cuántos tatarabuelos?, ¿de cuántos miembros consta la quinta generación de tus antepasados?

7* ¿Cuál es la cifra de las unidades de 2^{84}?, ¿y de 5^{100}?

8 A Yael, su padre le presenta dos alternativas para juntar su dinero quincenal:

- La primera consiste en abonarle \$1 000 cada día hasta el día quince.
- La segunda en que el primer día le abona un peso, el segundo día dos pesos, el tercer día el doble del anterior, y así sucesivamente, cada día duplica la cantidad del día anterior finalizando el día quince. ¿Cuál propuesta le conviene más a Yael?

3 Notación decimal

importante

Cualquier decimal finito se puede escribir como una fracción de números enteros.

Recordemos que la notación decimal que usamos tiene como base 10, esto quiere decir que el lugar que ocupa un dígito en un número está relacionado con una potencia de 10. Por ejemplo, el número 3 456 es la suma:

$$3\cdot 10^3+4\cdot 10^2+5\cdot 10^1+6\cdot 10^0$$

Esta notación se puede extender a los números decimales no enteros. Por ejemplo 3 456,432 es la suma:

$$3\cdot 10^3+4\cdot 10^2+5\cdot 10^1+6\cdot 10^0+4\cdot 10^{-1}+3\cdot 10^{-2}+2\cdot 10^{-3}$$

que es lo mismo que: $3\cdot 10^3+4\cdot 10^2+5\cdot 10^1+6\cdot 10^0+\frac{4}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{2}{10^3}$

Como esto se puede hacer con cualquier decimal finito, entonces, cualquier decimal finito es una fracción de números enteros.

cuidado

Hemos demostrado que:

$1=0,\overline{9}$

vale decir que esos dos números son exactamente el mismo. No estamos diciendo que están cerquita, sino que están exactamente en el mismo lugar.

Es decir, la notación decimal no es única.

Por ejemplo $0,5=0,4\overline{9}$.

Sin embargo, hay fracciones que tienen un desarrollo decimal infinito; por ejemplo, $\frac{1}{3}$ tiene un desarrollo que es una seguidilla infinita de 3, después de la coma, se anota $0,\overline{3}$, es decir, $\frac{1}{3}$ es la suma que sigue:

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\frac{3}{10^5}+\frac{3}{10^6}+\frac{3}{10^7}+\frac{3}{10^8}+\cdots \quad (1)$$

Otro ejemplo de lo mismo es $\frac{1}{9}$ que es el decimal infinito

$$0,111111111111111111111111111111111111111111...=0,\overline{1}$$

o escrito en sumas:

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^7}+\frac{1}{10^8}+\cdots$$

Es importante destacar que si multiplicamos la relación (1) por 3, resulta:

$$3\cdot\frac{1}{3}=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\frac{9}{10^6}+\frac{9}{10^7}+\frac{9}{10^8}+\cdots$$

pero el número de la izquierda es 1 y el de la derecha es $0,\overline{9}$, es decir: $1=0,\overline{9}$

actividades

1. Explica por qué los números $0,4\overline{9}$ y $\frac{1}{10}\cdot\left(10\cdot 0,4\overline{9}\right)$ son iguales.
2. Recurre a lo anterior para mostrar que $0,4\overline{9}=\frac{1}{10}\cdot\left(4+0,\overline{9}\right)$.
3. Toma en cuenta que $0,\overline{9}=1$, para mostrar que $0,4\overline{9}=\frac{1}{10}\cdot\left(5\right)=0,5$.

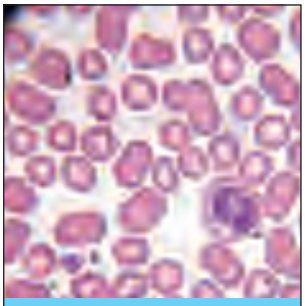
4 Notación científica

Las siguientes imágenes presentan, en metros, la medida de varios objetos existentes en la naturaleza.

El ancho de una mano
Medida en metros (m):
10^{-1}

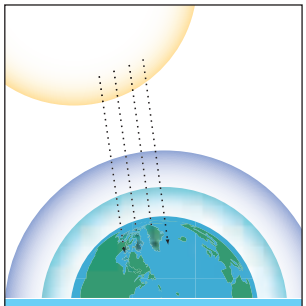
Tamaño de una uña
Medida en metros (m):
10^{-2}

Tamaño de un piojo
Medida en metros (m):
10^{-3}

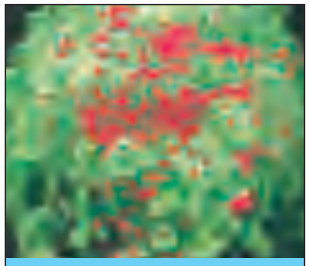


Tamaño de algunos protozoos
Medida en metros (m):
10^{-4}

Tamaño del núcleo de alguna célula
Medida en metros (m):
10^{-6}

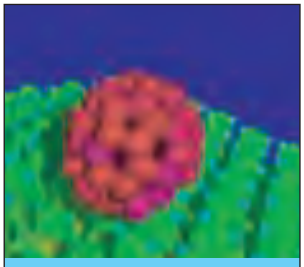


Tamaño de longitud de onda de los rayos UV
Medida en metros (m):
10^{-7}



Tamaño del diámetro del virus VIH
Medida en metros (m):
10^{-9}

Tamaño de una molécula de Hidrógeno
Medida en metros (m):
10^{-10}

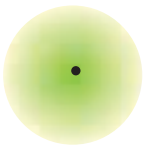


Tamaño de un átomo de Carbono
Medida en metros (m):
10^{-13}

nota

Algunos prefijos usados en ciencias son:

- **centi (*c*)** para denotar 10^{-2}, por ejemplo 1 *cm* denota un centímetro.
- **mili (*m*)** para denotar 10^{-3}, por ejemplo 1 *mm* denota un milímetro.
- **micro (μ)** para denotar 10^{-6}, por ejemplo 1 μ denota un micrómetro.
- **nano (*n*)** para denotar 10^{-9}, por ejemplo 1 *nm* denota un nanómetro.
- **hecto (*h*)** para denotar 10^{2}, por ejemplo 1 *hm* denota un hectómetro.
- **kilo (*k*)** para denotar 10^{3}, por ejemplo 1 *km* denota un kilómetro.
- **mega (*M*)** para denotar 10^{6}, por ejemplo 1 *Mb* denota un megabyte.
- **giga (*G*)** para denotar 10^{9}, por ejemplo *1 Gb* denota un gigabyte.



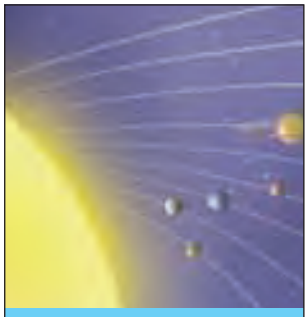
Tamaño de un electrón
Medida en metros (m):
10^{-15}

Orden de la altura de la estatua de La Libertad
Medida en metros (m):
10^{2}

Largo del Estrecho de Gibraltar
Medida en metros (m):
10^{4}

Tamaño de radio de Plutón (el de la Tierra es 6 veces más grande)
Medida en metros (m):
10^{6}

Diámetro de Júpiter
Medida en metros (m):
10^{8}



Máxima distancia de Mercurio al Sol
Medida en metros (m):
10^{10}

actividades

1. ¿Cuántas veces mayor es una molécula de Hidrógeno que un átomo de Carbono?
2. Aproximadamente, ¿cuál es el radio de la Tierra?
3. Si la velocidad de la Luz (en el vacío) es de aproximadamente $3 \cdot 10^{8}$ m/s, ¿cuánto se demora un rayo de Sol a Mercurio en el momento en que están más alejados?
4. ¿Cuántas veces mayor es el radio de Júpiter que el de Plutón?
5. Averigua: ¿cuán lejos puede observar un astrónomo desde los telescopios que se encuentran en el norte de nuestro país?

Dado que nuestro sistema de numeración es decimal, estamos muy familiarizados con las potencias de 10 y cuando queremos tener una idea gruesa de una medida o cantidad usamos múltiplos de potencias de 10 para aproximar. Si a uno le preguntan con cuánto dinero cuenta en ese momento, uno responde: "ando con 2 mil pesos más o menos", jamás dice "ando con 2 mil trescientos veinticuatro pesos", aunque este dato sea más preciso.

Con frecuencia escuchamos frases como "uno de los hombres más ricos del mundo tiene 55 billones de dólares, algo así como $55 000 000 000 000" o la velocidad de la luz en el vacío es de 300 000 000 de metros por segundo, la verdad es que el dato es mucho más preciso, pero dar esta aproximación, para muchos fines, es suficiente.

Como en el mundo científico se trabaja con medidas muy pequeñas o muy grandes comparadas con el hombre, se suele denotar utilizando potencias de 10, o lo que los científicos llaman el **orden de magnitud**. Por ejemplo, la velocidad de la luz la denota por $3 \cdot 10^8$ m/s y los físicos dicen que la velocidad de la luz medida en metros por segundo es del orden de 10^8.

Si una medida se anota de la forma $a \cdot 10^n$, con $0 < a < 10$ y $n \in \mathbb{Z}$, decimos que ella está descrita en **notación científica**.

Por ejemplo la distancia de la Tierra a la Luna es, aproximadamente, 353 680 000 m y en notación científica sería: $3,5368 \cdot 10^8$ m

La velocidad de la luz es aproximadamente de $3 \cdot 10^8$ m/s, por esta razón, la luz de la Luna a la Tierra se demora:

$$\frac{3,5368 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} \text{s} = \frac{3,5368}{3} \text{s} \approx 1,17 \text{s}$$

es decir, la luz que nos llega de la Luna lo hace con un poco más de un segundo de atraso. Para tener una idea de lo rápida que es la luz, realicemos el siguiente ejercicio imaginario: supongamos que existe un puente de la Tierra a la Luna y nos vamos en un automóvil a 100 km/h, nos demoraríamos 3 536,8 horas en hacer el trayecto, es decir, algo así como 4 meses y tres semanas. **¡A la luz le toma un segundo lo que a nosotros nos toma más de un semestre académico!**

cuidado

El concepto de cercano o lejano es relativo. Lo mismo que el de pequeño o grande. Por ejemplo, si dos átomos de Hidrógeno están a un metro de distancia, la interacción entre ellos es esencialmente nula, pero ¿te imaginas que pasaría si el Sol estuviese a esa distancia de la Tierra?
La notación en potencias tampoco diría nada respecto de si se trata de tamaños pequeños o grandes. Si no se mencionaran las unidades, por ejemplo, 10^{-3} no es grande ni pequeño si no se dicen las unidades. Así si estamos hablando de megametros 10^{-3} sería un kilómetro, que a escala humana es grande.

actividades

1. Si la luz se demora aproximadamente 8 segundos en llegar del Sol a la Tierra, ¿cuál es la distancia de la Tierra al Sol?
2. ¿Cuántos centímetros cúbicos tiene un metro cúbico?
3. Una cuenta de correo electrónico tiene 2,678 gigabytes de capacidad y hasta ahora, con 851 correos en la cuenta, tiene ocupados 344 megabytes. En promedio, ¿cuántos otros correos se pueden recibir en esa cuenta?

información en los medios

SIDA

Según el informe realizado por la Organización Mundial de la Salud y publicado en diciembre de 2004, hasta ese año había alrededor de $4 \cdot 10^7$ personas infectadas con el virus del SIDA.

El continente africano es el más afectado, ya que 26 millones de habitantes de ese continente han contraído la enfermedad.

América Latina y el Caribe tienen alrededor de $1,8 \cdot 10^6$ infectados. En cambio, en Europa Central y Occidental sólo 610 000 habitantes tienen el VIH.

La cobertura de tratamiento del SIDA en África Subsahariana es casi nula, por lo que se espera que en los próximos 2 años mueran entre 5 y 6 millones de personas debido a la enfermedad en esas regiones.

Para entender lo terrible que es la epidemia del SIDA en África, es necesario saber qué fracción del total de infectados pertenece a ese continente. Según los datos entregados por la OMS existen: $4 \cdot 10^7$ personas infectadas de SIDA, esto significa que 40 000 000 de habitantes del planeta padecen esta terrible enfermedad, de los cuales, 26 millones son africanos, esto es, utilizando notación científica: $2,6 \cdot 10^7$ habitantes africanos sufren de esta enfermedad, es decir:

$$\frac{2,6 \cdot 10^7}{4 \cdot 10^7} = \frac{2,6}{4} = \frac{13}{20} = \frac{65}{100}$$

es la parte de africanos que tiene SIDA respecto del total mundial de enfermos. Por tanto, de cada 20 enfermos de SIDA 13 son africanos, o lo que es lo mismo 65 de cada 100 pacientes de esa enfermedad son africanos.

Fuente: http://data.unaids.org/pub/Report/2008/chile_2008_country_progress_report_sp_es.pdf

apliquemos

1. Averigua con tus compañeros, cuántos enfermos de SIDA hay en Chile.
   La página www.vihsida.cl les puede servir o también www.minsal.cl
   ¿Qué parte de los enfermos de SIDA latinoamericanos y caribeños son chilenos?
   Y respecto al contexto mundial ¿cuántos enfermos de SIDA son chilenos?
   Reúnan sus averiguaciones y discútanlas en clase con el profesor.

2. ¿Qué parte del total de enfermos de SIDA representan los enfermos del centro y occidente de Europa?

3. El tratamiento del SIDA cuesta 5 000 dólares por enfermo al año si se realiza con medicamentos de marca y 800 dólares si se realiza con tratamientos genéricos. Si se tratara a toda la población africana contagiada con medicamentos genéricos en vez de medicamentos de marca, ¿cuánto dinero se ahorraría? Responda en pesos chilenos utilizando notación científica.

aplicando lo aprendido

1 En el año 2003 en nuestro país se generó una cantidad de 5 990 064 toneladas de basura, ¿a cuántos kilogramos corresponde esta cantidad? Escribe en tu cuaderno el resultado, en notación científica.

2 La masa del planeta Marte es:
641 900 000 000 000 000 000 000 kg.
Decide qué parte de la masa de Marte representa la masa de la Tierra que es $5{,}9736 \times 10^{24}$ kg .
Expresa tu respuesta en notación científica.

3 El dióxido de carbono emitido en el mundo, como producto del uso de combustible, queda atrapado en la atmósfera causando el efecto de invernadero que se manifiesta en el calentamiento global de la Tierra. La cantidad anual de gas que se emite en el mundo es de 5 500 toneladas. Escribe esta cantidad de gas en kilogramos utilizando notación científica.

4 En el continente europeo sus habitantes gastan anualmente 50 mil millones de dólares en el consumo de cigarrillos anualmente. Expresa esa cantidad en pesos utilizando notación científica.

5 Calcula las siguientes operaciones utilizando notación científica:

a) $0{,}0000082 \cdot 0{,}0003$

b) $9 \cdot 10^{-6} - 5 \cdot 10^{-6}$

c) $\dfrac{1{,}8 \cdot 10^{8} \cdot 2 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{-5}}$

d) $\dfrac{0{,}000027 \cdot 300\,000}{0{,}009 \cdot 0{,}3}$

6 Una gota de agua contiene a lo menos 1 000 trillones de átomos. Considerando que diez gotas equivalen a 0,5 mL y una taza tiene una capacidad de 200 mL, ¿cuántos átomos contiene una taza de agua?

7 El aire presiona sobre cada centímetro cuadrado de superficie terrestre con la fuerza de un kilogramo aproximadamente, es decir, el peso de una columna de aire que se apoya en 1 cm^2 es igual a presionar ese centímetro cuadrado con una masa de 1 kg. Podríamos decir que la capa atmosférica de la Tierra se forma del conjunto de estas columnas de aire, que son tantas como centímetros cuadrados que forman la superficie de nuestro planeta que es de 510 millones de kilómetros cuadrados. De acuerdo con estos datos responde:

a) ¿Cuántas toneladas pesa el aire?

b) Una aproximación de la masa de la Tierra es $6 \cdot 10^{24}$ kg. ¿Qué parte es la masa atmosférica de la masa terrestre?

8 En cada caso, ¿cuál es la mínima potencia de 10, por la cual es necesario multiplicar al número decimal para que resulte un número entero?

a) 32,4456

b) 0,005903

c) 5,6008

d) 0,0006506

9 Calcula los siguientes cuocientes:

a) $\dfrac{3\,356}{3{,}356}$

b) $\dfrac{542\,308}{54{,}2308}$

c) $\dfrac{28{,}07}{2{,}807}$

5 Números racionales v/s números irracionales

En la Educación Básica estudiaste varios tipos de números, por ejemplo, conociste los números naturales ($\mathbb{N}$). El 1 es un número natural, el sucesor del 1 es 2, que es un número natural y el sucesor del 2 es 3, que también es un número natural; entonces, podrías concluir que cada vez que tenemos un número natural su sucesor también es un número natural.

importante

Si **n** es un número entero, entonces lo podemos escribir como :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}}{1}$$

es decir, todo número entero es un número racional.

Conociste también los números enteros ($\mathbb{Z}$). Cada número entero es un número natural o es el cero o es el opuesto de un número natural. Por ejemplo, -3 es un número entero que no es un número natural.

También conociste las fracciones de números enteros, es decir, números de la forma $\frac{a}{b}$, con a y b números enteros y además b no es cero. Por ejemplo: $\frac{1}{2}$ es una fracción.

Un número racional es cualquier número que se puede escribir como el cuociente de dos números enteros de denominador no nulo.

Por ejemplo, 0,5 es un número racional, ya que es igual a $\frac{1}{2}$.

El número 1 es un número racional, porque lo podemos escribir como $\frac{5}{5}$ que es el cuociente de números enteros de denominador no nulo.

Recordemos que una fracción conserva su valor si se amplifica o simplifica por un número entero; por ejemplo, $\frac{1}{2}$ amplificada por 3 resulta $\frac{3}{6}$ es decir,

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

Entonces un número racional no tiene una escritura única como fracción; de hecho, existen infinitas formas de escribir un número racional como fracción. Por ejemplo, para cada entero $n \neq 0$, el número racional 0 se puede escribir como $\frac{0}{n}$.

actividades

1. Escribe cada uno de los números siguientes como fracción en dos formas distintas:

a) $\frac{-2}{3}$ **b)** 0,3 **c)** $0,\overline{3}$

2. Escribe cada par de números como fracciones con el mismo denominador y luego compara estos números.

a) $\frac{7}{8}$ y $\frac{4}{5}$ **b)** $\frac{14}{27}$ y $\frac{15}{29}$ **c)** $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{10}$

Suma y productos de números racionales

Si tenemos dos números racionales, los podemos sumar y multiplicar, y el resultado sigue siendo un número racional; por ejemplo:

$$\frac{7}{8}+\frac{-5}{6}$$

se puede calcular encontrando dos fracciones iguales a las de arriba, pero con el mismo denominador, esto es; por ejemplo:

$$\frac{21}{24}+\frac{-20}{24}=\frac{1}{24}$$

En general si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos números racionales, siempre se pueden amplificar de forma tal de obtener dos números racionales iguales a los de arriba, pero escritos como fracciones del mismo denominador, por ejemplo:

$$\frac{a\cdot d}{b\cdot d} \text{ y } \frac{b\cdot c}{b\cdot d}$$

entonces la suma ahora resulta:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$$

Como *a, b, c* y *d* son números enteros, el numerador es un número entero, y como *b* y *d* son no nulos, se tiene que *bd* es un entero no nulo; por lo tanto, tenemos que la suma de números racionales es un número racional.

De modo similar puedes demostrar que el producto de números racionales es un número racional.

importante

La suma y producto de números racionales es un número racional.

importante

Si $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ y $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ son números racionales, el producto se define por

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}}$$

Como **a** y **c** son números enteros se tiene que el numerador del producto es entero, y como **b** y **d** son no nulos se tiene que **bd** es no nulo, por lo tanto, el producto de números racionales es un número racional.

actividades

1. Considera los números racionales $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$.

a) Ubica los números en la recta numérica.

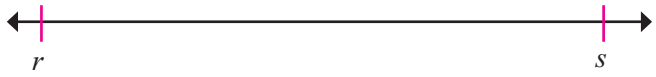
b) Encuentra el punto medio **M** entre esos números. ¿Es un número racional?

c) Encuentra el punto medio entre $\frac{1}{3}$ y **M** y el punto medio entre **M** y $\frac{1}{4}$. ¿Son esos puntos números racionales?

2. ¿Es cierto que el punto medio entre dos números racionales es un nuevo número racional?

3. ¿Es cierto que entre dos números racionales siempre hay un número racional?

Tomemos dos números racionales $r = \frac{a}{b}$ y $s = \frac{c}{d}$ y supongamos que r está a la izquierda de s cuando se ubican en la recta numérica:



Notamos que el punto medio es:

$$\frac{r+s}{2} = \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2} = \frac{\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}}{2} = \frac{a\cdot d+b\cdot c}{2b\cdot d}$$

el cual es también un número racional, por lo tanto:

Entre dos números racionales siempre hay un número racional.

Si se repite este proceso, es decir, encontrar un racional entre medio de dos números racionales, pero ahora considerando los puntos r, s y el punto medio, entonces tendremos tres racionales entre los puntos r y s.

Ahora el punto medio para cada par de los puntos antes encontrados tendremos 7 racionales entre los puntos iniciales (r y s), y así podremos construir tantos racionales entremedio como queramos.

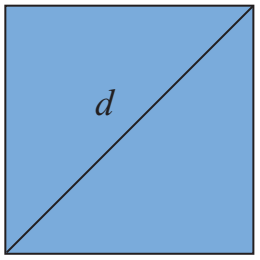
recuerda

Entre dos números racionales hay infinitos números racionales.

Es decir, si se itera este proceso de partir por la mitad cada tramo, notamos que entre dos números racionales hay **infinitos** números racionales.

Un número no racional

Consideremos un cuadrado de lado 1.



La diagonal del cuadrado divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos; si utilizamos el Teorema de Pitágoras para calcular la medida de la diagonal resulta que:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

entonces d es un número positivo cuyo cuadrado es 2.

Supongamos que ese número fuese racional, entonces se puede escribir de la forma $d = \frac{a}{b}$ con a y b enteros positivos. Podemos asumir además, que esta fracción no se puede simplificar, por lo tanto, si uno de ellos es par, el otro es impar.

Como $d^2 = 2$ se tiene que:

$$d^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$$

de donde se deduce que:

$$a^2 = 2 \cdot b^2$$

lo que quiere decir que a es par porque es el doble de b^2, pero como a^2 es par, necesariamente a también lo es. De esto se deduce que a es el doble de un número entero k, esto es, $a = 2 \cdot k$.

Reemplazando en $a^2 = 2 \cdot b^2$ se tiene:

$$4 \cdot k^2 = 2 \cdot b^2$$

y dividiendo por 2 se tiene:

$$2 \cdot k^2 = b^2$$

por lo tanto, b^2 es par y como dijimos antes, esto implica que b es par. Entonces, tanto a como b son pares, lo cual no puede ser, pues asumimos que la fracción no se puede simplificar y que no pueden ser ambos pares, lo que genera una contradicción.

Resumiendo, si suponemos que d es racional llegamos a algo imposible, por lo tanto, suponer que d es racional es un error. Lo correcto es:

La medida de la diagonal del cuadrado de lado 1 no es racional.

nota

La idea de la demostración que no existe un número racional que su cuadrado sea 2, está basada en el hecho que algo falso no puede resultar de algo verdadero. Es decir, si se supone algo y luego de pasos "lógicos" resulta algo evidentemente falso, quiere decir que el supuesto primero es falso. En nuestro caso supusimos que un racional, escrito en su forma más reducida, al cuadrado, es 2, y resultó que no estaba en su forma reducida, lo cual es claramente falso, por lo tanto, la primera suposición es falsa.

actividades

1. Explica por qué la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 2 no es racional.

2. Explica por qué la medida de la diagonal de un cuadrado de lado entero no es racional.

3.* Si **a** y **b** no son racionales, ¿puede serlo **ab**?, ¿puede serlo **a** + **b**?

nota

En general si **a<0,** se tiene que $\sqrt{a^2} = -a$

nota

¿Puedes tú explicar porqué si $0 < x < y$ se tiene que $x^2 < y^2$?

¿Qué relación tiene esto con el encajonamiento de $\sqrt{2}$?

cuidado

Es falso que $\sqrt{4} = \pm 2$
Recuerda que la raíz es siempre un número no negativo.

Al número que es la medida de la diagonal del cuadrado de lado 1 se le llama la raíz cuadrada de 2, o simplemente la raíz de 2, se anota $\sqrt{2}$ y es el único número positivo cuyo cuadrado es 2. En este lenguaje, lo que se hizo antes fue demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

A los números que están en la recta numérica, que no son racionales se les llama **números irracionales**.

En general, si tenemos un número no negativo a, la raíz de a es el único número positivo o cero que al calcularle su cuadrado resulta a. Por ejemplo $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ pues $\frac{2}{3}$ es un número positivo tal que su cuadrado es $\frac{4}{9}$.

Tú puedes verificar que $\sqrt{1} = 1 \quad \sqrt{0} = 0 \quad \sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{9} = 3$

En general, si a no es negativo, se tiene que $\sqrt{a^2} = a$. Pero es muy importante tener claro que la igualdad anterior es cierta sólo para valores no negativos. De hecho, es falso para los valores negativos, por ejemplo si $a = -1$, se tiene que $a^2 = 1$, y por lo tanto,

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{1} = 1 \neq a$$

Si tomamos un número mayor o igual a 2, se tiene que el cuadrado de ese número es mayor que 4, por lo tanto, $\sqrt{2} < 2$. Como $1^2 = 1$ se tiene que $1 < \sqrt{2} < 2$.

Ahora bien, como $\frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} > 2$ se tiene que $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$

Como $\frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16} < \frac{32}{16} = 2$ se tiene que $\frac{5}{4} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$

Tomando siempre el punto medio de los extremos de las desigualdades, podemos encajonar $\sqrt{2}$ mediante números racionales de forma tal, que cada vez obtendremos una mejor aproximación de $\sqrt{2}$.

actividades

1. Explica por qué $\sqrt{2} + 1$ es un número irracional.
2. Ordena los siguientes números, de menor a mayor.

   $1,\ 2,\ 0,\ \sqrt{2}\ ,\ \sqrt{3}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \sqrt{3} - \sqrt{2}\ ,\ \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$
3. ¿Cuáles de los números de arriba son racionales? Explica tu respuesta.

Notación decimal de los números racionales

Cuando dividimos dos números enteros, por ejemplo $5:7$, aparecen números enteros en el cuociente y números enteros en el resto. En el ejemplo, $5:7$, los números que aparecen en el resto son 5, 1, 3, 2, 6, 4 y 5. Como el resto es 5 al final y coincide con el primer valor de la división, no es necesario seguir dividiendo, ya que se repite el ciclo 714285 en el cuociente. Es decir, bastó que en un momento apareciera un resto repetido para que el ciclo comenzara de nuevo.

$$5:7 = 0{,}714285714285714285714285714285714285714285... = 0{,}\overline{714285}$$

Esto ocurre en cualquier división de enteros positivos: al dividir n en m, ($n:m$), los posibles valores para el resto son $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, m-1$, que son los valores menores que m y no negativos. Si en algún paso de la división el resto es cero, la división se acaba y se obtiene un decimal finito, pero si no, necesariamente se deberá repetir un valor del resto. Cuando eso ocurre se comienza a repetir el ciclo y se obtiene un número decimal periódico. En el caso en que uno de los enteros n o m sea negativo ocurre exactamente lo mismo.

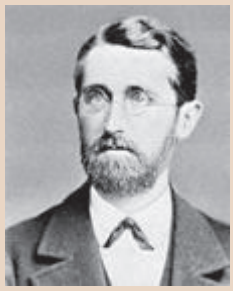
recuerda

$5:7=0,\overline{714285}$
50
10
30
20
60
40
5

Todo número racional se puede escribir como un decimal finito o como uno infinito en el cual se repite un periodo.

El resultado recíproco es cierto, es decir, "si un número se escribe como decimal finito o periódico, entonces ese número es racional". De hecho, existe un regla que transforma un número decimal en fracción, que analizaremos en el siguiente apartado.

Dado cualquier número en la recta, este tiene su notación decimal, que puede ser finita, periódica o no periódica. En los dos primeros casos el número es racional y en el último es irracional. En todos los casos decimos que el número es un **número real**.



RICHARD DEDEKIND
(1831-1916)

Matemático alemán.

Trabajó en ecuaciones diferenciales, teoría algebraica de números y en otras áreas de las matemáticas. Fue uno de los matemáticos que se preguntó, ¿qué es un número? y que trató de responder, tal como lo hicieron Peano y Fregue, en forma axiomática. A él se le debe una de las más conocidas definiciones, la denominada "Cortaduras de Dedekind", donde caracteriza cada número real como una colección de números racionales.

actividades

1. Transforma a fracción los siguientes decimales:

a) $7,\overline{23}$ **b)** $14,28$ **c)** $25,92\overline{461}$

2. Resuelve las operaciones:

a) $\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{5} + 0,\overline{15}$ **b)** $\sqrt{0,\overline{4}+0,\overline{3}}$

3.* ¿Es cierto que existen infinitos números irracionales?

4.* ¿Es el cuadrado de un número irracional un número irracional?

5.* Si el cuadrado de un número es irracional, ¿es cierto que el número es irracional?

6.* ¿Es $\dfrac{1+\sqrt{2}}{5}$ un número irracional? Explícalo.

aplicando lo aprendido

1 Expresa los siguientes números racionales en notación decimal.

a) $\frac{3}{7}$

b) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{7}{11}$

d) $\frac{-3}{-5}$

e) $\frac{12}{25}$

f) $\frac{-3}{13}$

g) $\frac{101}{100}$

h) $\frac{101}{10}$

i) $\frac{5}{-6}$

j) $\frac{235}{990}$

k) $\frac{235}{999}$

l) $\frac{0}{99}$

2 Considera el número racional $\varepsilon = \frac{1}{10\,000\,000\,000}$. Si divides el tramo de recta real que parte en 0 y termina en 1, en pequeños intervalos de largo ε, es decir la primera marca la haces en ε, la segunda en 2ε, la tercera en 3ε, y así sucesivamente en marcas del mismo tamaño hasta llegar a 1.

a) ¿Cuántas marcas tendrías que hacer?

b) Si la unidad de medida es el diámetro terrestre, es decir, si el 0 lo ponemos en alguna parte de la Tierra y el 1 lo ponemos en el extremo opuesto de la Tierra, ¿cuánto separaría a dos marcas consecutivas? (El diámetro terrestre es aproximadamente de 12,740 km).

c) ¿Cuántos números racionales hay entre 0 y ε?

3 Si **x** es un número real que no es entero, entonces existe un entero **n** tal que $\mathbf{n} < \mathbf{x} < \mathbf{n} + 1$. Al entero **n** se le llama la parte entera de **x** y se anota $[\mathbf{x}] = \mathbf{n}$, por ejemplo, $[1/2] = 0$, $[-1{,}3] = -2$, $[\sqrt{2}] = 1$. Si **x** es un entero la parte entera de **x** es el mismo **x**, es decir, $[\mathbf{x}] = \mathbf{x}$ sí y sólo sí $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}$.

a) Calcula:

i) $\left[\frac{3}{4}\right]$

ii) $\left[\frac{-3}{4}\right]$

iii) $\left[\frac{7}{2}\right]$

iv) $\left[\frac{-24}{9}\right]$

v) $\left[\frac{3}{11}\right]$

vi) $\left[\frac{-66}{13}\right]$

vii) $\left[\sqrt{10}\right]$

viii) $[\pi]$

ix) $[-4]$

b) Si **x** es un número real cualquiera, ¿cuánto es [[**x**]] – [**x**]?

c) Si **x** es un número real cualquiera, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar **x** – [**x**]?

d) Si **x** es un número real cualquiera, ¿cuál es el mínimo valor que puede tomar **x** – [**x**]?

e) ¿Es cierto que [**x** + **y**] = [**x**] + [**y**]?

f) Si **x** es un número real cualquiera y **n** es entero, ¿es cierto que [**n** + **x**] = **n** + [**x**].

4 Si **x** es un número real, entonces $[\mathbf{x}] \leq \mathbf{x} < [\mathbf{x}] + 1$, por lo tanto [**x**] + 1 es un número entero mayor que **x**. Es decir, dado un número real fijo, siempre existe un número entero que es mayor que él. Use esta propiedad para responder las siguientes preguntas:

a) Si ε es positivo, entonces también lo es $\frac{1}{\varepsilon}$. Muestra que existe un número natural mayor que $\frac{1}{\varepsilon}$.

b) Si ε es positivo, demuestra que existe un número natural **N** tal que $\frac{1}{\mathbf{N}} < \varepsilon$.

c) Considera el conjunto **A** de todos los inversos multiplicativos de números naturales. Muestra que no existe ningún número positivo que sea menor que todos los elementos de **A**.

5 Si **x** < **y** con **x** racional e **y** irracional.

a) Muestra que existe un número natural **N**, que es mayor que $\frac{1}{\mathbf{y} - \mathbf{x}}$.

b) Si **k** es natural y **N** es el natural destacado del literal anterior, muestra que $\mathbf{x} + \frac{1}{\mathbf{N} + \mathbf{k}}$ es racional.

c) Si **k** es natural y **N** es el natural destacado del literal anterior, muestra que $\mathbf{x} < \mathbf{x} + \frac{1}{\mathbf{N} + \mathbf{k}} < \mathbf{y}$.

d) Muestra que existen infinitos números racionales entre **x** e **y**.

6 Si **x** < **y** con **x** irracional e **y** irracional.

a) Si **y** – **x** ≥ 1, muestra que existe un entero entre **x** e **y**.

b) Si 0 < **y** – **x** < 1, muestra que existe un número natural **N** tal que **Ny** – **Nx** > 1.

c) Muestra que existe un número **M** entre **Nx** y **Ny**.

d) Muestra que $\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}$ es un número racional entre **x** e **y**.

7 Demuestra que entre dos números reales siempre existe un número racional entre ellos. Esta propiedad se llama densidad de ℚ sobre ℝ.

8 Demuestra que si x e y son números positivos, entonces existe un número natural N tal que **Nx** > **y**

9 Considera el conjunto

$$\mathbf{A} = \left\{ \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Demuestra que no existe ningún número positivo, que sea menor a todos los elementos de A.

Transformación de notación decimal a fraccionaria

Si consideramos cualquier número decimal finito, este se puede multiplicar por una potencia de 10 y obtener un número entero. Por ejemplo,

$$43{,}567 \cdot 10^3 = 43\ 567$$

recuerda

Si un número tiene tres cifras decimales, basta multiplicarlo por 10^3 para que el resultado sea entero, pero no es la única potencia de 10 que hace esa gracia, de hecho cualquier potencia de 10, digamos $10^{\mathbf{n}}$, con $\mathbf{n} \geq 3$ al multiplicar un número de tres cifras decimales, resulta un número entero. ¿Puedes generalizar este resultado?

En el caso de arriba también se puede multiplicar por 10^4 y todavía obtener un número entero, en este caso se obtendría 435 670, pero si multiplicamos por una potencia de 10 menor que 10^3, no obtendremos un número entero. En este caso el 3 es el exponente mínimo de una potencia de10 que permite obtener un número entero al multiplicar 43,567, que coincide con la cantidad de decimales de 43,567.

Ahora bien, si multiplicamos un número cualquiera por 1 obtenemos el mismo número, por lo tanto:

$$43{,}567 = 43{,}567 \cdot 1 = 43{,}567 \cdot \frac{10^3}{10^3} = \frac{43\,567}{10^3}$$

Lo que muestra que 43,567 es el cuociente de dos números enteros de denominador no nulo, por lo tanto es un número racional. Más generalmente, si tenemos un número decimal finito, x y digamos que tiene n decimales, entonces x se puede escribir como

$$x = m + 0,\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$$

donde m es un número entero.

Si $0,a_1a_2a_3 \ldots a_n$ es un número racional y como m es un número racional y como la suma de dos racionales es un número racional, entonces x también sería un número racional.

Como $0,\, a_1a_2a_3 \ldots a_n \cdot 10^n = a_1a_2a_3 \ldots a_n \in \mathbb{Z}$ se tiene que:

$$0,a_1a_2a_3 \ldots a_n = 0,a_1a_2a_3 \ldots a_n \cdot \frac{10^n}{10^n} = \frac{a_1a_2a_3 \ldots a_n}{10^n} \in \mathbb{Q}$$

Por lo tanto x es un número racional. Por lo tanto

Todo decimal finito es un número racional.

Además la demostración de arriba, muestra un método que permita encontrar una forma fraccionaria del decimal finito. Para transformar un número decimal finito a fracción, basta amplificar el número por la potencia de 10 que tiene por exponente la cantidad de decimales del número.

Por ejemplo, 456,87 tiene dos decimales, entonces basta amplificar por $10^2 = 100$ para obtener su forma fraccionaria:

$$456,87 = 456,87 \cdot \frac{100}{100} = \frac{45\,687}{100}$$

Si el número decimal no es finito, entones es infinito. Si hay un período que se repite infinitamente distinguiremos dos casos. El primero es cuando el período comienza inmediatamente después de la coma. En este caso diremos que el número es periódico. Por ejemplo, $3,\overline{87}$, si multiplicamos ese número por 10^2 resulta:

$$3,878787878787... \cdot 10^2 = 387,878787878787...$$

Ahora bien, si hacemos la resta entre el número anterior y 3,878787878787... se anulan todos los decimales, pues ambos números tienen exactamente los mismos decimales, es decir

$$\begin{array}{rcl} 387 & , & 8787878787... \\ -\quad 3 & , & 8787878787... \\ \hline 384 & , & 0000000000... \end{array}$$

Es decir,

$$3,\overline{87} \cdot 10^2 - 3,\overline{87} = 384$$

Pero 100 veces $3,\overline{87}$ menos una vez $3,\overline{87}$ es lo mismo que 99 veces $3,\overline{87}$ es decir

$$3,\overline{87} \cdot 99 = 384$$

Es decir,

$$\frac{384}{99} = 3,87$$

recuerda

La propiedad distributiva dice que
$(\mathbf{b} - \mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{ba} - \mathbf{ca}$.
Por lo tanto, si
$\mathbf{b} = 100$ y $\mathbf{c} = 1$ y $\mathbf{a} = 3,\overline{87}$,
entonces
$(100 - 1)\, 3,\overline{87} =$
$100 \times 3,\overline{87} - 1 \times 3,\overline{87}$

actividades

1. Multiplica $34,\overline{567}$ por 10^3
2. Haz la resta del resultado anterior con $34,\overline{567}$. ¿Es cierto que es un número entero?
3. Explica por que $34,\overline{567} \times 10^3 - 34,\overline{567} = 34,\overline{567} \cdot 999$
4. Muestra que $34,\overline{567} = \frac{34\,533}{999}$
5. Transforma de decimal a fracción:
   a) $43,\overline{54}$
   b) $393,\overline{101}$
   c) $45,\overline{772}$

nota

La clasificación en "periódico" y "semiperiódico" no es muy afortunada, pues hay números que se pueden escribir como periódicos y como semiperiódicos. Es más, todo periódico se puede escribir como semiperiódico, por ejemplo:

$2,\overline{34} = 2,\overline{343}$

Como hemos visto si un número a que es decimal periódico cuyo periodo tiene n dígitos, es multiplicado por 10^n se obtiene un número decimal, que tiene exactamente la misma parte decimal que el anterior. Por lo tanto, si restamos $a \times 10^n - a$ las partes decimales se cancelan y se obtiene un número entero. Pero

$$a \times 10^n - a = a(10^n - 1) \in \mathbb{Z}$$

Denotemos por k el número entero que resulta de multiplicar a por $10^n - 1$, es decir

$$a(10^n - 1) = k$$

Como $10^n - 1$ es también un número entero se tiene que $\frac{k}{10^n - 1} = a$ es un cuociente de números enteros. Es decir:

$$\frac{k}{10^n - 1} = a \in \mathbb{Q}$$

nota

Notemos que

$10^1 - 1 = 9$

$10^2 - 1 = 99$

$10^3 - 1 = 999$

¿Será cierto que para cada **n** $\in \mathbb{N}$ se cumpla que $10^{\mathbf{n}} - 1$ es un número entero de **n** cifras todas iguales a 9?

Por ejemplo, para el número periódico $45,\overline{678}$ el valor de $k = 4\,5678 - 45 = 45\,633$ y $10^3 - 1 = 999$ por lo tanto

$$45,\overline{678} = \frac{45\,633}{999}$$

El segundo caso es cuando el número tiene un periodo, pero este no comienza inmediatamente después de la coma, es decir hay dígitos que separan la coma del periodo, por ejemplo $4,5\overline{67}$, a estos se les llama semiperiódicos. La idea es multiplicar por potencias de 10 a este número de dos maneras distintas, de tal forma que resulten dos números de la misma parte decimal, y así restar y obtener un número entero.

actividades

1. Multiplica $4,5\overline{67}$ por 10^3.
2. Encuentra una potencia de 10 que al multiplicarse con $4,5\overline{67}$ resulte un número con la misma parte decimal que el resultado en el ítem anterior.
3. Muestra que la resta de los productos que resultan de **1)** y **2)** es un número entero.
4. Considera un número real **x** y dos números enteros **m** y **n**, de tal suerte que la resta de **mx** con **nx** es un número entero no nulo, ¿es cierto que **x** es racional?
5. Considera un número real **x** y dos números racionales **m** y **n**, de tal suerte que la resta de **mx** con **nx** es un número racional no nulo, ¿es cierto que **x** es racional?

De la página anterior podemos obtener que:

$$4{,}5\overline{67} \cdot 10^3 = 4\,567{,}67676767...$$

$$4{,}5\overline{67} \cdot 10 = 45{,}67676767...$$

Ambos números tienen la misma parte decimal, por lo tanto la resta resulta un número entero. De hecho la resta es 4 567 − 45 = 4 522, es decir:

$$4{,}5\overline{67} \cdot 10^3 - 4{,}5\overline{67} \cdot 10 = 4\,522$$

Pero mil veces $4{,}5\overline{67}$ menos diez veces $4{,}5\overline{67}$ es lo mismo que 990 veces $4{,}5\overline{67}$, es decir:

$$4{,}5\overline{67} \cdot 990 = 4{,}5\overline{67} \cdot 10^3 - 4{,}5\overline{67} \cdot 10 = 4\,522$$

Es decir,

$$4{,}5\overline{67} \cdot 990 = 4\,522$$

Por lo tanto

$$4{,}5\overline{67} = \frac{4\,522}{990}$$

Por lo tanto $4{,}5\overline{67}$ es un número racional.

El método anterior permite desarrollar una manera general de transformar un número decimal semiperiodico a decimal. Para describirlo, llamaremos a los números que están entre la coma y el periodo, como anteperiodo, en el caso de $4{,}5\overline{67}$ el anteperiodo tiene un solo dígito y es 5. Entonces, si un número decimal semiperiodico a tiene n dígitos en el periodo y m dígitos en el anteperiodo, entonces $a \cdot 10^m$ y $a \cdot 10^{n+m}$ son números decimales periódicos que tienen la misma parte decimal. Por lo tanto, su resta es un número entero. Llamemos a ese entero k, en símbolos:

$$a \cdot 10^{n+m} - a \cdot 10^m = k \in \mathbb{Z}$$

Pero $a \cdot 10^{n+m} - a \cdot 10^m = a(10^{n+m} - 10^m)$ y como $10^{n+m} - 10^m$ es un número entero se tiene que:

$$a = \frac{k}{10^{n+m} - 10^m} \in \mathbb{Q}$$

nota

Por propiedad de las potencias sabemos que $10^{n+m} = 10^n \cdot 10^m$ y por la propiedad distributiva sabemos que $10^n \cdot 10^m - 10^m = (10^n - 1)10^m$ y si recordamos una observación anterior, podemos decir que $10^n - 1$ es un número de **n** cifras donde todas son iguales a 9.
Entonces, ¿qué puedes decir de $(10^n - 1)10^m$?

actividades

- Muestra que $10^{n+m} - 10^m$ es un número compuesto por ***n*** nueves y ***m*** ceros.
  Por ejemplo $10^{3+2} - 10^2 = 99\,900$.

aplicando lo aprendido

1 Un número decimal cuyos primeros 30 decimales son todos iguales a 4, ¿es cierto que es un número decimal periódico?

2 Si un número entero es dividido por 11 y resulta un decimal periódico (o semiperiódico), explica por qué el largo del periodo no puede ser más grande que 11.

3 Calcula $34{,}56\overline{856} \cdot 10^5 - 34{,}56\overline{856} \cdot 10^2$.

a) ¿El resultado es un número entero?

b) Divide el resultado de **a)** por 99 900.

c) Escribe $34{,}56\overline{856}$ como fracción.

4 ¿Hay números decimales periódicos que se pueden escribir como decimales finitos?

5 ¿Hay números decimales semiperiódicos que se pueden escribir como decimales finitos?

6 ¿Cuántos números racionales hay entre $\frac{1}{2}$ y $0{,}4\overline{9}$?

7 Escribe los siguientes números racionales como fracción de números enteros.

a) $4{,}\overline{567}$

b) $6{,}78\overline{9}$

c) $-0{,}07\overline{1}$

d) $0{,}\overline{9}$

e) $0{,}102\overline{308}$

f) $40{,}06\overline{340}$

g) $67{,}503\overline{212}$

h) $1{,}\overline{345}$

8 Resuelve las siguientes operaciones, escribe tu resultado como una fracción:

a) $\frac{3}{5} + 0{,}4\overline{5}$

b) $4{,}56 + 4{,}5\overline{6}$

c) $\frac{-32}{990} \cdot 0{,}4\overline{5}$

d) $0{,}99 : 4{,}5$

e) $\frac{1}{990} + 0{,}3\overline{24}$

f) $6{,}78 - 3{,}6\overline{98}$

g) $0{,}\overline{12} + 0{,}\overline{88}$

h) $\frac{11}{7} + 0{,}\overline{4285715}$

9 Si al dividir el número natural **m** entre 3 resulta un número decimal finito, ¿es cierto que **m** es un múltiplo de 3?

10 Consideremos un número natural **n** el cual lo dividimos por 7 y supongamos que el cuociente es un decimal finito.

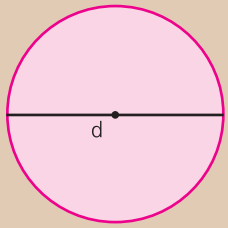
a) Demuestra que existe $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{10^m n}{7}$ es un número entero.

b) Demuestra que **n** es un múltiplo de 7.

un poco de historia

LOS NÚMEROS IRRACIONALES

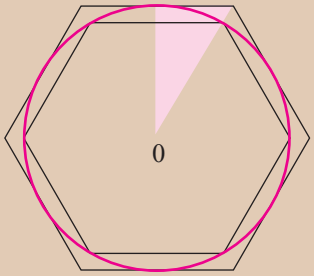
Un número real muy conocido es π que es el cuociente constante entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro. Esta relación proporcional entre el diámetro y el perímetro de la circunferencia era conocida desde la antigüedad por los pueblos egipcio, babilonio, chino, sumerio y hebreo, entre otros. Además, todos ellos tenían estimaciones de π; por ejemplo, en el papiro de Rhind, que data del año 1800 antes de nuestra era, se lee:



$P = d\pi$

el área de un círculo es como la de un cuadrado cuyo lado es igual al diámetro del círculo disminuido en $\frac{1}{9}$.

lo que en el fondo dice es que los egipcios aproximaban π como $\frac{256}{81} \approx 3{,}16049$.



Encajonamiento.

En la Biblia, en el Libro de los Reyes, se lee:

Hizo fundir, asimismo, un mar de diez codos de un lado al otro, perfectamente redondo; su altura era de cinco codos, y lo ceñía alrededor un cordón de treinta codos.

Si se lee con atención, se puede deducir que el pueblo hebreo consideraba a π como 3, de nuevo un número racional. En la antigua China se aproximaba π por 3,1724. En Babilonia por $\frac{31}{8}$; siempre números racionales.

Sin embargo, fue Arquímedes (287-212, a de C) quien describió un método para calcular el área de la circunferencia, y de paso, aproximar π. El método consiste en encajonar el área del círculo con polígonos inscritos y circunscritos a la circunferencia. Arquímedes logró decir que π está entre $3\frac{10}{71}$ y $3\frac{1}{7}$.

Lo sorprendente es que recién en 1770 el matemático alemán de origen francés, Johann Heinrich Lambert (1728-1777), demostró que π es irracional, es decir, **¡a la humanidad le llevó miles de años demostrar que π no es una fracción!** Esto muestra que, en general, es muy difícil determinar si un número real es o no irracional. El número $\sqrt{2}$ es irracional, pero su cuadrado no lo es, lo mismo se preguntó respecto de π, ¿será su cuadrado racional? Fue el matemático francés Andrie Marie Legendre (1752-1833) quien en 1794 demostró que π^2 no es racional.

ADRIEN-MARIE LEGENDRE
(1752-1833)

Matemático y físico francés.

A él se le deben grandes avances en matemática, geometría, cálculo, teoría de números, funciones elípticas, entre otras áreas que le deben a Legendre grandes resultados. Legendre demostró en 1794 la irracionalidad de π^2.

CARL LOUIS FERDINAND VON LINDEMANN
(1752-1839)

Matemático alemán.

Realizó su tesis bajo la dirección de Klein sobre geometría no euclideana. Es famoso gracias a que fue el primero en demostrar que cualquier combinación entera de potencias de π no es racional y con esto, responde satisfactoriamente al problema de la cuadratura del círculo, esto es, no se puede construir con regla y compás un cuadrado de área igual a la del círculo de radio 1.

El número irracional $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se conoce como sección áurea y nace de la proporción que según los griegos debían tener las cosas bellas. Decían que un trazo está dividido en proporción áurea si el trazo total es al trazo mayor como el mayor es al pequeño.

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$$

En una persona bella, decían los griegos, los ojos en el rostro están en proporción aúrea. Hoy todas las tarjetas, carnés, etc. cumplen con esta proporción.

Ese número áureo es irracional, como dijimos, pero además, cualquier potencia de él sigue siendo irracional, aunque $\phi^2 - \phi$ es racional.

Se preguntó lo mismo para π, ¿existe una combinación entera de potencias de π que sea racional? La respuesta es no y la dió el matemático alemán Ferdinand Lindemann (1852-1939) en 1882, hace aproximadamente 124 años. Esto confirma que estudiar la irracionalidad de los números es un problema muy serio.

A continuación tenemos π aproximado a 50 decimales.

$$\pi \approx 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510$$

actividades

1. ¿Es $\pi + 1$ racional? Explica tu respuesta.

2. Encuentra el inverso multiplicativo de ϕ.

3. Investiga cuántos decimales de π puede encontrar un computador moderno y cuánto demora en hacerlo. ¿Cuánta certeza aseguran los programadores computacionales de la justeza de los decimales de π?

4. Demuestra que si el cuadrado de un número entero es múltiplo de 5, entonces el número es múltiplo de 5.

5. Usa el ejercicio anterior para demostrar que ϕ es irracional.

6. Demuestra que $\phi^2 - \phi$ es racional.

7. Si $\alpha = \sqrt{2} - 1$. Encuentra una combinación entera de potencias de α que sea racional.

8. Explica cómo se deduce del papiro de Rhind que los egipcios aproximaban π como $\frac{256}{81}$.

9. Explica cómo del relato del Libro de los Reyes se desprende que el pueblo hebreo aproximaba π por 3.

aplicando lo aprendido

1 Dados los siguientes pares de números determina 2 números racionales entre ellos:

a) $0,\overline{1}$ y $\frac{1}{10}$

b) $-\frac{11}{12}$ y $-\frac{5}{6}$

c) $0,3\overline{1}$ y $0,\overline{3}$

2 Ordena de manera creciente los siguientes números reales:

$$-\frac{3}{4}\ ;\ -\sqrt{5}\ ;\ -0,3\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3 Resuelve las siguientes operaciones con números racionales:

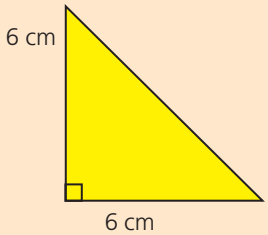
a) $\left(6,2+3\frac{2}{3}\right):1\frac{8}{37}$

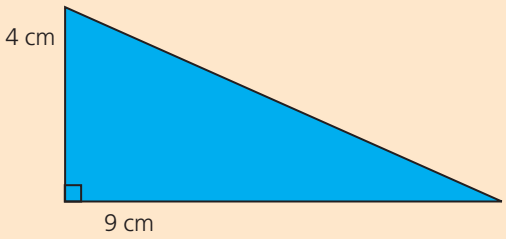
b) $\dfrac{\frac{3}{4}:\frac{1}{8}}{1\frac{1}{2}}$

c) $\dfrac{1\frac{1}{4}\cdot 1,\overline{3}\cdot 1\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}+1}$

4 Aplica el Teorema de Pitágoras para encontrar la medida que falta en los triángulos siguientes y decide si se trata de números irracionales o racionales:





5 Estima entre qué números enteros se encuentran las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{17}$

b) $\sqrt{93}$

c) $\sqrt{700}$

6 La siguiente figura muestra el tablero de un automóvil y la medida que marca la cantidad de bencina que tiene el estanque:

a) ¿Entre qué números racionales se encuentra la medida que marca la cantidad de gasolina en el estanque del auto?

b) Usa la respuesta del ejercicio anterior para encontrar un par de racionales más cercanos a la medida de la aguja, sin olvidar que ésta se encuentra entre medio de dichos racionales.

c) Supongamos que el estanque del auto está lleno con 21 L de bencina. Si el estanque contiene en el momento de leer el tablero 18,3 L, expresa la medida leída como número racional.

aplicando lo aprendido

1 Considera el conjunto **K** de todos los números reales de la forma $\alpha = \mathbf{a} + \mathbf{b}\sqrt{2}$ con **a** y **b** números racionales.

a) Muestra que **K** contiene a todos los números racionales.

b) Muestra que si $\mathbf{b} \neq 0$, entonces $\mathbf{a} + \mathbf{b}\sqrt{2}$ es irracional.

c) Muestra que la suma de elementos de **K** es también un elemento de **K**.

d) Muestra que el producto de elementos de **K** es también un elemento de **K**.

e) Muestra que si $\mathbf{a} + \mathbf{b}\sqrt{2} = \mathbf{c} + \mathbf{d}\sqrt{2}$, entonces $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{d}$.

f) Muestra que si $\mathbf{a} \neq 0 \neq \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{b}^2$ no es cero.

g) Muestra que si $\mathbf{a} \neq 0 \neq \mathbf{b}$, entonces

$$\beta = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{b}^2} + \frac{-\mathbf{b}\sqrt{2}}{\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{b}^2}$$ es tal que $\alpha\beta = 1$.

2 Si **r** y **r'** son números irracionales y **n** es racional pero distinto de cero, entonces, ¿cuál de los siguientes es en todos los casos un número irracional?

a) $\mathbf{r}^n$

b) $\mathbf{r} + \mathbf{r}'$

c) $\mathbf{r}\mathbf{r}'$

d) $\mathbf{nr}$

3 Recuerda que $[\mathbf{x}]$ denota la parte entera de **x**.

a) Muestra que $(-1)^{\mathbf{n}}$ es 1 cuando **n** es par y es -1 cuando **n** es impar.

b) Muestra que $\left[\frac{\mathbf{n}}{2}\right]$ es **k** cuando $\mathbf{n} = 2\mathbf{k}+1$ y cuando $\mathbf{n} = 2\mathbf{k}$.

c) Muestra que si **n** es natural, entonces $(-1)^{\mathbf{n}}\left[\frac{\mathbf{n}}{2}\right]$ es entero.

d) Muestra que para cada entero **M**, existe un único natural **n** tal que $\mathbf{M} = (-1)^{\mathbf{n}}\left[\frac{\mathbf{n}}{2}\right]$

4 Los números naturales 2, 3 y 6 son tales que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ es un número natural. ¿Existe otro trío de números naturales distintos, **a**, **b**, **c** tales que $\frac{1}{\mathbf{a}}+\frac{1}{\mathbf{b}}+\frac{1}{\mathbf{c}}$ sea natural?

5 ¿Para cuáles números naturales **n** el número racional $\frac{167}{2\mathbf{n}-5}$ es natural?

6 Considera la suma de potencias de $\frac{1}{2}$.

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^9}$$

a) Muestra que $\frac{1}{2}\mathbf{S}$ es

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^{10}}$$

b) Muestra que $\mathbf{S} - \frac{1}{2}\mathbf{S} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{10}}$

c) Muestra que $\mathbf{S} = 1 - \frac{1}{2^9}$

d) ¿Es cierto que la suma de las 100 primeras potencias de $\frac{1}{2}$ es igual a $1 - \frac{1}{2^{100}}$

e) ¿Es cierto que la suma de las primeras **n** potencias de $\frac{1}{2}$ es menor que 1?

f) Si das un paso que mide medio metro, luego un paso de un cuarto de metro, luego un paso que mide la mitad del anterior, luego un paso que mide la mitad del anterior, y así sucesivamente cada paso mide la mitad del anterior. ¿Cuántos pasos tendrás que dar de esta forma para haber avanzado un metro en total?

7 Cada lado de un triángulo equilátero de lado 1, se divide en tres partes iguales, en la parte central de cada lado se construye otro triángulo equilátero de lado $\frac{1}{3}$ y la base es borrada, en el siguiente paso cada trazo de largo $\frac{1}{3}$ se divide en tres partes iguales y se forma un triángulo equilátero y le borramos la base y así sucesivamente.

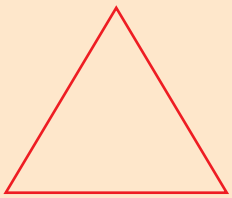


Figura 1

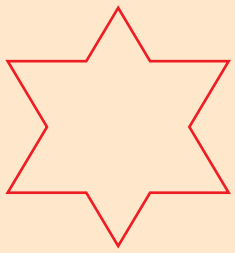


Figura 2

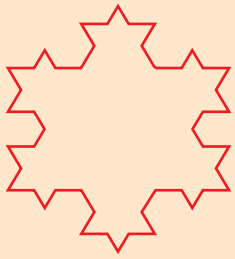


Figura 3

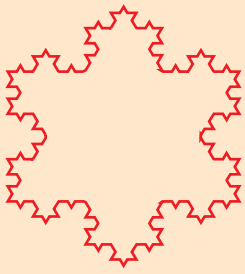


Figura 4

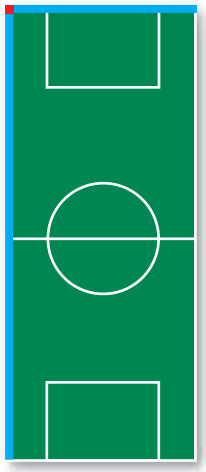
a) ¿Cuánto mide el lado de la figura 4?

b) ¿Cuántos lados tiene la figura que resulta del paso número 10?

c) ¿Cuál es el perímetro de la figura que resulta del paso número 15?

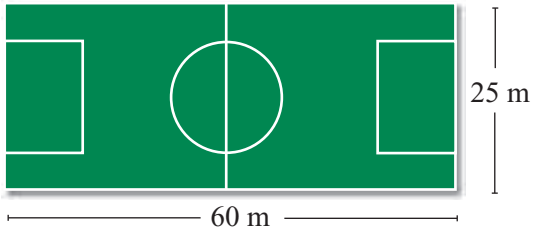
d) ¿Cuál es el área de la figura 3?

6 Aproximaciones



Si lo pintado de color es el error que se cometió, ¿cuál es el área del cuadradito rojo?

En el colegio "César Vallejo", de Hualañé, el primero medio está a cargo de sembrar pasto en la cancha de futbolito, que es de tierra. Se le pide a Ramón que mida las dimensiones de la cancha para comprar el pasto, y él les dice que la cancha es un rectángulo de 25 m de ancho y 60 m de largo.

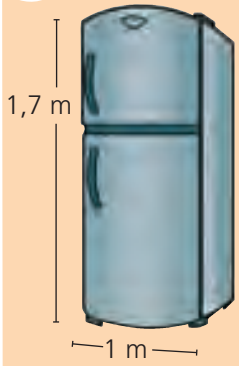


El pasto lo venden a \$2 550 el metro cuadrado (m^2), por lo tanto, como la cancha tiene una área de 1 500 m^2, el costo sería \$3 825 000. Sin embargo, cuando la directiva del curso estaba haciendo la compra, el dependiente les sugirió comprar un poco más, ya que siempre se cometen errores en las mediciones. La directiva se reunió y Millaray, la presidenta de la directiva, consideró que era razonable estimar un error de 10 cm en las medidas lineales. Prácticamente todos estuvieron de acuerdo, sólo unos pocos difirieron, pero aceptaron finalmente.

¿Cuántos metros cuadrados era necesario aumentar a la compra inicial?
¿Cuánto dinero más es necesario invertir?

Entonces, lo máximo que podrán ser las dimensiones de la cancha, según la estimación de Millaray, serían 60,1 m de largo y 25,1 m de ancho. De modo que el área en este caso sería 1 508,51 m^2 es decir, 8 metros cuadrados y medio más que el cálculo inicial. Esto se traduce en dinero a \$21 700,5. Como en Chile no tenemos centavos, es necesario agregar \$21 701 para comprar el pasto considerando un margen de error en la medición.

actividades



1. Supón que Ramón midió mal. La cancha mide realmente 25,1 m de ancho y 59,9 m de largo, ¿el área real es distinta o igual que si la hubiésemos calculado con los datos de Ramón?, ¿cuán diferente es?, ¿nos hubiésemos pasado o nos hubiésemos quedado cortos?

2. A los refrigeradores se les calcula su volumen en litros. Supón que un refrigerador tiene una base cuadrada de un metro de lado y su altura es de 1,7 m. Si las mediciones se hacen con un error de 1 cm, ¿cuál es el error que se comete en el volumen?
Si una tienda promociona el refrigerador diciendo que su capacidad es de 1 700 litros, ¿en cuántos litros puede estar esta información equivocada?

Para aproximar números en notación decimal existen esencialmente dos maneras de hacerlo. Una es **truncando**, esto es considerando sólo las primeras cifras decimales. Por ejemplo, si truncamos el número π en los cuatro primeros decimales queda 3,1415.

La otra forma es aproximar al decimal más cercano o por redondeo, que es lo que se usa para calificar a los estudiantes en el colegio. Por ejemplo, si tu promedio es 6,34, tu nota oficial será un 6,3; en cambio, si tu promedio es 6,36, tu nota oficial será un 6,4.

En general, si quieres aproximar por **redondeo**, debes truncar el número al decimal que te interese. Para entender mejor, pensemos en el cuarto decimal, observas el dígito del siguiente decimal, en nuestro caso el quinto. Si ese dígito es menor que 5 tu aproximación será el número truncado, si el dígito es mayor o igual a 5 se cambia el último dígito del número truncado por su sucesor.

Por ejemplo, si aproximamos π al cuarto decimal por redondeo necesitamos conocer π al quinto decimal, esto es 3,14159. Como 9 es mayor que 5, el redondeo de π al cuarto decimal será 3,1416, distinto del truncamiento.

Un ejemplo:

Guillermina, que estudia en el colegio "El Monte", tiene un profesor que, al fin de año, pone todos los promedios truncados al segundo decimal. Luego calcula el promedio final de todos los cursos, promediando de estas notas y el resultado lo redondea al primer decimal.

En cambio, el profesor del curso paralelo redondea el promedio final de cada ramo al primer decimal, luego promedia todas esas notas y, finalmente, redondea al primer decimal de nuevo.

Si Guillermina estuviese en el curso paralelo, ¿tendría el mismo promedio que tiene ahora?, ¿tendría más o menos nota?

nota

Truncando
π=**3,1415**

Redondeando
π=**3,1416**

actividades

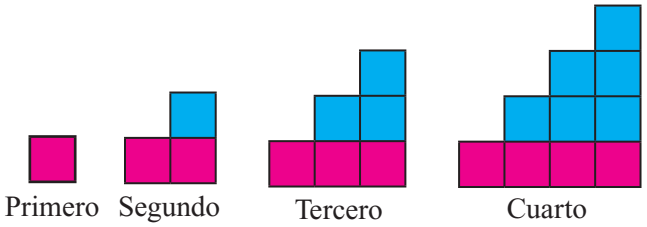
1. Una rueda de los camiones mineros de Chuquicamata tiene un diámetro que mide 3 m. Para algunas condiciones del terreno es necesario rodear las ruedas con cadenas. Como el perímetro de la rueda es 3π m y necesitamos no equivocarnos en la medida de la cadena en más de 1 cm, ¿con qué precisión necesitamos considerar a π ?

2. Estima el resultado de las siguientes operaciones, de modo de cometer un error menor que $\frac{1}{2}$.

a) $3{,}14 \cdot 4{,}8$ **b)** $5{,}67 + 3{,}1234$ **c)** $\pi + \sqrt{2}$

7 Regularidades numéricas

Consideremos las siguientes figuras:



Partiendo de un cuadrado, se construye el siguiente agregando 2 cuadrados en la base. La figura siguiente se construye tomando la anterior y agregando en la base una hilera de 3 cuadrados. Cada vez que está construida una escalera, la siguiente se construye agregando una hilera en la base con un cuadrado más que la última fila de la anterior.

¿Cuántos cuadrados se necesitan en cada figura?

Vamos paso a paso: Para el primero 1, para el segundo 3, para el tercero 6, para el cuarto es 10.

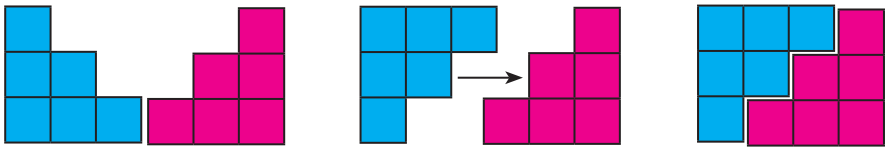
Sin embargo, hacer este cálculo no nos dice nada respecto de cómo se va formando esta secuencia de números, es decir, hacer el cálculo cada vez no nos llevará a saber, por ejemplo, cuantos cuadrados se necesitan para el caso n.

Se hace necesario reconocer una regularidad, es decir, una forma general de describir la cantidad de cuadrados necesarios.

Notemos que el segundo tiene 2 cuadrados más que el anterior, es decir, tiene $1+2$. El siguiente tiene 3 más que el anterior, es decir, tiene $1+2+3$. El que sigue tiene 4 más que el anterior, es decir, tiene $1+2+3+4$. En general, la figura del n-ésimo paso tiene:

$$1+2+3+4+5+6+7+...+n \quad \text{cuadrados}$$

Muy bien, pero saber esto no nos permite saber de manera eficaz cuantos cuadrados tiene la figura en el paso n. Notemos que si tenemos dos figuras idénticas del paso n y las acoplamos de una forma ingeniosa, podemos formar un rectángulo de lados n y $n+1$, por ejemplo, a continuación mostramos el caso $n=3$.



Como el rectángulo tiene $n\cdot(n+1)$ cuadrados, se tiene que dos veces la cantidad de cuadrados que se necesitan para la figura del paso n es igual a $n\cdot(n+1)$. Es decir, la cantidad de cuadrados necesarios para construir la figura n-ésima es la mitad de $n\cdot(n+1)$.

Pero como vimos antes, la cantidad de cuadrados es $1+2+3+4+\cdots+n$; juntando ambos resultados tenemos que el número de cuadrados necesarios para formar la figura del paso n es:

$$1+2+3+4+5+6+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Lo que hicimos en el estudio anterior fue calcular la cantidad de cuadrados de dos formas distintas y luego comparar los resultados. Esa idea es una estrategia muy utilizada en matemáticas para encontrar relaciones interesantes. En el desarrollo de esta parte de la Unidad la ocuparemos en varias ocasiones y tú le sacarás provecho cuando tengas que resolver los problemas.

Otra pregunta que nos podemos hacer respecto de las figuras que estamos estudiando es, ¿cuál es el perímetro de la figura del paso n?

Lo que haremos esta vez será usar otra estrategia, bastante útil: **conjeturar** la generalidad y luego que ya sospechamos el resultado, lo demostramos para asegurar que es cierta nuestra sospecha.

Construyamos una tabla donde, en una columna, colocaremos el número de la figura y en la otra, el perímetro de la figura para algunos valores de n.

Figura número n	Perímetro de la figura
$n=1$	4
$n=2$	8
$n=3$	12
$n=4$	16
$n=5$	20

CARL FRIEDRICH GAUSS
(1777-1855)

Matemático alemán.

Para muchos es el Matemático más importante de la historia. Siendo un niño encontró la fórmula que presentamos en esta hoja, cuando el profesor le pidió que sumara todos los números del 1 hasta el 100. Se cuenta que rápidamente Gauss mostró el resultado 5 050, usando la relación comentada.

actividades

1. Emplea la fórmula $1+2+3+4+5+\ldots+\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}+1)}{2}$ para encontrar la suma de los primeros 100 números pares.

2. Conjetura cuál es el valor de la suma de los primeros números impares. (Ayuda: Utiliza una tabla como la anterior).

Según se observa en la tabla 1.4, en estos casos, el valor que hay en la columna de la derecha es 4 veces el valor que hay en la de la izquierda, entonces, si se mantiene un patrón, nuestra conjetura es:

cuidado

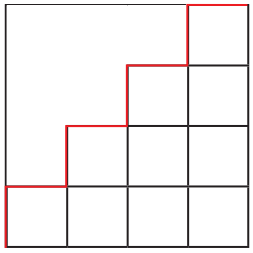
Es importante notar que cuando se tiene una secuencia finita de términos, existen infinitas maneras de continuar esa secuencia, de modo que no se puede asegurar cuál es el término siguiente si uno no conoce la regla de formación de la secuencia. Por ejemplo, si tenemos la secuencia 1,2,3,4 alguien podría decir que el siguiente es 5, pero eso no se puede saber. Por ejemplo, el que formó la secuencia estaba pensando en 1,2,3,4,1,2,34,1, 2,3,4,1,2,3,4 y repite el ciclo 1,2,3,4 o por ejemplo, puede indicar los pisos en que paró un ascensor: estaba en el 1 luego subió al 2, luego al 3, luego al 4, pero ¿quién puede decir donde parará después? Quizás volvió al 1 o subió directamente al 15, sin hacer paradas intermedias.

El perímetro de la figura n-ésima es $4n$

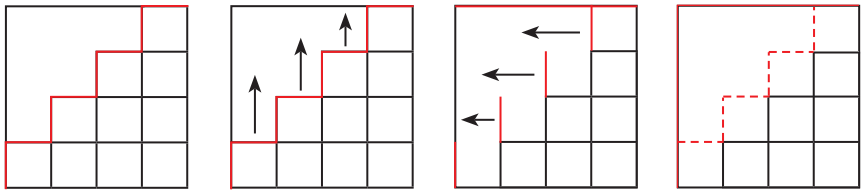
Pero sólo hemos visto 5 casos, lo cual no nos puede dar certeza de que esto ocurra siempre.

Para asegurarnos de que nuestra conjetura es cierta, debemos pensar en un caso n cualquiera, es decir, pensar en total generalidad.

Si pensamos en la figura del caso n, ésta la podemos incrustar en un cuadrado, copiando la idea del problema anterior. Es decir, la figura n la podemos inscribir en un cuadrado de lado n. Por ejemplo, mostramos el caso $n = 4$.



Notamos que hay dos lados de la figura que coinciden exactamente con dos lados del cuadrado. Falta medir los lados de la escalera que zigzaguean. Notamos que la parte zigzagueante (la que está pintada de rojo) tiene exactamente 4 lados verticales y 4 lados horizontales, que si los movemos los podemos hacer coincidir con los lados del cuadrado que no coinciden con la figura.



Así tenemos que el perímetro de la figura del paso n tiene el mismo perímetro que el cuadrado de lado n, pero sabemos que el perímetro del cuadrado de lado n es $4n$. Por lo tanto hemos demostrado que nuestra conjetura es cierta, es decir, efectivamente el perímetro de la figura del paso n es $4n$.

Consideremos la tabla siguiente que tiene los primeros doscientos números naturales pintados de azul y todos aquellos que son primos pintados de amarillo, salvo el 2 y el 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Si notamos bien, a uno de los lados de cada número primo distinto de 2 y de 3 hay un múltiplo de 6. Sin embargo, hay múltiplos de 6 que no tienen un número primo al lado, por ejemplo el 186. ¿Por qué ocurre esto? ¿Será siempre así? Es decir, ¿es cierto que al lado de un número primo distinto de 2 y de 3 siempre hay un múltiplo de 6?

Recordemos que un número primo positivo es un número distinto de 1 cuyos únicos divisores positivos son el 1 y el mismo. Por ejemplo, el 7 es primo, pero el 91 no lo es, pues el 13 es un divisor de 91.

Cualquier número par es divisible por 2 de modo que existe un único número primo que es par, el 2.

Como hemos visto antes, cuando dividimos un número natural por otro se obtiene un cuociente y un resto, que siempre es menor que el divisor. En particular, si dividimos cualquier número a por 6, resulta un cuociente q y un resto r. El resto r puede ser 0, 1, 2, 3, 4 y 5, y se cumple que $a = 6q + r$. Analizaremos cuáles son los posibles casos que permiten que a sea primo.

CASO 1

Si r =2 se tiene que:

$$a = 6q + 2$$

pero ese número es par, por lo tanto, no es primo, a menos que sea 2. Entonces, si el resto es 2, se tiene que a no es primo.

CASO 2

Si r =3 se tiene que:

$$a = 6q + 3$$

importante

Los números primos han sido un enigma desde la Antigüedad en la historia del hombre. Se sabe que son infinitos. También sabemos que entre un número y su doble siempre hay un número primo, pero también se sabe que hay intervalos tan largos cómo se quiera que no contienen ningún número primo. Hoy no se sabe como están distribuidos los números primos. Es un problema en matemática encontrar fórmulas que permitan encontrar números primos. Por ejemplo, no se sabe en qué caso el vecino de un múltiplo de 6 es primo o no.

recuerda

22 : 7 = 3
1

significa que

22 = 7 · 3 + 1

donde **1** es el resto y es menor que **7**.

En general, si dividimos **a : b**, cuando **b** no es cero, se obtiene un cuociente **q** y un resto **r** con **0 ≤ r < b**, para los cuales se cumple:

a = bq + r

nota

Si tomamos un número **n** entero positivo, denotamos por $\tau(\mathbf{n})$ al número de enteros positivos menores que **n** y que además son primos.
Por ejemplo:
$\tau(2)=0$,
$\tau(3)=1$,
$\tau(10)=4$, etc.

Hoy nadie puede describir cuánto vale $\tau(\mathbf{n})$ para un **n** genérico. Es un tema muy vivo en matemáticas, muchos matemáticos hoy trabajan en este problema.

pero ese número es divisible por 3, por lo tanto no es primo, a menos que sea 3. Entonces, si el resto es 3, se tiene que a no es primo.

CASO 3

Si $r = 4$ se tiene que:

$$a = 6q + 4$$

pero ese número es divisible por 2 por lo tanto, no es primo. Entonces, si el $r = 4$, se tiene que a no es primo.

Entonces, los únicos posibles casos que permiten que a sea primo son los números de la forma $6q + 1$ o los de la forma $6q + 5$. Como $6q + 1$ es el sucesor de un múltiplo de 6 y

$$6q + 5 = 6q + 6 - 1 = 6(q + 1) - 1$$

es el antecesor de un múltiplo de 6, en ambos casos, se tiene que si a es primo, entonces está al lado de un múltiplo de 6.

La estrategia que usamos esta vez fue analizar exhaustivamente todos los casos, una estrategia válida y muy empleada en diversos problemas en matemáticas.

actividades

Consideremos ahora el tablero de al lado. Para pintarlo, lo que hicimos fue pararnos en el 3 y luego fuimos sumando 3 cada vez y pintando de amarillo los números que resultaban de esta operación.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1. Si eliges cualquier número de la primera fila, luego vas sumando siempre un mismo número y pintas de algún color los números que vayan resultando, en algunos casos resultan diagonales y en otras, franjas verticales. ¿En cuáles casos resultan diagonales y en cuáles franjas verticales?

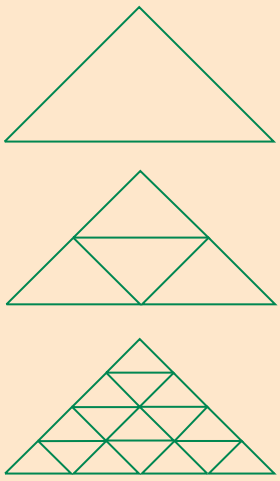
2. ¿Que relación tienen los números que forman franjas verticales con el tamaño del tablero?

3. Si se tiene un tablero de 12×12, y nos paramos en cualquier número de la primera franja, ¿cuáles son los valores constantes que si se suman permite que se formen diagonales?¿Cuáles números producen franjas verticales?

aplicando lo aprendido

1 En un criadero de conejos una hembra pare 5 crías cada tres meses, o sea que en el segundo periodo tendrá 5 crías más y así continuará cada periodo con 5 crías más que el anterior. ¿Cuántas crías tendrá esta hembra, en condiciones normales, en su quinto periodo? Generaliza y escribe la cantidad de crías para su **n**-ésimo periodo.

2 A continuación se muestran unos triángulos equiláteros a los que en cada etapa se les trazan sus medianas, subdividiendo cada triángulo en triángulos más pequeños. Construye el diagrama que corresponde a la cuarta etapa. ¿Cuántos triángulos resultan en la quinta y sexta etapa?¿Cuántos triángulos pequeños hay en la **n**-ésima etapa?

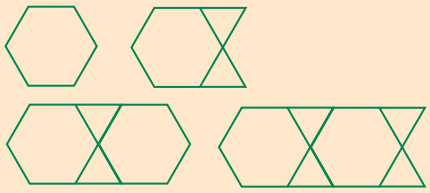


3* Observa las pirámides. La de la derecha corresponde a los cuadrados de los valores de la izquierda. ¿Cuál sería el valor de $(99\ 999)^2$ y $(999\ 999)^2$? Completa las filas de la pirámide. ¿Por qué se satisface esta regularidad? Argumenta.

9	81
99	9801
999	998001
9999	99980001
99999	
999999	
9999999	
99999999	
999999999	
9999999999	

4 La red está formada por segmentos que van aumentando a medida que la altura crece a 1 cm en cada periodo. ¿Cuántos segmentos se necesitan para construir una red de 4 cm y 10 cm de altura? ¿Es posible construir una red con 56 segmentos? ¿Qué altura tendría? ¿Y con 66 segmentos? Explica tus respuestas.

5 Un maestro fue contratado para construir la defensa de una casa. Como muestra la figura de abajo, el primer diagrama consta de un hexágono regular al que se le agregan 2 triángulos equiláteros, obteniéndose el segundo diagrama. Luego a este diagrama se le agrega un hexágono regular obteniéndose el tercer diagrama. De esta forma, para obtener el diagrama posterior, al diagrama anterior se le agregan de manera alternada un hexágono regular y 2 triángulos equiláteros. Ayúdale al maestro para que pueda continuar la secuencia determinando la cantidad de segmentos necesarios para construir la quinta, décima, decimoquinta y vigésima figura. Establece una fórmula que permita encontrar la cantidad de segmentos para la figura **n**.



6 ¿Cuál es la suma de los múltiplos de 3 hasta 300? Ayúdate con la fórmula demostrada de la suma de los primeros **n** términos.

7
$$1+2=2^2-1$$
$$1+2+2^2=2^3-1$$
$$1+2+2^2+2^3=2^4-1$$
$$1+2+2^2+2^3+2^4=2^5-1$$

Conjetura cuál es el valor de:
$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8$$
¿Cómo crees que será el caso general?

actividades finales

1 Compara las siguientes potencias:

a) 5^{-1} y 4^{-1} **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$ y $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **c)** 1^{-3} y 1^{-7}

2 El animal volador más pequeño es la avispa parásita que mide 0,000139 m de largo. El macho de esta avispa es ciego y no vuela. Escribe su tamaño en centímetros empleando notación científica.

3 Entre los años 1940 y 1996, EE.UU ha gastado en armamento nuclear una suma cercana a los 5,8 millones de dólares. Transforma a pesos chilenos esta cifra y escríbela utilizando notación científica.

4 El virus del VIH es una partícula esférica con un diámetro menor a 0,000000110 m. Escribe esta medida en milímetros utilizando notación científica.

5 Durante el año 2002 en nuestro país asistieron 13 991 351 personas al cine. Expresa esta cantidad en notación científica.

6 Resuelve las siguientes operaciones y expresa el resultado en notación científica:

a) $(2\cdot 10^{10})(6\cdot 10^{7})(4\cdot 10^{-4})$ **c)** $\frac{25\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}05\cdot 10^{5}}{0{,}625\cdot 10^{7}}$

b) $52\cdot 10^{3}+21\cdot 10^{2}$ **d)** $\frac{4\,000\cdot 0{,}016}{0{,}000064\cdot 0{,}008}$

7 Resuelve:

a) $\frac{-3\frac{25}{64}+3\frac{5}{12}}{0{,}041\overline{6}}$ **b)** $\frac{11+2\frac{3}{4}}{2\frac{3}{4}:\frac{1}{8}}$ **c)** $\sqrt{\left(\frac{64}{18}+2\right)\cdot\frac{1}{2}}$ **d)** $\frac{\frac{5}{8}-\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}-2\frac{1}{4}}$

8 Ordena los siguientes números reales de manera decreciente:

$-\sqrt{1{,}2}$; $-1{,}2$; $-\frac{1}{2}$; $0{,}1\overline{2}$; $2\sqrt{2}$

9 Estima entre qué par de racionales, hasta con un decimal, se encuentran las siguientes raíces:

a) $-\sqrt{27}$ **b)** $\sqrt{10}$ **c)** $\sqrt{82}$

10 Retomemos el problema de la amigdalitis de Antonia. Sabemos que las unidades del antibiótico que le inyectaron mata $\frac{4}{5}$ de las bacterias que están en su cuerpo cada día, o sea que al segundo día le quedan $\frac{1}{5}$ de las bacterias que tenía inicialmente. Realiza en tu cuaderno una tabla que indique el día y fracción de bacterias que mueren por día. ¿Qué fracción de ellas muere al tercer día, al cuarto y al octavo día? ¿Es posible que el antibiótico logre en un determinado número de días matar todas las bacterias? Fundamenta tu respuesta.

11 Se cuenta que el siguiente problema fue enviado por Wertheimer a Albert Einstein: "Una ameba se reproduce por simple bipartición, cada división tarda 3 minutos en completarse. Cuando se coloca una ameba en un recipiente de cristal con un fluido de nutrientes, el recipiente se llena totalmente de amebas en una hora. ¿Cuánto tardaría en llenarse el recipiente si colocamos en el recipiente dos amebas en vez de una?"

12 Un biólogo toma una muestra de cierta colonia de bacterias para analizarlas; después de una ardua investigación descubre que éstas se duplican cada una hora. Si la muestra estaba conformada por 10^8 bacterias al mediodía:

- ¿Cuántas bacterias habrá a las 3 P.M. y a las 6 P.M.?
- ¿Cuántas bacterias habrá a las 12 P.M. del día siguiente?

13 El francés Leiton-Marliac obtuvo un excelente híbrido de planta acuática que hoy se extiende en todo el mundo: la ***Nynphaea*** se cultiva fácilmente utilizando sólo agua y buena tierra. En cortos periodos logra desarrollar gran cantidad de hojas grandes, protegiendo el agua de la luz solar, manteniéndola limpia, oxigenada y libre de algas, además de proteger la fauna piscícola. Hay ciertos tipos de plantas acuáticas híbridas que tienen la capacidad de reproducirse duplicando la superficie que cubren, día a día. Si tenemos un terreno adecuado y se cultiva esta planta en una hectárea, ¿qué superficie tendrá cubierta después de una semana?, ¿y de un mes?

14 Un material radiactivo es aquél cuyos átomos se desintegran espontáneamente. Por lo tanto, con el transcurso del tiempo la cantidad de material disminuye. En este contexto, se llama vida media de un material radiactivo al tiempo que tarda en reducirse a la mitad. Por ejemplo, el estroncio 90 es un isótopo radiactivo peligroso. Debido a su semejanza con el calcio, es fácilmente absorbido por los huesos del cuerpo humano. La vida media del estroncio 90 es de 28 años. Si una persona estuvo expuesta a una explosión nuclear y absorbió 100 gramos de estroncio 90:

- ¿Cuántos gramos de estroncio 90 le quedarán en el cuerpo de la persona al cabo de 56 años?
- ¿Cuántos años pasarán para que todavía quede menos de la décima parte del estroncio 90 inicial?

15 A mediados del siglo XVII el matemático inglés John Wallis demostró que el siguiente producto infinito de racionales es igual a $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

En este producto sus términos se escriben de la siguiente forma:
Los numeradores de las fracciones son números pares, que cambian cada dos fracciones de manera creciente, y los denominadores son números impares, los que cambian también cada dos fracciones a excepción del 1 que solo aparece en la primera fracción.

a) ¿Cuáles son los siguientes cinco términos de este producto infinito?

b) Completa en tu cuaderno la siguiente tabla:

Término	Producto de números racionales	Notación decimal
1	$\frac{2}{1}$	
2	$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}$	
3	$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}$	
4	$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}$	
5	$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}$	
6	$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}$	
7	$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}$	

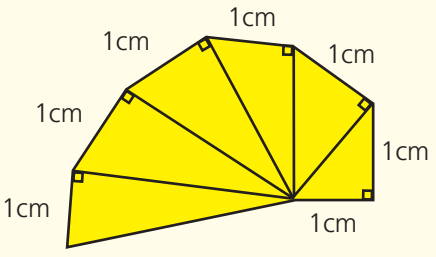
c) ¿Qué decimal de la tabla anterior aproxima de mejor forma $\frac{\pi}{2}$ tomando a π con sus primeros 8 decimales?

16 El átomo de hidrógeno es el más ligero ya que tiene una masa de $17\cdot10^{-27}$ g, ¿cuántos de estos átomos hay en 1 kg de hidrógeno?

17 La distancia del Sol al centro de la galaxia es de 27 000 años luz. Sabiendo que la velocidad de la luz es 300 000 km/s, ¿a cuántos kilómetros de distancia, aproximadamente, está el Sol del centro de nuestra galaxia?

18 La distancia de la Tierra a la Luna es de aproximadamente 353 680 km. Solo como un ejercicio de imaginación, para tener una idea de la velocidad de la luz, imagina, ¿cuánto demora una persona en llegar caminando a la Luna si lo hace a una velocidad de 1 m/s?

19* Observa el caracol compuesto por una seguidilla de triángulos rectángulos. Calcula, empezando por el triángulo menor, la hipotenusa de dichos triángulos.



20* Calcula el área del hexágono regular inscrito en la circunferencia de radio 1 cm y del hexágono regular circunscrito en la misma circunferencia. Explica cómo esto puede dar aproximaciones de π.

21* ¿Siempre el cuadrado de un número es mayor que dicho número? ¿Por qué?

22* Después de que Juan realizó una serie de cálculos, le apareció el siguiente resultado en la calculadora: 0,06358381502890173410404624277456 6.

- ¿Qué dirías tú acerca de este número? ¿Es racional o irracional?
- En ese momento se acerca el hermano de Juan y le pregunta en qué ocupa ese número irracional que aparece en la calculadora, pero Juan le comenta que es el racional $\frac{11}{173}$ con sólo 33 decimales. Con esto el hermano de Juan se percató que utilizando la calculadora es imposible verificar si un número es irracional o no, ya que el periodo del número, en caso que lo tenga, puede aparecer muy tarde y la calculadora no lo mostrará. Así, ambos se preguntaron: ¿después de cuántos decimales aparece el periodo de $\frac{11}{173}$? ¿Podrías ayudarlos a resolver su problema?

autoevaluación

1 [Timss 1999] ¿Cuál de los siguientes números está entre 0,07 y 0,08?

a) 0,0075
b) 0,00075
c) 0,075
d) 0,75

2 $\left(\frac{0,00012}{0,4}\right)^{-2} : \left(\frac{0,0027}{900}\right)^{-2} =$

a) 10^{-4}
b) 10^{-5}
c) 10^{-6}
d) $9 \cdot 10^{-10}$

3 La estación espacial Mir permaneció en órbita durante 15 años y en este tiempo dio aproximadamente 86 500 vueltas alrededor de la Tierra a una altura de 400 km. Si el largo de la órbita de la Mir es de aproximadamente 40 000 km, ¿cuál es aproximadamente la distancia en notación científica recorrida por la Mir mientras estuvo en órbita?

a) $346 \cdot 10^{7}$ km
b) $3,46 \cdot 10^{-9}$ km
c) $3,46 \cdot 10^{9}$ km
d) $0,346 \cdot 10^{10}$ km

4 Redondeado a la decena de kilogramo más próxima, el peso de un delfín es 170 kg. ¿Cuál de las opciones siguientes no corresponde al peso del delfín?

a) 166 kg
b) 169 kg
c) 173 kg
d) 176 kg

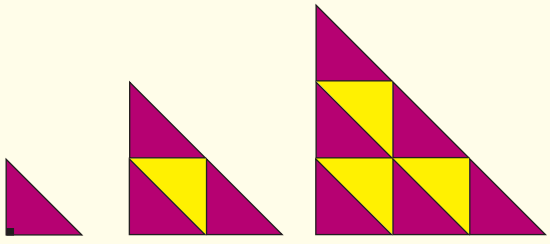
5 El orden decreciente de $-\sqrt{5}; -2; -2,\bar{2}; -\frac{1}{100}; -1,3 \cdot 10^{-2}$ es:

a) $-1,3 \cdot 10^{-2}; -\frac{1}{100}; -2; -2,\bar{2}; -\sqrt{5}$
b) $-\frac{1}{100}; -1,3 \cdot 10^{-2}; -2; -\sqrt{5}; -2,\bar{2}$
c) $-\frac{1}{100}; -1,3 \cdot 10^{-2}; -2; -2,\bar{2}; -\sqrt{5}$
d) $-\frac{1}{100}; -1,3 \cdot 10^{-2}; -\sqrt{5}; -2,\bar{2}; -2$

6 En agua salada el sonido recorre 14 000 cm/s. Si las ondas sonoras tardan 3,5 s en llegar del submarino al buzo y tarda 5 s en llegar del mismo submarino al barco, ¿cuál es la distancia entre el buzo y el barco si los tres están sobre una línea vertical?

a) 1 190 m
b) 4 900 m
c) 7 000 m
d) 11 900 m

7 Tienes una sucesión de triángulos rectángulos, los que en cada paso aumentan su altura y base en una unidad, y se subdividen en triángulos rectángulos pequeños e iguales. ¿En cuántos triángulos pequeños se subdivide la novena figura?



a) 82
b) 80
c) 91
d) 81

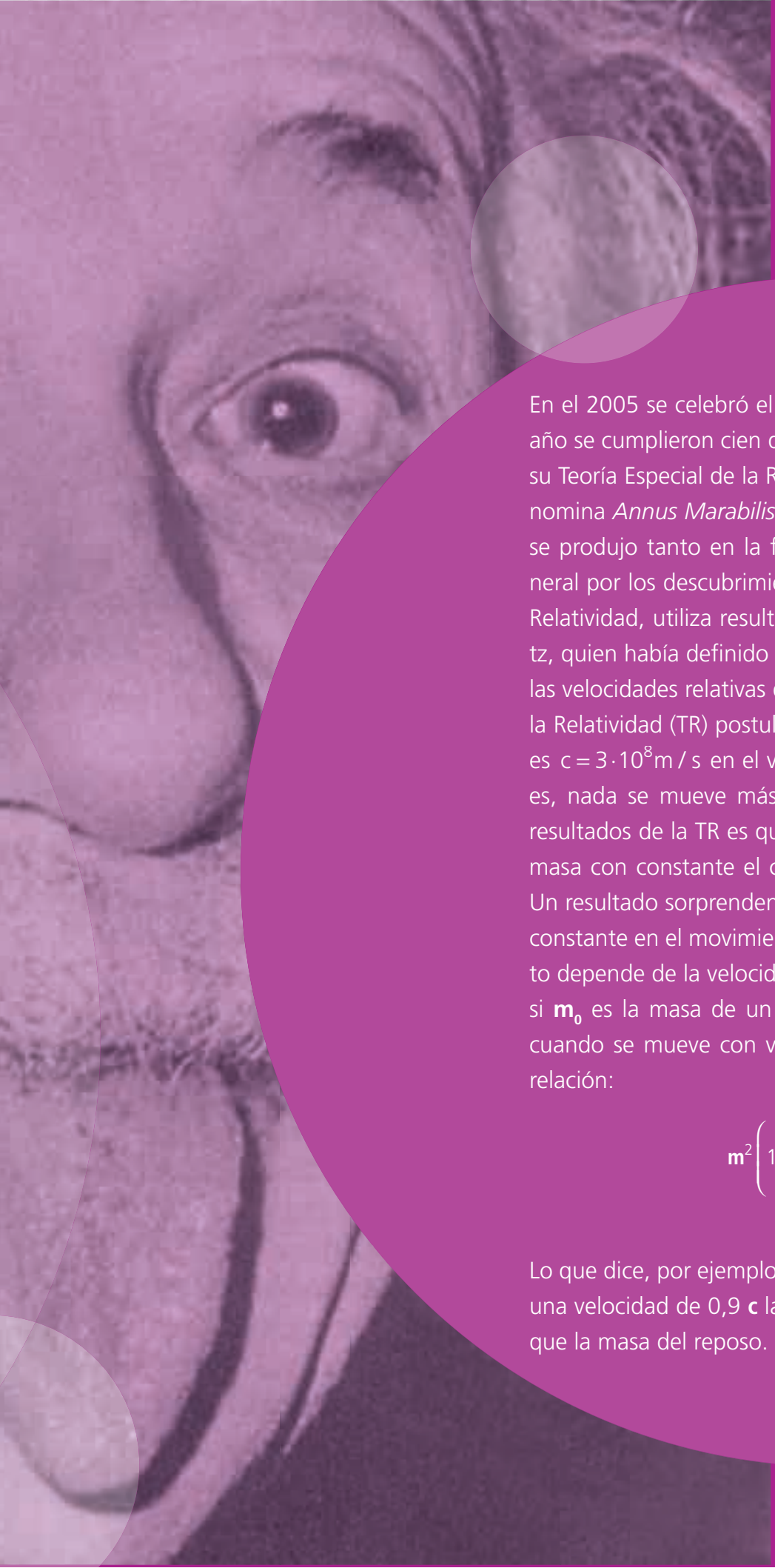
Álgebra

Al finalizar esta Unidad serás capaz de:

- Usar e interpretar convenciones algebraicas.
- Modelar situaciones o fenómeno mediante funciones lineales y afines.
- Representar situaciones que involucren cantidades variables.
- Resolver ecuaciones de primer grado con coeficientes numéricos y literales.
- Conjeturar y demostrar propiedades numéricas.

Temas que estudiaremos en esta Unidad:

- Términos semejantes.
- Factorización de polinomios.
- Productos notables.
- Función afín y función lineal.
- Ecuaciones de primer grado con coeficientes numéricos y literales.
- Lenguaje algrebraico básico.



Unidad 2

En el 2005 se celebró el año mundial de la Física. En ese año se cumplieron cien desde que Albert Einstein publicó su Teoría Especial de la Relatividad. Al año 1905 se le denomina *Annus Marabilis* debido a la gran revolución que se produjo tanto en la física como en la Ciencia en general por los descubrimientos de Einstein. La Teoría de la Relatividad, utiliza resultados anteriores, debido a Lorentz, quien había definido transformaciones que involucran las velocidades relativas de los observadores. La Teoría de la Relatividad (TR) postula que la velocidad de la luz (que es $c = 3 \cdot 10^8 m/s$ en el vacío) es la velocidad límite, esto es, nada se mueve más rápido que la luz. Otro de los resultados de la TR es que la energía es proporcional a la masa con constante el cuadrado de *c*, es decir, $E = mc^2$. Un resultado sorprendente en la TR es que la masa no es constante en el movimiento, es decir, la masa de un objeto depende de la velocidad con que se mueve, de hecho, si $\mathbf{m_0}$ es la masa de un objeto en reposo, y **m** la masa cuando se mueve con velocidad **v**, se tiene la siguiente relación:

$$\mathbf{m}^2\left(1-\left(\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}}\right)^2\right)=\mathbf{m_0}^2$$

Lo que dice, por ejemplo, que si una partícula se mueve a una velocidad de 0,9 **c** la masa aumenta a más del doble que la masa del reposo.

para recordar

1 Escribe como una sola potencia:

a) $\left(\frac{7}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{-5}$ **b)** $\frac{2^4 \cdot 2^3}{2^{10}}$ **c)** $\left(6^5 : 2^5\right)^{-2}$

2 Escribe a lo menos cinco múltiplos de:

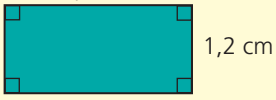
a) 4 **b)** 15 **c)** 7 **d)** 23

3 Cuáles son los divisores de:

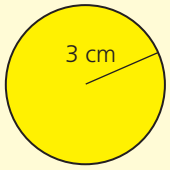
a) 36 **b)** 75 **c)** 120 **d)** 71

4 Calcula el área de las siguientes figuras:

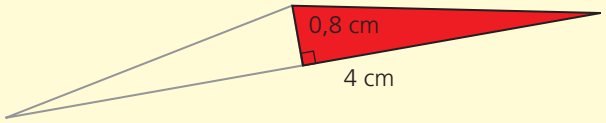
a)



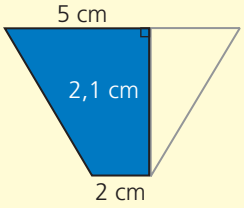
b)



c)



d)

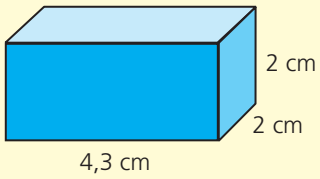


5 Encuentra el valor de la incógnita en las siguientes ecuaciones:

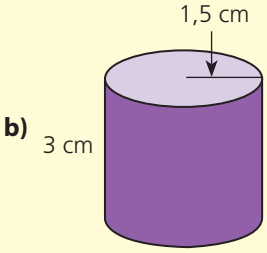
a) $2\mathbf{x} - 17 = 21$ **b)** $8\mathbf{x} - 3 = 5\mathbf{x} + 36$ **c)** $(\mathbf{x} + 4)5 = 100 + \mathbf{x}$ **d)** $\frac{2}{5}\mathbf{x} + \frac{1}{4} = -\frac{5}{3}$

6 Determina el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

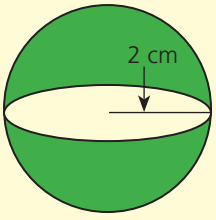
a)



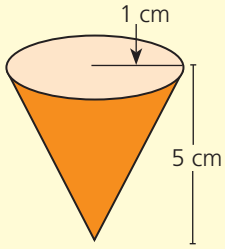
b)



c)

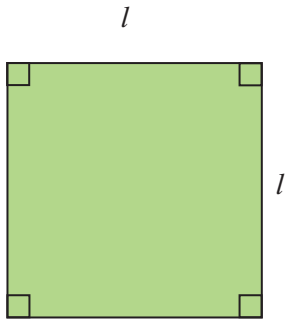


d)



1 Variables

En variadas ocasiones se pueden establecer relaciones entre medidas, independientemente del valor particular de los datos; por ejemplo, el perímetro de un cuadrado es cuatro veces la medida del lado, y esto es así para cualquiera que sea el valor del lado, así se tiene la relación siguiente:



$$\text{Perímetro} = 4 \times (\text{lado del cuadrado})$$

Por su parte, tenemos el área del cuadrado que se calcula multiplicando el lado del cuadrado por sí mismo, es decir,

$$\text{Área} = (\text{lado del cuadrado}) \times (\text{lado del cuadrado})$$

Desde la antigüedad se han utilizado símbolos para denotar las medidas *variables* y establecer fórmulas generales. Como los símbolos más utilizados son las letras se hace uso de ellas para denotar estas variables. Por ejemplo, si P es el perímetro del cuadrado y l es la medida de su lado, se tiene:

$$P = 4l$$

Recordemos que desde octavo básico denotamos la multiplicación escribiendo las letras y números, uno al lado del otro, es decir $4l$ es cuatro multiplicado por l.

Del mismo modo, si A denota el área del cuadrado de lado l, entonces la relación es:

$$A = l^2$$

actividades

Para calcular el valor mensual de la cuenta de electricidad, se miden los Kilowatts hora consumidos en el mes. El valor de un KWH es de $68, además se cobra un cargo fijo de $509, independiente del consumo. Supongamos que en una casa se consumieran 181 KWH en el mes de enero:

1. ¿Cuál será el valor de la cuenta?

2. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla que relaciona los KWH consumidos con el valor de la cuenta.

Consumo (KWH)	180	200	220	250	280	300	330	350	370
Valor de la cuenta ($)									

3. Nota que para cada valor del consumo C el valor de la cuenta es: **V** = 509 + 68**C** ¿Es consecuente esta fórmula con los datos encontrados en la tabla anterior?

4. Si el valor de una cuenta fue de $23 629 ¿Cuál es el valor de consumo sin considerar el cargo fijo?, ¿cuál fue el consumo?

Las cantidades variables son denotadas por letras, y éstas en cada caso particular, adquieren valores numéricos. Las relaciones que se expresan usando letras son llamadas **relaciones algebraicas** y cuando le damos valores numéricos a esas expresiones decimos que estamos **evaluando o valorando** las relaciones algebraicas.

Por ejemplo, la relación algebraica de la introducción de esta Unidad es:

$$m^2\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)=m_o^2$$

donde m_0 es la masa de un objeto en reposo, m es la masa del objeto cuando se mueve con velocidad v y c es la velocidad de la luz en el vacío $\left(3\cdot 10^8\,\frac{m}{s}\right)$

Si evaluamos la expresión anterior para $m_0=1\,\text{mg}$, $v=0,9\text{c}$, se tiene que:

$$m^2\left(1-(0,9)^2\right)=1\ \text{mg}^2$$

o lo que es lo mismo:

$$m^2\,(1-0,81)=1\ \ \text{mg}^2$$

$$0,19m^2=1\ \ \text{mg}^2$$

Como m^2 multiplicado por 0,19 resulta 1, se tiene que 1 dividido por 0,19 es m^2, es decir:

$$m^2=\frac{1}{0,19}\ \ \text{mg}^2\ =5,263\ \ \ \text{mg}^2$$

recordando la definición de raíces en la Unidad 1 se tiene que:

$$m=\sqrt{5,263}\ \ \text{mg}\ =2,294\ \text{mg}$$

es decir, la masa aumentó a más del doble.

actividades

1. La fórmula $\mathbf{v}=\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{t}}$ relaciona la velocidad media (**v**) con la distancia recorrida (**d**) en un tiempo (**t**). Evalúa esa expresión para **d** = 100 km y **t** = 20 min, ¿cuál es la velocidad media expresada en km/h?

2. La fórmula $\mathbf{h}=200-4,9\mathbf{t}^2$ relaciona la altura **h** (medido en metros) de una piedra que se lanza desde un puente de 200 m de altura en el instante **t** medido en segundos. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla que para cada tiempo entrega la altura de la piedra.

Tiempo (s)	0	0,5	1	2	2,8	3,3	4,51	5,8	6,39
Altura (m)									

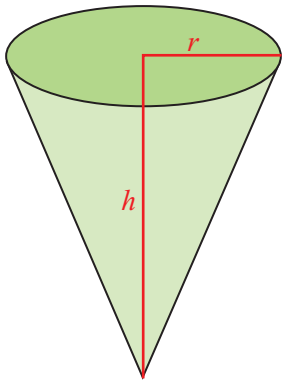
¿Cuánto se demora, aproximadamente, la piedra en caer al suelo?
¿Demora más en recorrer la primera o la segunda mitad?

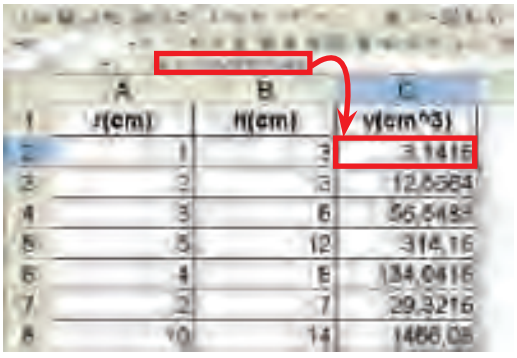
La velocidad de la piedra en cada instante **t** (medido en segundos) es $\mathbf{v}=\mathbf{9,8\ t}$ medido en metros por segundo. ¿Cuál es la velocidad con que la piedra cae al suelo, aproximadamente?

Existen varios paquetes computacionales, algunos gratuitos, que incluyen planillas de cálculo. Para utilizar esas planillas con eficiencia es necesario conocer algunos conceptos de relaciones algebraicas. A continuación te mostramos un ejemplo, donde evaluamos la expresión

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

que corresponde al volumen del cono de radio r y altura h.





recuerda

Usualmente, se anota la multiplicación escribiendo sólo los símbolos uno al lado del otro, es decir, **ab**. Esto es lo mismo que anotar **a · b**, que significa que **a** está multiplicado por **b**.

En la primera columna, (columna A), introducimos los valores de r en centímetros, en la segunda columna agregamos los valores de h en centímetros y en la columna C, ponemos una fórmula en el lugar dispuesto para ello. En la imagen está marcado con un recuadro rojo donde se lee:

$$(1/3) * A2\text{^}2 * B2 * 3{,}1416$$

donde * significa multiplicar y **^2** significa elevar al cuadrado, es decir, la expresión de arriba se lee: 1/3 multiplicado por el número que está en el lugar A2 al cuadrado, multiplicado por el número que hay en el lugar B2 y todo eso multiplicado por 3,1416, que es el valor por el cual hemos aproximado a π, el resultado de esto se guarda en el lugar C2. Si copias C2 en el resto de la columna C, la plantilla evaluará la fórmula en los valores de la fila correspondiente.

Supón que en una planilla de cálculo, en la primera columna ingresas tus asignaturas, en la segunda columna la nota de la primera prueba, en la tercera la nota de la segunda prueba y en la cuarta columna la nota de la tercera prueba. Entonces para calcular el promedio de esas notas $\frac{Nota1 + Nota2 + Nota3}{3}$, deberíamos escribir en el lugar de las fórmulas:

$$(B2 + C2 + D2)/3$$

actividades

1. En el ejemplo de las notas, ¿cuál sería la fórmula si la tercera prueba fuera coeficiente 2?
2. En el mismo contexto, ¿cuál sería la fórmula si la primera valiera la mitad de cada una de las otras dos notas?

En matemáticas las letras también sirven para denotar objetos matemáticos que no necesariamente son variables, de hecho, pueden ser números fijos, pero cualquiera dentro de un grupo, o pueden ser un único número. En ese caso, se utilizan para resolver ecuaciones o para representar generalidades

Por ejemplo, si m es la edad de mi madre y x es mi edad, es absolutamente cierto que:

$$m > x$$

Otro ejemplo es cuando no conocemos el valor de las letras pero no por ello podemos afirmar que sean variables. Por ejemplo, si en mi bolsillo tengo solamente monedas de \$50 y de \$10 y en total tengo \$230, denotamos por c la cantidad de monedas de \$50 que tengo y denotemos por d la cantidad de monedas de \$10; entonces, el dinero que tengo en el bolsillo es lo que tengo en monedas de \$10, más lo que tengo en monedas de \$50.

Como tengo d monedas de \$10, entonces tengo $10d$ pesos en monedas de \$10 y del mismo modo tengo $50\,c$ pesos en monedas de \$50. Es decir, el dinero que tengo en el bolsillo es $10d + 50c$, pero como sabemos que el dinero total es \$230, podemos asegurar que:

$$10d + 50c = 230$$

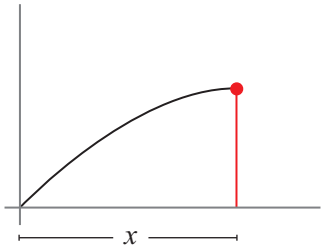
Ya sea para encontrar valores desconocidos de las letras o para establecer relaciones generales de medidas o datos expresados con letras o símbolos, es necesario conocer las reglas que rigen las operaciones con letras y los convenios que facilitan la universal comunicación de las matemáticas. En lo que sigue nos dedicaremos a conocer estas reglas.

Una expresión algebraica es una cadena de letras, números y símbolos unidos por sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias.

Por ejemplo:

$$\frac{4\pi}{3}r^3$$

es una expresión algebraica que denota **volumen de una esfera** de radio r.



La expresión algebraica $vmx - \frac{4,9}{v^2}x^2\left(1+m^2\right)$ representa la altura (medida en metros) de un proyectil lanzado con velocidad v desde el suelo. La letra m representa un número relacionado con la inclinación del disparo y x es la distancia que ha recorrido el proyectil en dirección horizontal.

actividades

•* ¿Qué significa que para algún valor de **x** la altura de un proyectil sea cero? ¿Qué pasa en la mitad de ese valor de x_0?

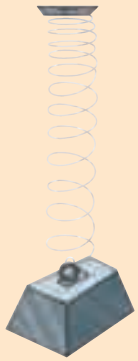
aplicando lo aprendido

1 La presión normal **P** sobre un cuerpo se define a través de la siguiente fórmula: $P = \frac{F}{A}$, en donde **F** es la fuerza que se ejerce por unidad de superficie **A**. La presión que ejerce la atmósfera a nivel del mar es de $1{,}013 \cdot 10^5 N/m^2$, entonces:

a) ¿Cuál es la presión que ejerce un elefante si su peso ejerce una fuerza de 40 000N y se mantiene en una pata sobre la superficie de una mesa de área 0,02 m^2 ?

b) ¿Qué presión ejerce una mujer de 500N de peso sobre un zapato de tacón aguja de 0,0041 m^2 de área?

2 La expresión algebraica $\mathbf{F} = \mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})$ corresponde a la Ley de Hooke, que representa la relación entre el estiramiento de un resorte efectuado por una masa y la fuerza **F** (medida en Newton= $N = kg\left[m/s^2\right]$ aplicada por éste. **k** es una constante propia de cada resorte, **x** la longitud final del resorte después de aplicarse la fuerza y $\mathbf{x_0}$ es la longitud inicial del resorte. En nuestro caso **k**=100 *N/m* y la longitud inicial $\mathbf{x_0} = 0{,}5$ m. ¿Qué fuerza debo aplicarle al resorte para que éste se estire 1,1 m? ¿Y para que se estire 2 m?



3 Para calcular la suma **S** de los ángulos interiores de un polígono de **n** lados tenemos la fórmula $S = 180^o(n-2)$.

a) Construye una tabla en la que aparezca la cantidad de lados de un polígono (desde **n**=3 hasta **n**=10) y la suma de sus ángulos interiores.

b) ¿Cuál es la medida de un ángulo interior de un pentágono regular?

c) ¿Cuál es la medida de un ángulo exterior de un heptágono regular?

4 La ley del flujo laminar descubierta por el médico francés Jean Louis Marie Poiseuille, en 1840, establece la velocidad a la que fluye la sangre a través de un vaso sanguíneo considerado como un tubo de largo **l** y radio **R**, viene dada por la fórmula $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P}}{4\eta\, l} \cdot \left(\mathbf{R}^2 - \mathbf{r}^2\right)$, donde **P** es la diferencia de presión en los extremos del vaso sanguíneo, η representa la viscosidad de la sangre y **r** la distancia que tiene el flujo desde el centro del vaso sanguíneo a la pared del mismo.

a) Para un vaso sanguíneo pequeño consideremos: η=0,027; **R** = 0,008 cm; **l** = 2 cm; **r** = 0,002 cm y **P** = 4 000 D/cm^2 (dinas = $\mathbf{D} = g\left[cm/s^2\right]$)

¿Cuál es la velocidad a la que fluye la sangre? (recuerda utilizar notación científica para facilitar tus cálculos).

b) ¿Para qué valores de **r** la velocidad es mayor? ¿Qué significa este resultado en nuestro problema?

c) ¿Para qué valores de **r** la velocidad es menor? ¿Qué significa este resultado en nuestro problema?

2 Términos semejantes

Una expresión algebraica en la que no hay sumas ni restas se llama **término algebraico**. Por ejemplo, la expresión del volumen del cono es un término algebraico, pero la expresión de la altura del proyectil no es un término algebraico, sino que es la resta de dos términos algebraicos. Los términos algebraicos son como las "moléculas de la expresión algebraica". Un término algebraico tiene una parte literal (las letras con sus potencias) y una parte numérica (el número).

recuerda

Volumen del cono:

$\frac{\pi r^2 h}{3}$

Altura de un proyectil:

$-4{,}9 \cdot t^2 + vt$

Como vimos en las páginas anteriores, un producto de variables se puede escribir de varias formas distintas, por ejemplo:

$$x^2y^3 = xyxy^2 = yx^2y^2 = yxyxy$$

pero no por eso diremos que sus partes literales son distintas, por el contrario, diremos que tienen la misma parte literal.

Cuando dos términos tienen la misma parte literal, esos términos se llaman **semejantes**.

Por ejemplo: $\frac{4\pi}{3}r^3$ y $\frac{32\pi}{3}r^3$ son semejantes,

en cambio $3xy^2z^3$ y $3x^2yz^3$ no son semejantes, pese a que tienen las mismas letras.

Cuando tenemos una expresión algebraica que contiene términos semejantes éstos se pueden **reducir**, es decir, sumar o restar términos semejantes según la operación que aparezca en la expresión. Además, la reducción es válida solo en el caso de existir términos semejantes

Si denotamos un objeto por una letra (x) y otro objeto con otra letra (y), entonces $x+y$ no es $2x$ ni tampoco $2y$, pues son objetos distintos, por lo tanto no se pueden sumar. Si x es manzana e y es perro, entonces $x+y$ no es dos manzanas ni tampoco dos perros, es por esto que solo se pueden reducir términos semejantes. Solo los términos semejantes denotan los mismos objetos.

Por ejemplo $3xy^2 - 31xy^2 = -28xy^2$

recuerda

Recuerda que cero multiplicado por cualquier número es 0, de modo que $0 \cdot \mathbf{x} = 0$.

Recordemos que la multiplicación es conmutativa, es decir $xy = yx$ para cualquiera que sean los valores de x e y. Por lo tanto, para reconocer términos semejantes, el orden en que aparezcan las letras no importa. Por ejemplo $3x^2z^3 = 3z^3x^2 = x^2 3z^3$, sin embargo, es costumbre (es un convenio) escribir los números al inicio y luego las letras en orden alfabético. De modo que el término $3x^2y$ es semejante con $4yx^2$ y por lo tanto, $3x^2y - 4yx^2 = -1x^2y$.

Observemos que 1 multiplicado por cualquier número es el mismo número, por lo tanto $1 \cdot x = x$. De modo que cuando vemos un término algebraico sin mostrar explícitamente su parte numérica es 1.

actividades

•* Reduce término semejantes: **a)** $5\mathbf{xy}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2\mathbf{x} + \frac{7}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{y}$ **b)** $-21\mathbf{ab}^2\mathbf{c} - 7\mathbf{abc} + \frac{3}{5}\mathbf{acb}^2$

aplicando lo aprendido

1 Reduce términos semejantes en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a - 2a + 9a$

b) $m^2 - 2m^2 - 7m^2$

c) $6x^2y^2 - 12x^2y^2 + x^2y^2$

d) $\frac{a^2b}{5} - \frac{2ab^2}{3} + \frac{5a^2b}{2} + \frac{3ab^2}{4}$

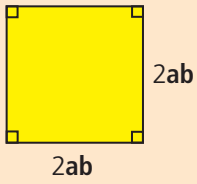
e) $-3mn - \frac{1}{6}mn^2 + \frac{4}{7}mn + 5n^2m$

f) $2p + 0,75q - 3,8pq - 6,4p + 5,05q$

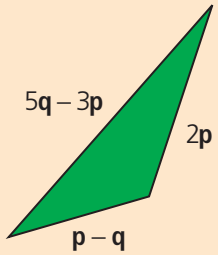
g) $a^2 + b^2 - 2,7b^2 - 8,09a^2 + 0,005b^2 + 4a^2$

2 Para las siguientes figuras escribe una expresión algebraica que represente su perímetro:

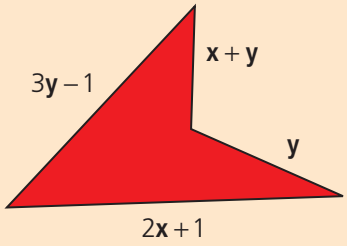
a)



b)



c)



3* Los punteros del reloj forman un ángulo recto a las 3 de la tarde. ¿Qué ángulo forman después de cada minuto?

Respondamos esto por pasos:

a) Notemos primero que por cada minuto el minutero avanza una rayita pequeña. Es decir, por cada minuto avanza la sesentava parte de un ángulo completo. O lo que es lo mismo, cada 5 minutos recorre la 12-ava parte de un ángulo de 360^o.

- ¿Cuánto mide el ángulo que el minutero logra en un minuto?
- ¿Cuánto avanza el minutero en **t** minutos?

b) El horario avanza 5 rayitas pequeñas en una hora, es decir, en 60 minutos recorre la duodécima parte del ángulo completo, es decir, en 60 minutos recorre 30^o.

- ¿Cuánto avanza el horario en 1 minuto?
- ¿Cuánto avanza el horario en **t** minutos?

c) Si el ángulo al principio era 90^o. Entonces, después de **t** minutos habrá los 90^o del principio, más lo que avanzó el horario y menos lo que avanzó el minutero. Escribe esto empleando el álgebra, reduce términos semejantes y describe el ángulo usando solo una vez **t**.

3 Potencias en álgebra

En la Unidad 1 vimos algunas propiedades de las potencias. Éstas fueron:

Si a > 0 y $n,m \in \mathbb{Z}$ se cumplen:

$$a^0 = 1 \qquad a^m a^n = a^{m+n} \qquad \left(a^n\right)^m = a^{nm} = \left(a^m\right)^n \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

recuerda

Recuerda que $\mathbf{a^n}$ quiere decir multiplicar **n** veces **a**, cuando **n** es positivo y significa multiplicar -**n** veces $\frac{1}{\mathbf{a}}$ cuando **n** es negativo.

Pensemos ahora en dos números *a* y *b* y estudiemos las potencias de ambos. Consideremos a^n y b^n, números elevados a la misma potencia, ¿qué pasa si multiplicamos esos números? Revisemos primero el caso *n* y *m* positivos.

Ya que: $a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a + \ldots + a}^{n \text{ veces}}$ y $b^n = \overbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}^{n \text{ veces}}$

Se tiene que: $a^n b^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}} \overbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}^{n \text{ veces}}$

Como la multiplicación es **asociativa**, podemos ordenar la multiplicación anterior como queramos, y la forma que escogeremos será escribir una *b* después de cada *a*:

$$a^n b^n = \overbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}^{n \text{ veces}}$$

es decir, se multiplica *n* veces por sí mismo el número *ab*, por lo que se puede concluir que:

$$a^n b^n = (ab)^n$$

Es un ejercicio para ti verificar que la igualdad anterior también es cierta si *n* es negativo o cero, es decir, en general se tiene que:

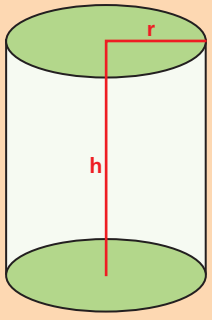
Si *n* es entero, $a > 0$ y $b > 0$ se cumple que $a^n b^n = (ab)^n$

El paréntesis en $(ab)^n$ significa que la potencia es de todo el producto *ab*, en cambio ab^n significará que sólo *b* está elevado a la potencia *n*.

actividades

1. El volumen de un cubo es $\mathbf{a}^3$, donde **a** denota lo que mide su arista. ¿Cuántas veces más grande es el volumen de un cubo de arista 2**a** que el volumen de un cubo de arista **a**?

2. El volumen de un cilindro de radio **r** y altura **h** es $\pi\mathbf{r}^2\mathbf{h}$, ¿cuántas veces más pequeño es el volumen de un cilindro que tiene la misma altura que otro pero la mitad del radio?



Como la multiplicación es asociativa y también **conmutativa**, podemos agrupar los factores como queramos para multiplicarlos, por ejemplo:

$$xyx^2 = x\left(yx^2\right) = x\left(x^2y\right) = \left(xx^2\right)y = x^3y$$

Es decir, si en un término algebraico aparecen varias letras (algunas de ellas repetidas) las podemos agrupar todas y luego aplicar la propiedad $x^{n+m} = x^n x^m$ y dejar cada variable elevada a alguna potencia sólo una vez.

Por ejemplo: $x^2y^3xyy^3x^4 = x^2xx^4y^3yy^3 = x^7y^7$

De nuevo, por la asociatividad y conmutatividad de la multiplicación, podemos juntar la parte literal de cada término y multiplicarlos entre sí, para tener una sola parte literal en el producto de dos términos, por ejemplo:

$$\left(14x^2y\right)\left(\frac{1}{3}xy^4\right) = \left(14\cdot\frac{1}{3}\right)x^2xyy^4 = \frac{14}{3}x^3y^5$$

Hemos visto que $a^nb^n = (ab)^n$, estudiemos ahora el cuociente de dos potencias. Consideremos a y b dos números positivos y n un número entero. Pensemos, para empezar, en el caso en que $n > 0$ entonces:

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ veces}}} \qquad \frac{a^n}{b^n} = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n \text{ veces}}$$

es decir, la multiplicación de $\frac{a}{b}$ por sí misma n veces, pero es la definición de la n-ésima potencia, por lo tanto

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Verificar que la anterior es una igualdad cuando n es negativo o cero, es un ejercicio para ti.

actividades

1. Escribe el producto de los siguientes términos algebraicos, como un término sin repeticiones de letras:

a) $\left(\frac{-2}{3}x^3yz^2\right)\left(\frac{6}{8}y^2xz^5\right)$ **b)** $\left(\frac{-5}{4}abc^3\right)\left(32y^2ab^5\right)$ **c)** $\left(\frac{5}{3}a\right)\left(81a^3f\right)$

2. ¿Es cierto que $\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot(ab)^m = a^{n+m}b^{m-n}$?

3. ¿Qué fracción del volumen de la esfera de radio **R** es el volumen del cilindro de radio **R** y altura la misma que el radio?

4. ¿Es cierto que $\frac{a^n}{b^{-n}} = (ab)^n$?

Recordemos que la multiplicación de fracciones es:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

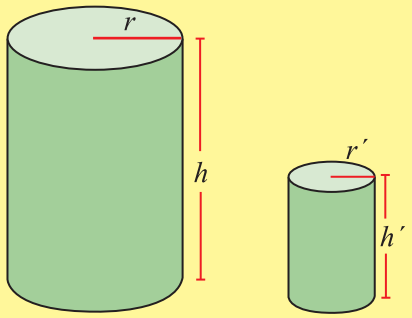
y también que

$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$$

Estas dos propiedades permiten escribir el cuociente de dos términos algebraicos como uno solo, por ejemplo:

$$\frac{10x^2yz^6}{5xy^2z^4}=\frac{10}{5}\cdot\frac{x^2}{x}\cdot\frac{y}{y^2}\cdot\frac{z^6}{z^4}=2xy^{-1}z^2$$

Consideremos dos cilindros donde las dimensiones de uno son la mitad de las del otro.



En la figura $h'=\frac{h}{2}$ y $r'=\frac{r}{2}$, ¿cuántas veces cabe el volumen del cilindro pequeño en el grande?

Como el volumen del cilindro más pequeño es:

$$V'=\pi\cdot r'^2\,h'=\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2\cdot\frac{h}{2}=\pi\cdot\frac{r^2}{2^2}\cdot\frac{h}{2}=\pi\frac{r^2h}{8}=\frac{V}{8}$$

es decir, el volumen del cilindro chico es 8 veces más pequeño que el del cilindro mayor.

actividades

1. Si las dimensiones de un cilindro son tres veces más pequeñas que las de otro, ¿cuántas veces menor es el volumen del cilindro chico en comparación con el volumen del cilindro grande?

2.* Si **x**, **y** no son cero, ¿es cierto que $\mathbf{x^2y^3y^{-1}}$ siempre es un número positivo? (Ayuda: el cuadrado de un número real nunca es negativo)

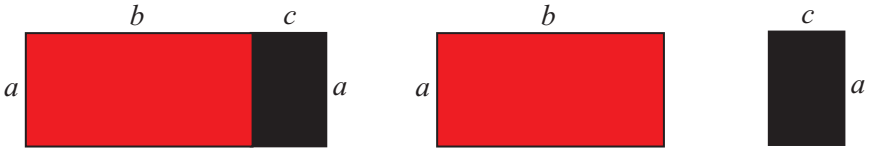
Ya hemos aplicado la propiedad asociativa y conmutativa en la reducción de términos semejantes. Existe otra propiedad importante, la **distributiva**, que nos ayudará a comunicarnos mejor utilizando el álgebra.

La propiedad distributiva dice que si multiplicamos un número por la suma de dos términos es lo mismo que multiplicar el número por cada término y sumar los resultados, es decir, si multiplicamos a por $b+c$.

El resultado es el mismo que $ab+ac$, es decir:

Propiedad distributiva: $a(b+c) = ab + ac$

Se puede ver geométricamente así:



A la izquierda vemos un rectángulo de lados a y $b+c$ que, como sabemos, tiene área $a(b+c)$, por otra parte, el área del rectángulo grande es la suma del área de los dos rectángulos pequeños: el rojo y el negro. El rojo tiene área ab y el negro ac, por lo tanto, se verifica geométricamente que:

$$a(b+c) = ab + ac$$

Un caso particularmente interesante es cuando $a = -1$ en ese caso resulta:

$$-1(b+c) = -1b + -1c$$

pero habíamos convenido que $-1a = -a$ por lo tanto:

$$-(b+c) = -b - c$$

Por ejemplo:

$$2xy - (xy - z) = 2xy - xy - (-z) = xy + xy - xy + z = xy + z$$

recuerda

La multiplicación no la anotamos, de modo que cuando estén dos símbolos, uno al lado del otro, significa multiplicación. En particular **a**(**a** + **b**) significa **a** · (**a** + **b**). Si el paréntesis no estuviese, **ab** + **c**, significa que **a** solo multiplica a **b**.

recuerda

−**a** denota el opuesto de **a**, es decir
a + −**a** = 0 = −**a** + **a**.

Por ejemplo, el opuesto (inverso aditivo) de −1 es −(−1), pero −(−1)=(−1)(−1)=1, se tiene que −(−1)=1. En general −(−**x**)=**x**. En particular, si **a** = −1 se tiene que −**a** = 1. Por lo tanto, **no** es cierto que −**a** es un número negativo en general, el signo de −**a** depende del signo de **a**.

actividades

1. Reduce términos semejantes:

a) $\frac{-2}{3}\left(\mathbf{xy}^2 - \mathbf{xz}\right) - \left(-\mathbf{xy}^2 - 2\mathbf{xz}\right)$

b) $-\left(\mathbf{ad} + \mathbf{bc}\right) + 2\mathbf{ad} - \mathbf{bc}^2$

c) $-\left(2\mathbf{x} - \left[3\mathbf{xy} - 3\mathbf{yz}\right]\right) + \mathbf{x} - \mathbf{yz}$

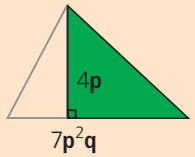
d) $\frac{1}{2}\left(\mathbf{fg} - \mathbf{gf}^2\right) - \left(\mathbf{fg}^2 - \mathbf{fg}\right)$

2. Supón que en la recta numérica **a** está a la izquierda de cero, ¿dónde está −**a**? ¿Es positivo o negativo?

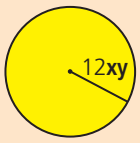
aplicando lo aprendido

1 Calcula el área de las siguientes figuras de acuerdo a los datos entregados:

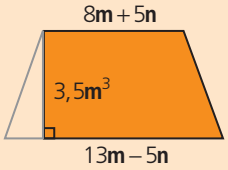
a)



b)



c)



2 Escribe el producto de los siguientes términos algebraicos como un término, sin que haya letras repetidas:

a) $5a^2 \cdot 2b^3a^4$

b) $(5a)^2 \cdot (2b)^3\, a^4$

c) $14yx^3 \cdot \dfrac{xy^4}{2}$

d) $(14yx)^3 \cdot \dfrac{(xy)^4}{2}$

3 Verifica la igualdad en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^{m+4} : a^{-m-5} = a^{m+4} \cdot a^{m+5}$

b) $3^{n-4} \cdot 3^{6-n} = 9$

c) $\dfrac{5^{n-m} \cdot 5^{2m}}{5^n} = 5^m$

d) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{5-n} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-3}$

4 Si el volumen de un cubo es 13 824 cm^3, ¿cuál es el volumen de otro cubo cuya arista es el doble de la del cubo anterior? Resuelve sin calcular el valor de la arista.

5 Escribe el producto de los siguientes términos algebráicos, como un término sin que haya letras repetidas.

a) $\dfrac{3}{4}x^4y^5 \cdot \dfrac{z}{9x^{-3}y}$

b) $18a^2b^3 \cdot \dfrac{1}{4}abc$

c) $\left(\dfrac{m^2n}{2}\right)^2 \cdot \left(2m^{-2}n^{-1}\right)^2$

6 Escribe el cuociente de los siguientes términos algebraicos como un término, sin que haya letras repetidas:

a) $\dfrac{36p^3q^4z}{2pq^7z^2}$ **b)** $\dfrac{15a^{-4}bc^2}{18ab^{-2}c^3}$

c) $\dfrac{10ab^{-2}x^{-4}}{25a^{-3}b^2c}$

7 Distribuye y luego reduce términos semejantes:

a) $x-(x-y)$

b) $a+b-\dfrac{1}{2}\cdot(-2a+3)$

c) $-2(4x+3y)-(8y-10x)$

d) $a^2-(-b^2+2a^2)-3(a^2-b^2)$

e) $3x-\dfrac{x}{3}+y-\left(2x+\dfrac{y}{2}\right)$

f) $a+\left[(-2a+b)-(-a+b-c)+a\right]$

g) $\dfrac{x^2y}{2}-\dfrac{xy}{4}-\left(\dfrac{3x^2y}{5}+xy\right)-\dfrac{4xy}{7}$

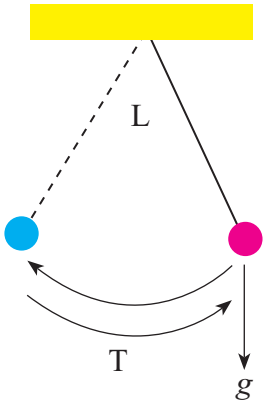
8 Si el cuociente de dos números es 11, ¿es posible calcular el cuociente de sus cuadrados sin conocer los números?

4 Igualdades y ecuaciones

En ciencias es muy importante conocer igualdades de expresiones algebraicas, ya hemos visto varias, por ejemplo:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$$

es una igualdad entre el periodo T de un péndulo con el largo de la cuerda L que lo sostiene y la aceleración de gravedad *g*.



Podría ocurrir que sea fácil medir el periodo de oscilación (el tiempo que toma en volver a su posición inicial), pero no tener acceso al péndulo, de modo que no se pueda medir directamente el largo de la cuerda. ¿Cómo hacer para conocer el largo de la cuerda?

Lo que debiéramos hacer sería obtener una relación, a partir de la anterior, que presente a L sola, en un lado de la igualdad y al otro todos los demás términos. Para ello necesitamos saber qué operaciones podemos realizar en una igualdad, para que ésta siga siendo cierta.

Podemos pensar una igualdad como si fuera un espejo: que corresponde al signo igual y ambos lados de la igualdad son el objeto real y su reflejo.

Si uno está frente a un espejo y se pone un sombrero, obviamente en la imagen reflejada apareceremos con un sombrero, pues si no, no seríamos iguales a la imagen reflejada. Si se nos agrega un hermano al lado nuestro, en la imagen aparecerá nuestro hermano. Con las igualdades algebraicas pasa lo mismo, si hacemos una cosa a un lado de la igualdad debemos hacer lo mismo al otro lado; por ejemplo, si a un lado multiplicamos por 2, al otro lado debemos multiplicar por 2 para mantener la igualdad, si a un lado restamos *a*, al otro lado también debemos restar *a*. En este sentido es correcto multiplicar en ambos lados por cero, pero la ecuación que resulta no es equivalente a la primera, pues se pierde toda la información.

Por ejemplo, en la igualdad $T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$ podemos sumar 20 a ambos lados y resulta:

$$T^2 + 20 = 4\pi^2 \frac{L}{g} + 20$$

lo que es cierto, pero puede que no sirva para nada.

Tomemos la igualdad inicial $T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$ y multipliquemos por *g*, resulta:

$gT^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g} g = 4\pi^2 L$, ahora multipliquemos por $\frac{1}{4\pi^2}$

$$\frac{gT^2}{4\pi^2} = 4\pi^2 L \cdot \frac{1}{4\pi^2} = \frac{4\pi^2}{4\pi^2} L = 1L = L$$

Es decir:

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

que es exactamente lo que pretendíamos: lograr dejar la L sola a un lado de la igualdad y al otro los demás términos. Si, por ejemplo, el periodo de oscilación es 2,5 s y aproximamos la aceleración de gravedad por $9,8 m/s^2$ y π por 3,1416, nos queda que el largo de la cuerda es:

$$L = \frac{9,8 \cdot (2,5)^2}{4 \cdot (3,1416)^2} \approx 1,55\ m$$

es decir, podemos afirmar que la cuerda mide 1 metro y 55 centímetros aproximadamente, sin usar una huincha de medir, **¡sino un cronómetro!**

recuerda

El inverso multiplicativo de **a**, si **a** no es cero, es $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Por ejemplo:

El inverso de $\frac{2}{3}$ es $\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

Cuando en una igualdad algebraica, luego de hacer operaciones a ambos lados de la igualdad, obtenemos a un lado una sola variable, decimos que hemos **despejado** esa variable; en el ejemplo anterior despejamos L. Notemos que para despejar L multiplicamos por dos términos algebraicos, primero por g y luego por $\frac{1}{4\pi^2}$, la pregunta es, ¿por qué escogimos esos términos y no otros? La respuesta es que esos números se relacionan con los términos que acompañan a L en la igualdad. El lado derecho de la igualdad inicial era:

$$4\pi^2 \frac{L}{g} = 4\pi^2 \cdot \frac{1}{g} \cdot L$$

como a L lo está multiplicando $\frac{1}{g}$ y $4\pi^2$, entonces multiplicamos por los inversos multiplicativos de cada uno de ellos, es decir, g y $\frac{1}{4\pi^2}$.

En el caso de suma aplicaríamos el inverso aditivo, por ejemplo si:

$$2a + b = d$$

para despejar b, aplicamos el inverso aditivo de $2a$, es decir, $-2a$, y obtenemos $-2a + 2a + b = d - 2a$ o lo que es lo mismo $b = d - 2a$.

actividades

1. El flujo sanguíneo en un vaso capilar (el volumen de sangre por unidad de tiempo que pasa por un punto dado) es $\mathbf{F = kR^4}$, donde **k** es un valor constante, un número fijo, y **R** es el radio del vaso. Despeja **k**. ¿qué pasa con el flujo si $\mathbf{R^4}$ es pequeño?

2. En cada igualdad despeja **a**:

   a) $2a + 2b = P$ **b)** $\frac{2a}{3} - y = x$ **c)** $ma = -kx$ **d)** $\frac{a}{2} + 4 = c$ **e)** $F = ma$ **f)*** $ax = ay$

problema resuelto

Paula dice que su papá, que tiene el triple de edad de ella, la pasa por 30 años. ¿Cuál es la relación entre la edad de Paula y su padre? ¿Cuál es la edad de Paula?

✻ Solución:

Como Paula tiene 30 años menos que su padre, si a la edad de Paula le sumamos 30 años resulta la edad del papá. Si denotamos por **e** la edad de Paula y por **p** la edad de su padre se tiene que:

$$\mathbf{p} = \mathbf{e} + 30$$

Como el padre tiene el triple de edad de Paula, significa que $\mathbf{e} + \mathbf{e} + \mathbf{e} = \mathbf{p}$ o lo que es lo mismo, $\mathbf{3e} = \mathbf{p}$

Ahora, como $\mathbf{p} = \mathbf{3e}$ y como $\mathbf{p} = \mathbf{e} + \mathbf{30}$, se tiene que $\mathbf{3e} = \mathbf{e} + \mathbf{30}$.

En la relación anterior, aparece la letra **e** a ambos lados de la igualdad, en esos casos se procede del mismo modo que antes, es decir, aplicar la misma operación a ambos lados de la igualdad, con el objetivo de juntar la letra que queremos despejar a un mismo lado de la igualdad. En el ejemplo anterior, sumaremos el inverso aditivo de **e** a ambos lados, es decir, sumaremos **–e**.

Así se tiene: $3\mathbf{e} - \mathbf{e} = \mathbf{e} + 30 - \mathbf{e}$

o lo que es lo mismo, después de reducir términos semejantes:

$$2\mathbf{e} = 30$$

Ahora, multiplicando por el inverso multiplicativo de 2, es decir, $\frac{1}{2}$, resulta:

$$\frac{1}{2}2\mathbf{e} = \frac{1}{2} \cdot 30$$

$$\mathbf{e} = 15$$

Es decir, Paula tiene 15 años.

apliquemos

1. En cada caso despeja **a**:

a) $2\mathbf{a} - 3\mathbf{c} = \mathbf{a} + 5\mathbf{c}$

b) $3(\mathbf{a} - \mathbf{x}) = 2(\mathbf{x} - \mathbf{a})$

c) $3 - \frac{2}{3}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{2} + 1$

d)* $\frac{\mathbf{a}+1}{2} = \frac{1}{3}\mathbf{a}$

e) $1 - \mathbf{a} = \mathbf{c} + 3\mathbf{a}$

f)* $\frac{1}{\mathbf{a}} = \frac{2}{\mathbf{a}} + 2$

problema resuelto

Sayen Caniumilla estudia en Arauco, está en primero medio, su hermana Sofía está en la universidad y estudia en Concepción; le envía 60 problemas de desafío cada semestre a su hermana y le da 300 pesos a Sayen por cada problema resuelto correctamente. En cambio por cada problema que Sayen resuelve mal, ella debe dar 20 pesos a Sofía. Si al final del semestre Sayen logró juntar $8 400, ¿cuál fue el número de respuestas correctas?

✻ Solución:

Si denotamos por **c** la cantidad de preguntas correctas, se tiene que las erradas son todas menos las correctas, esto es, $60-\mathbf{c}$. Entonces el dinero que le dió Sofía a Sayen es $300 multiplicado por la cantidad de preguntas correctas, o sea, 300 **c** pesos.

A su vez, Sayen le dió a Sofía 20 pesos por cada respuesta errada, esto es $20(60-\mathbf{c})$, entonces el dinero con el cual se queda Sayen es $300\mathbf{c}-20(60-\mathbf{c})$, pero como eso es 8 400 se tiene que:

$$300\mathbf{c}-20(60-\mathbf{c})=8\ 400$$

Ahora necesitamos despejar **c** para conocer el número de respuestas correctas.

Cuando tenemos una igualdad donde una letra representa un valor desconocido que hay que dilucidar cuál es, se habla de una **ecuación**, y cuando despejamos la letra que representa el valor desconocido, que llamamos **incógnita**, decimos que estamos resolviendo esa ecuación.

Resolvamos esa ecuación de las respuestas correctas de Sayen:

$300\mathbf{c}-20(60-\mathbf{c})=8\ 400$

$300\mathbf{c}-1\,200+20\mathbf{c}=8\ 400$ / distribuimos $-\mathbf{20}$ en $(60-\mathbf{c})$

$320\mathbf{c}-1\,200=8\ 400$ / reducimos términos semejantes

$320\mathbf{c}=8\ 400+1\,200$ / sumamos el inverso aditivo de -1.200

$320\mathbf{c}=9\ 600$ / sumamos al lado derecho

$\mathbf{c}=\frac{9\ 600}{320}$ / multiplicamos por $\frac{1}{320}$, el inverso multiplicativo de 320

$$\mathbf{c}=30$$

El 0 no tiene inverso multiplicativo, es decir, si $\mathbf{ax}=\mathbf{b}$ y quieres despejar **x** debes saber que **a** no es 0, pues podrías cometer un error al escribir:

$$\mathbf{x}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$$

apliquemos

1.* Un tren recorre una distancia de 100 km que separa a dos ciudades, a una velocidad constante. Si aumenta su velocidad en 20 km/h, realiza el trayecto en 1,4 h menos. Si **v** denota la velocidad del tren en el primer viaje, encuentra una ecuación que satisfaga **v** que no involcre **t**.

2. En mi bolsillo tengo $730 entre monedas de $10 y de $50. Si tengo 5 monedas de $50 más que las de $10, ¿cuántas monedas de $10 tengo?

información en los medios

OBESIDAD

De acuerdo con datos de la Organización Mundial de la Salud (OMS), más de un billón de adultos tiene sobrepeso y al menos 300 millones de ellos es obeso. El riesgo de sufrir graves enfermedades como diabetes, hipertensión y derrame cerebral, afecciones cardiacas y ciertos tipos de cáncer es el resultado de estar sobre peso u obeso. Las razones clave del sobrepeso y la obesidad son el consumo de alimentos densos en energía, altos en grasas saturadas y azúcar y la reducida actividad física.

Sólo para mostrar lo terrible del problema, podemos decir que el 90 % de las personas que sufren diabetes son obesos o tienen sobrepeso. En Chile, desde 1970 al 2000, el cáncer vesicular se ha triplicado, la hipertensión está presente en el 33, 7 % de las personas y 35, 4 % de la población tiene el colesterol elevado.

En nuestro país el 22% de la población es obesa, es decir, tiene un índice de masa corporal (IMC) mayor de 30; 38 % de la población tiene sobrepeso y 1,3 % tiene obesidad mórbida, lo que en total suma 61,3 %. Los datos de la actividad física en Chile son dramáticos: el 73 % de nuestra población no realiza actividad física, el 18 % realiza alguna actividad, a lo más, dos veces por semana y sólo el 9 % realiza una actividad de 30 minutos diarios, a lo menos tres veces por semana. En promedio, miramos televisión 2 a 3 horas diarias en los días no festivos y los fines de semana aumenta a 4 y 5 horas diarias.

La solución es obvia: disminuir la ingesta de estos alimentos altos en grasas saturadas y azúcar, aumentar la ingesta de alimentos altos en fibra e incrementar la actividad física, pero al parecer, lo obvio no es necesariamente simple.

El aumento en la actividad física es una de las soluciones para la obesidad.

investiga

Investiga en la página web de la OMS, de Minsal y del INTA, acerca de la obesidad, y sus efectos. ¿Es considerada la obesidad una enfermedad?

El índice de masa corporal al cual se refiere el texto de arriba se define como:

$$\mathbf{IMC} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{h}^2}$$

donde **m** es la masa de la persona (medido en kilógramos) y **h** es la altura de la persona medida en metros, es decir, el **IMC** tiene unidades de $\mathbf{kg/m^2}$. Para la OMS una persona es normal, respecto a su peso y talla, si su **IMC** está entre $18,5\frac{\mathbf{kg}}{\mathbf{m}^2}$ y $24,99\frac{\mathbf{kg}}{\mathbf{m}^2}$. Tiene sobrepeso si su **IMC** $> 25\frac{\mathbf{kg}}{\mathbf{m}^2}$; se habla de obeso si **IMC** $> 30\frac{\mathbf{kg}}{\mathbf{m}^2}$ y obeso mórbido si **IMC** $> 40\frac{\mathbf{kg}}{\mathbf{m}^2}$.

apliquemos

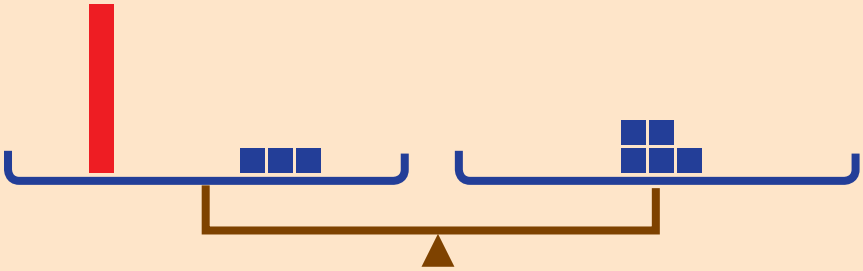
1. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla. En cada casillero se indica el rango de masa medida en kilogramos que permite a una persona ubicarse dentro de alguna de las categorías.

	1,4 m	1,45 m	1,5 m	1,55 m	1,6 m	1,7 m	1,75 m
Normal		**45 - 52,6**					
Sobrepeso							
Obeso							

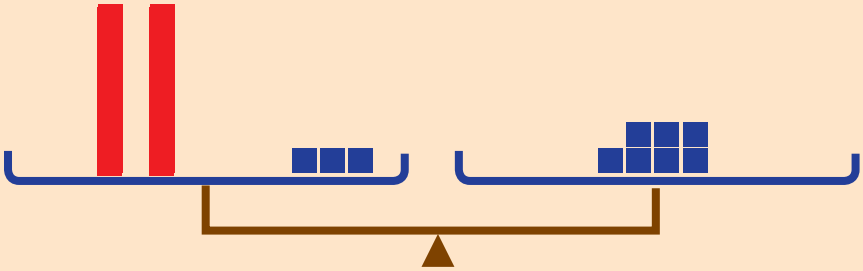
2. ¿Cuánto podría pesar una persona que mide 1,8 m para ser considerado obeso mórbido?

aplicando lo aprendido

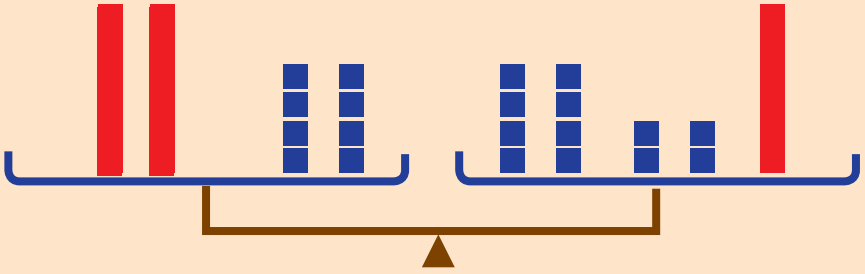
1. La siguiente balanza está equilibrada. Si la caja roja tiene calugas idénticas a las azules. ¿Cuántas calugas hay en la caja?



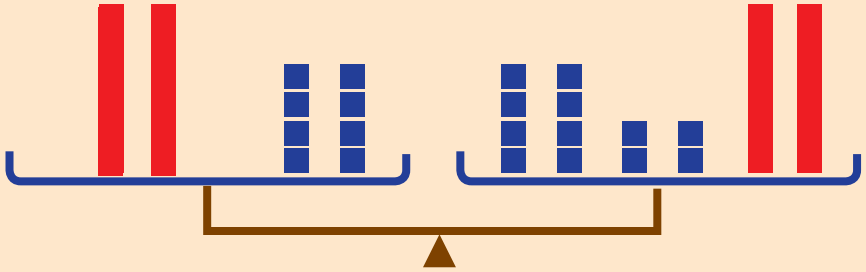
2. La siguiente balanza está equilibrada. Si cada caja roja tiene calugas idénticas a las azules y las cajas tienen la misma cantidad de calugas. ¿Cuántas calugas hay en una de las cajas rojas?



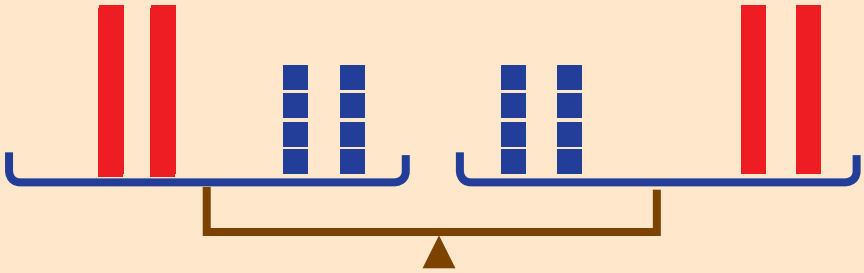
3. La siguiente balanza está equilibrada. Si cada caja roja tiene calugas idénticas a las azules y las cajas tienen la misma cantidad de calugas. ¿Cuántas calugas hay en una de las cajas rojas?



4 Explica por qué se puede afirmar que la balanza está artificialmente equilibrada.



5 Explica por qué se puede afirmar que la caja puede tener cualquier cantidad de calugas y siempre mantener la balanza equilibrada.



6 Resuelve las siguientes ecuaciones y relaciónalas con las balanzas anteriores:

a) $\mathbf{x} + 3 = 5$

b) $2\mathbf{x} + 3 = 7$

c) $2\mathbf{x} + 8 = \mathbf{x} + 12$

d) $2\mathbf{x} + 8 = 2\mathbf{x} + 12$

e) $2\mathbf{x} + 8 = 2\mathbf{x} + 8$

7 Representa las siguientes ecuaciones con balanzas:

a) $3\mathbf{x} + 3 = 9$

b) $2\mathbf{x} + 3 = \mathbf{x} + 7$

c) $\mathbf{x} + 2 = \mathbf{x} + 4$

d) $\mathbf{x} + 8 = 2\mathbf{x} - 12$

e) $3\mathbf{x} + 3 = \mathbf{x} + 7$

f) $3\mathbf{x} + 8 = 2\mathbf{x} - 12$

aplicando lo aprendido

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $6z-3=5+2z$

b) $7(3x+2)-6(2x+8)=11$

c) $2(x+1)+5(x-1)=4$

d) $\frac{5}{3}+\frac{2}{5}x=\frac{x}{4}+\frac{3}{2}$

e) $\frac{2(x-3)}{5}+\frac{3(x+4)}{4}=\frac{-1}{2}$

f) $\frac{2x-4}{3}=\frac{2x+9}{4}-\frac{x-1}{3}$

2 Para las siguientes fórmulas despeja la variable que se indica:

a) Ley de Gravitación Universal $F=G\cdot\frac{Mm}{r^2}$. Despeja la masa **M**.

b) Ley de Hooke $F=k(x-x_o)$. Despeja el largo total **x** del resorte.

c) Volumen de un cono es $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$. Despeja la altura **h**.

d) El capital C que se obtiene al invertir una cantidad C_o durante un periodo **n** en una institución financiera con un interés simple **i** es: $C=C_o(1+ni)$. Despeja el interés **i**.

3 Encuentra el valor de las incógnitas que se indican:

a) El volumen **V** de un cilindro de altura **h** y radio basal **r**, es $V=\pi r^2h$. Escribe la altura en términos de las otras variables y determina la altura del cilindro que tiene un volumen de 300 m^3 y radio basal $r=4$ m.

b) La presión **P**, que ejerce una fuerza **F** en una región de área **A** es $P=\frac{F}{A}$.

- Calcula la fuerza que ejerce la presión atmosférica a nivel del mar sobre una persona de 1,8 m de altura, acostada, si tiene una superficie aproximada de 0,62 m^2. (Ver problema 1 de la página 63)
- ¿Cuál es el área de la superficie de una mesa, si la presión atmosférica a nivel del mar aplicó una fuerza de 55 000 N? (Ver problema 1 de la página 63)

4 Resuelve los siguientes problemas:

a) Halla dos números enteros consecutivos cuya suma sea 103.

b) Pagué $325 000 por un caballo, un coche y sus arreos. El caballo costó $80 000 más que el coche y los arreos $25 000 menos que el coche. Halla el precio de cada producto.

c) La suma de las edades de tres personas es 88 años. La mayor tiene 20 años más que la menor y la del medio 18 años menos que la mayor. Hallar las edades respectivas.

d) De un estanque lleno de bencina, un automóvil consumió una cantidad igual a $\frac{7}{8}$ de su capacidad. Reponiendo 38 litros, la cantidad de bencina llega a las $\frac{3}{5}$ partes del estanque. ¿Cuál es la capacidad del estanque?

5 Generalidades numéricas

El lenguaje algebraico es muy útil para expresar ideas generales. Por ejemplo, si sumamos dos números pares el resultado es siempre par, ¿cómo podemos comprobar esto?

a	2	4	6	8	94	44	32	48	42	34	66	72	88	92
b	68	56	90	4	28	26	34	20	26	14	16	12	6	4
$a+b$	70	60	96	12	122	70	66	68	68	48	82	84	94	96

En la tabla vemos varios ejemplos donde se cumple lo anterior. Pero, si es cierto para estos (pocos) casos, ¿será cierto siempre? En la historia existen ejemplos de matemáticos que afirmaron que un resultado era cierto sólo comprobando unos pocos casos, y luego se demostró que la afirmación era falsa. Un ejemplo famoso es el del matemático francés Pierre Fermat (1601-1665), quien dijo que los números de la forma:

$$2^{2^n}+1$$

siempre eran primos, para cualquier número natural n. Fermat comprobó para los primeros 4 números naturales, y en todos esos casos resultó ser un número primo. Por ejemplo para el caso $n=1$, resulta $2^{2^1}+1=2^2+1=4+1=5$ que como sabemos es un número primo.

nota

Hoy en día no se sabe si la fórmula de Fermat permite encontrar infinitos números primos. Es un tema de investigación para los matemáticos del mundo solucionar ese problema.

Sin embargo, mucho tiempo después que Fermat propusiera esos números, el matemático suizo, Leonhard Euler (1707-1783) demostró que para $n=5$, el número que resulta de la fórmula de Fermat no es primo, ese número es:

$$2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297=641\cdot 6700417$$

que como era muy grande, Fermat no alcanzó a verificar. El error que cometió el matemático francés fue no dar una demostración general de su conjetura.

importante

Como $0=2\cdot 0$, entonces 0 es par. Recuerda, además, que 2 es el único primo par positivo.

Volvamos al estudio de la suma de los números pares. Como sabemos, no basta verificar algunos casos para asegurar que la suma de dos números pares es siempre un número par. Recordemos que un número es par si al dividirlo por dos resulta un número entero, es decir, al dividirlo por dos resulta resto cero, o lo que es lo mismo, un número par es el doble de un número entero. Es decir, si tenemos un número par N, entonces ese número es dos veces otro número entero, digamos n, es decir:

Si N es par, entonces $N=2n$ para algún número entero n.

actividades

- Evalúa la fórmula de Fermat para **n**=1, para **n**=2, para **n**=3. Verifica que en esos tres casos el resultado es un número primo.

Ahora bien, si tenemos dos números pares N y M, entonces N es el doble de un número entero y M de otro número entero. Es decir, $N = 2n$ y $M = 2m$ para ciertos números enteros n y m. Entonces $N + M = 2n + 2m$.

Por otra parte, $2(n+m) = 2n + 2m$
entonces $N + M = 2n + 2m = 2(n+m)$
es decir, $N + M$ es el doble del número entero $n+m$, luego $N + M$ es par.

En definitiva hemos demostrado que:

La suma de dos números pares es par.

Esa misma propiedad la podemos ver geométricamente: imaginemos a un número par como dos filas de la misma cantidad de baldosas.

Ahora, si tomamos dos números pares, estos los podemos ver como dos juegos de baldosas como el de arriba, pero tal vez de distinto largo.

La suma de esos dos números pares es el que resulta de pegar estas baldosas, que como se ve de nuevo, son dos filas del mismo número de ellas, es decir, un número par.

actividades

1. ¿Es un múltiplo de 4 un número par?

2. Cuando divides un número entero por 2 el resto es 0 ó 1. ¿Cómo se llaman los números que al dividirlos por 2 dan por resto 1?

3. ¿Cómo representarías un número impar usando baldosas? ¿Cómo representarías un número que es múltiplo de 3 usando baldosas ?

4. ¿Es la suma de dos múltiplos de 3 un múltiplo de 3?

Si n, p y q son números enteros que satisfacen $n = pq$, decimos que:

n es múltiplo de p.
n es múltiplo de q.
p es un divisor de n.
q es un divisor de n.

Por ejemplo, $33 = 3 \cdot 11$, por lo tanto 3 es un divisor de 33, o dicho de otro modo, 33 es múltiplo de 3.

En general, un múltiplo de 3, es 3 multiplicado por algún número entero n, es decir, cualquier múltiplo de 3 se escribe en la forma:

$$3n$$

Si n es un número entero, entonces su sucesor es el mismo número al cual se le agrega una unidad, es decir $n+1$. De igual manera, el antecesor de n es el mismo número al cual se la ha quitado una unidad, es decir $n-1$, por lo tanto los números $n-1$, n, y $n+1$ son tres enteros consecutivos, donde n denota al del medio. ¿Qué se obtiene si sumamos tres enteros consecutivos? La suma de tres enteros consecutivos cualquiera es:

$$n-1+n+n+1=3n$$

es decir, la suma de tres números enteros consecutivos resulta el triple de un número entero, es decir:

La suma de tres números consecutivos es un múltiplo de 3.

Todo número impar es el sucesor de un número par. Como un número par se escribe en la forma $2n$, entonces su sucesor es $2n+1$. Es decir, cualquier número impar se escribe en la forma:

$2n+1$ para algún entero n.

Ahora bien, ¿qué resulta de multiplicar un par por un impar? Denotemos por $2n$ al número par y por $2m+1$ al número impar, entonces el producto de esos dos números es:

$$2n(2m+1)=2\left[n(2m+1)\right]$$

es decir, el doble de $n(2m+1)$ por lo tanto, es un número par.

Resumiendo:

El producto de un par por un impar es par.

actividades

1. ¿Qué resulta de multiplicar un par por cualquier número entero?
2. Demuestra que la suma de un número y su sucesor es impar.
3. Escribe la suma de 4 enteros consecutivos donde **n** es el segundo. ¿Es par esa suma?
4. ¿Es cierto que todo múltiplo de 6 es un múltiplo de 3? Justifica tu respuesta.

Cuando estabas en educación básica conociste varios criterios de divisibilidad, uno de ellos era: "si el número formado por las dos últimas cifras de un número es múltiplo de 4, entonces el número es múltiplo de 4". Probemos esta propiedad, ahora que tenemos las herramientas.

Si a un número x, le restamos el número formado por sus dos últimas cifras, resulta un número con dos ceros al final de su notación decimal. Si el número de decenas es a y el de las unidades es b y como todo número que tiene dos ceros al final es múltiplo de 100, se tiene que lo de arriba se escribe

$$x - (10a + b) = 100c$$

o lo que es lo mismo

$$x = 100c + 10a + b$$

Si el número formado por las dos últimas cifras es múltiplo de 4, se tiene que el número

$$100c + (10a + b)$$

es múltiplo de 4, pues $100c = 4 \cdot 25c$ lo es y también $(10a + b)$. Resumiendo, hemos demostrado que:

Si el número formado por las dos últimas cifras de un número, es divisible por 4, entonces el número completo es divisible por 4.

actividades

1. En la demostración del criterio de divisibilidad de 4, dijimos que la suma de dos múltiplos de 4 resulta un múltiplo de 4. ¿Por qué es eso cierto?

2. Si un número tiene un par en el lugar de las unidades, ¿es cierto que el número es par?

3. Prueba el criterio de la divisivilidad por 5, esto es "un número entero que termina en 0 o en 5 es divisible por 5"

4. Representa un número impar como dos filas de baldosas, donde una fila tiene una baldosa más que la otra. Haz lo mismo con otro impar. Demuestra que la suma de dos números impares es par.

5. Si sumas un número de dos cifras con aquel que resulta al cambiar de posición los dígitos siempre resulta un múltiplo de 11. ¿Por qué?

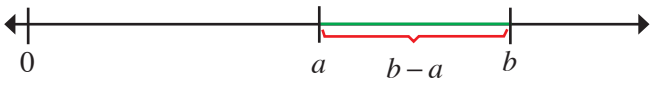
Una idea errada muy común es pensar que el cuadrado de un número positivo es siempre mayor que el número es decir, si $x > 0$, entonces x^2 está a la derecha de x.

Sin embargo, hay números como el $\frac{1}{2}$, que su cuadrado $\frac{1}{4}$ es menor que él, de hecho:

$$\frac{1}{4} = 0,25 < 0,5 = \frac{1}{2}$$

La pregunta que surge es: ¿cuáles son los números positivos cuyo cuadrado es menor que el propio número?

Para conocer tu respuesta nos ayudaremos con el lenguaje algebraico: ¿qué significa que $a < b$? Entre otras cosas significa que si a b le quitamos a aún nos queda algo positivo, es decir, la resta entre b y a es un número positivo.



Tomemos un número positivo x entre 0 y 1. Por lo tanto $1 - x$ es un número positivo, y como el producto de dos números positivos resulta positivo, se tiene que:

$$x(1-x)$$

es positivo, pero si distribuimos resulta:

$$x - x^2$$

que como dijimos es un número positivo, es decir, si a x le quitamos x^2 aún nos queda un número positivo, es decir,

$$x > x^2$$

Resumiendo, hemos demostrado que:

Si x está entre 0 y 1, entonces $x^2 < x$.

actividades

1. Demuestra que si **x** > 1, entonces **x** < **x²**.

2.* Si 0 < **x** < 1, ubica los siguientes números en la recta real:

a) 1 **b)** **x** **c)** x^2 **d)** x^3 **e)** x^{-1} **f)** $1 - x$ **g)** $\frac{1}{x^2}$

¿De qué depende que $1 - x$ esté a la izquierda o derecha de **x**? (Ayuda: ¿cuando 1 – **x** = **x**?).

aplicando lo aprendido

1 Si **a** y **b** son dos números naturales sin divisores comunes, salvo el 1, tal que $\frac{a}{b}$ es un decimal finito. ¿Es cierto que **b** solo tiene como divisores primos al 2 y al 5?

2 Martina le dice a su hermana menor Violeta: "*piensa un número de dos cifras*", Violeta pone cara de pensamiento y luego le dice: "*ya, ya pensé*". Martina le pide: "*Dime el número de las decenas*". Violeta se lo da. Martina le dice que sería muy fome adivinar el número que pensó, sino que adivinará algo más difícil, le dice que adivinará el número que pensó menos la suma de los dígitos del número. Martina pone cara de magia y efectivamente dijo lo que prometió que adivinaría. ¿Puedes explicar cómo Martina hace su magia?

3 Supón que tienes un balde que tiene una capacidad de 4 litros y otro de capacidad 7 litros. Los baldes no tienen medidas intermedias. Supón además que tienes un recipiente muy grande donde puedes vaciar el agua de los baldes y que además tienes acceso a un río que te provee de toda el agua que desees.

4 litros **7 litros**

a) ¿Puedes medir exactamente 5 litros? Muestra una estrategia para hacerlo.

b) ¿Puedes medir exactamente 6 litros? Muestra una estrategia para hacerlo.

c) ¿Puedes medir exactamente 13 litros? Muestra una estrategia para hacerlo.

d) Si **n** es un número natural, ¿puedes medir exactamente **n** litros? Muestra una estrategia para hacerlo.

4 Supón que tienes un balde que tiene una capacidad de 8 litros y otro de capacidad 6 litros. Los baldes no tienen medidas intermedias. Supón además que tienes un recipiente muy grande donde puedes vaciar el agua de los baldes y que además tienes acceso a un río que te provee de toda el agua que desees.

6 litros **8 litros**

a) ¿Puedes medir exactamente 4 litros? Muestra una estrategia para hacerlo.

b) ¿Puedes medir exactamente 14 litros? Muestra una estrategia para hacerlo.

c) ¿Puedes medir exactamente 13 litros? Muestra una estrategia para hacerlo o explica por qué no se puede hacer.

d) Si **n** es un número natural, ¿puedes medir exactamente **n** litros? Muestra una estrategia para hacerlo.

5 Considera dos números naturales **a** y **b**. Supón que tienes un balde que tiene una capacidad de **a** litros y otro de capacidad **b** litros. Los baldes no tienen medidas intermedias. Supón además que tienes un recipiente muy grande donde puedes vaciar el agua de los baldes y que además tienes acceso a un río que te provee de toda el agua que desees.

a) ¿Es cierto que si **a** y **b** son pares, entonces nunca se podrá medir un litro?

b) ¿Es cierto que si **a** = 3 y **b** = 9 entonces tampoco se podrá medir un litro?

c) ¿Es cierto que si **a** y **b** tienen un divisor común distinto de 1, entonces tampoco se podrá medir un litro?

d) ¿Bajo que condiciones puedes medir exactamente un litro con esos baldes?

e) ¿Es cierto que si puedes medir un litro, entonces puedes medir **n** litros, para cualquier valor natural de **n**?

6 Patrones

En la Unidad "Números" vimos que la suma de los primeros n números enteros resulta ser $\frac{n(n+1)}{2}$. Es decir, $1+2+3+4+5+6+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Veamos ahora qué resulta de sumar los primeros números impares. Como todo en matemáticas, existen varias estrategias para conocer el resultado. Una de ellas es estudiar varios casos, visualizar una regularidad, conjeturar el resultado y luego comprobar si nuestra conjetura es correcta.

Completemos la siguiente tabla de la suma de los números impares:

Nº de sumandos impares	La suma en extensión	El valor de la suma
1	1	1
2	1+3	4
3	1+3+5	9
4	1+3+5+7	16
5	1+3+5+7+9	25
6	1+3+5+7+9+11	36
7	1+3+5+7+9+11+13	49

Si observamos con detención, existe relación entre los valores de los números de la primera columna con los de la tercera columna. Concéntremonos solo en ellas.

Número de sumandos impares	El valor de la suma
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49

Como vemos, la segunda columna tiene el número de la primera columna elevado al cuadrado. Entonces nos aventuramos a dar una conjetura.

Para cualquier número natural n, la suma de los primeros n números impares es n^2.

actividades

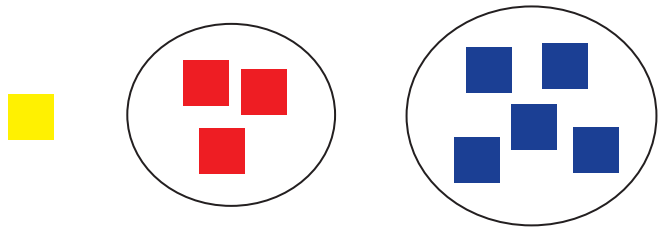
1. Según nuestra conjetura, ¿cuál sería el valor de la suma de todos los números impares, partiendo del 1 hasta el:

a) 21 **b)** 19 **c)** 15 **d)** 23 **e)** 25?

2. ¿Cuál es la suma de los números impares entre 15 y 25?

No es posible decir que la conjetura es cierta sólo porque funciona para algunos números naturales, aunque sean muchos los números en que la probamos. Es necesario dar un argumento que permita asegurar que la conjetura es cierta para n en general.

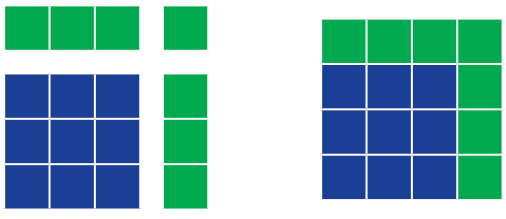
Como hemos visto antes, suele ayudar tener una imagen que represente la situación que se estudiará. Supongamos que tenemos un cuadradito y en un saco tenemos otros tres cuadraditos del mismo tamaño que el primero y en otro saco 5 cuadraditos del mismo tamaño.



Si sumamos el primer cuadrado con los del primer saco, lo podemos hacer así:

De modo que la suma de 1 y 3 cuadraditos forman el cuadrado de lado 2. Ahora, si sumamos el tercer saco, resulta la siguiente figura, es decir, un cuadrado de lado 3.

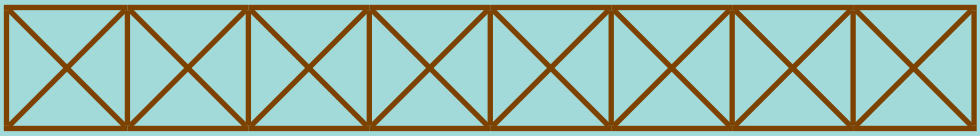
De esta manera, ya formamos un cuadrado de lado n con los primeros n impares, necesitamos agregarle n cuadrados a cada lado y un cuadradito en un vértice para formar el siguiente cuadrado, es decir, $n+n+1=2n+1$. Así, siempre se obtendrá un cuadrado al sumar los primeros números impares.



Por lo tanto, la suma de los primeros números impares es el cuadrado de un número.

problema resuelto

Don Víctor en Ovalle está cerrando un terreno con una cerca de la siguiente forma:



Cada vez que necesita agrandar la cerca, agrega maderos para formar un nuevo cuadrado con sus dos diagonales. Don Víctor calculó que para cerrar todo el terreno necesita una cerca formada por 110 cuadrados.

Este señor le pide a su hijo Mateo que le ayude a cortar los palos. "¿Cuántos necesitamos?", pregunta Mateo. "Corta, en el camino vamos viendo cómo anda la cosa", responde su padre. Sin embargo, Mateo, de todos modos, decide hacer los cálculos de manera de no realizar trabajo de más. Veamos sus cálculos.

✻ Solución:

El primer cuadrado está formado por 6 palos, que corresponden a cada lado y a las dos diagonales. El segundo en cambio, necesita un palo menos que antes, pues uno de los lados, el de la izquierda, ya se tiene del cuadrado anterior. Entonces para el segundo cuadrado se necesita $6+5=11$ palos. Para el siguiente, son 5 palos más del paso anterior así son $6+5+5=6+2\cdot5$.

En general, para el cuadrado número **n** necesitamos:

$6+5(\mathbf{n}-1)$ cuadrados.

En particular, cuando **n** = 110 se necesitará $6+5\cdot109 = 551$ palos.

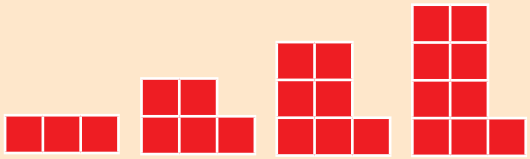
apliquemos

1. Considera la fórmula $\mathbf{n} + (\mathbf{n}-1)(\mathbf{n}-2)(\mathbf{n}-3)(\mathbf{n}-4)$. Evalúa esa fórmula para **n** = 1,2,3,4. Sin calcular ¿cuál crees tú que será el término para **n** = 5? Ahora calcúlalo, ¿corresponde a lo que pensabas?

Si tienes la secuencia 1, 2, 3, 4, 5, ¿se puede saber cuál es el siguiente término?

aplicando lo aprendido

1 La sucesión de figuras parte con un primer diagrama de una fila de 3 cuadrados; el segundo diagrama toma el diagrama anterior y coloca 2 cuadrados sobre los 2 primeros; el tercer diagrama toma el diagrama anterior y coloca 2 cuadrados sobre las dos columnas mayores. Así continúa esta sucesión aumentando de a 2 cuadrados las dos primeras columnas.

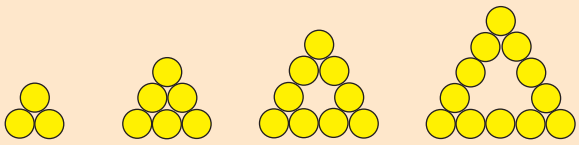


a) ¿Cuántos cuadrados son necesarios para los diagramas séptimo, decimocuarto y vigésimo?

b) En esta sucesión de figuras, ¿es posible construir una que tenga 86 cuadrados?

c) Determina la cantidad de cuadrados para el diagrama **n**.

2 La figura siguiente muestra triángulos equiláteros formados por pequeños círculos, partiendo con uno de lado 2 círculos, el siguiente de lado 3 círculos y así continúan los triángulos aumentando consecutivamente la medida de su lado en un círculo.

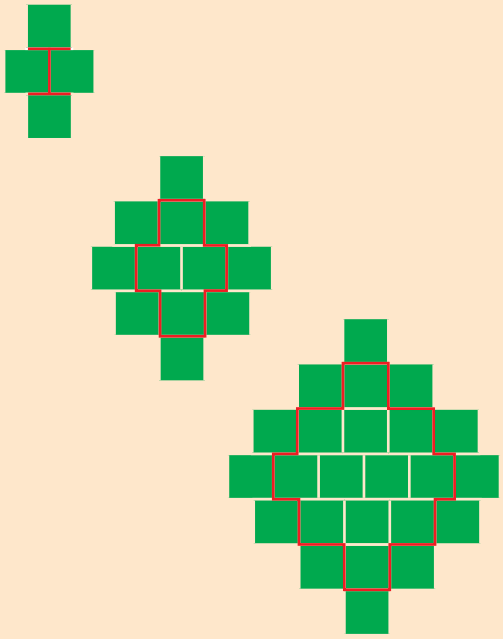


a) Realiza una tabla relacionando el lado del triángulo (medido en círculos) y cantidad de círculos que lo conforman. Hazlo hasta la figura 10.

b) Con la ayuda de la tabla anterior conjetura la cantidad de círculos para la figura 16.

c) Expresa la fórmula que establece la cantidad de círculos para la **n**-ésima figura.

3 La figura muestra cuadrados ordenados de la siguiente manera: la primera figura por tres filas de uno, dos y un cuadrado, respectivamente; a la segunda figura se le agrega un cuadrado a todos los cuadrados que conforman el borde de la figura anterior. De esta manera se obtiene cada figura posterior tomando la anterior y pegándoles cuadrados a los que conforman el borde de dicha figura.



a) Construye la cuarta y quinta figura.

b) ¿Cuántos cuadrados necesito para cada una de las figuras, desde la sexta hasta la décima?

c) ¿Cuántos cuadrados necesito para la figura **n**?

4 Si **n** es un número natural, evalúa $25-2\mathbf{n}$, para valores de **n** entre 10 y 20**.**

5 La expresión $\frac{5-\mathbf{n}}{5+\mathbf{n}}$ describe el término general de una sucesión para **n** un número natural.Describe esta sucesión para los primeros 12 números naturales. Conjetura y describe, sin calcular, los siguientes 10 términos de esta sucesión.

un poco de historia

POLINOMIOS

Un término algebraico que solo tiene números y potencias positivas de las variables se denomina **monomio**. Por ejemplo, $3\mathbf{x}^2\mathbf{y}$ es un monomio, 3 es un monomio, en cambio, $2\mathbf{x}^2\mathbf{z}^{-3} = 2\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{z}^3}$ no es un monomio. Una expresión algebraica que sólo tiene monomios como términos algebraicos, se denomina **polinomio**. Por ejemplo, $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 1$ y $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^3 + \mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 1$ son polinomios en una variable. A la potencia más grande que aparece en un polinomio en una variable se le llama el **grado del polinomio**. Por ejemplo, $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ tiene grado 2 y $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ tiene grado 3. Si $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ tiene grado **n**, a la igualdad $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = 0$, se denomina una ecuación de grado **n**.

"He hecho algunos descubrimientos nuevos en análisis. El primero concierne a la teoría de ecuaciones; los otros, a las funciones enteras. En teoría de ecuaciones he investigado las condiciones de solución de ecuaciones por medio de raíces; con ello he tenido ocasión de profundizar en esta teoría y describir todas las transformaciones posibles en una ecuación, aun cuando no sea posible resolverlas por raíces. Todo ello puede verse aquí, en tres memorias... haz petición pública a Jacobi o a Gauss para que den su opinión, no acerca de la veracidad, sino sobre la importancia de estos teoremas. Confío en que después algunos hombres encuentren de provecho organizar todo este embrollo".

Carta de Galois a un amigo, justo la noche antes de su muerte.

Algunas de las preguntas fundamentales del álgebra son: *¿Qué número debemos evaluar en un polinomio para que resulte cero? ¿Existe una fórmula para encontrarlos?*

importante

Hay términos algebraicos que no son monomios.

Por ejemplo, si evaluamos en $\mathbf{x}^3 + 3\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} - 2$ el valor $\mathbf{x} = 1$ resulta

$$1^3 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 2 = 1 + 3 - 2 - 2 = 0$$

Por el año 1600 a de C. el pueblo Babilonio resolvía problemas que reducía a ecuaciones de grado 2, las cuales resolvía aunque no utilizaban notaciones algebraicas. Los griegos también resolvían ecuaciones de grado 2, mediante métodos geométricos.

Durante el renacimiento, varios matemáticos, italianos principalmente, abordaron el problema de resolver las ecuaciones polinomiales de grado 3, pero fue Niccolo Fontana (1499-1557), (llamado Tartaglia) quien en 1535, daría la solución general del problema. Sin embargo, el resultado de Tartaglia fue publicado por Giordano Cardano (1501-1576) y hoy se le recuerda a él como el descubridor de la solución de la ecuación de grado 3. Cardano, resolvió el problema para ecuaciones de grado 4. Pasaron casi 100 años y el joven matemático Niels Henrik Abel (1802-1829), en 1824, demostró que no se puede encontrar una fórmula empleando operaciones algebraicas que permitan solucionar las ecuaciones de grado 5. Sólo tenía 22 años cuando hizo este maravilloso descubrimiento.

En 1832 un joven republicano francés, Évariste Galois, muere en un duelo cuando sólo tenía 20 años. Galois (1811-1832) era un joven matemático cuando presentó tres veces su memoria a la Academia de Ciencias de París, las tres veces fue rechazada o se extravió sospechosamente. En ella, Galois demuestra, utilizando un método inventado por él, que no existe una fórmula que permita resolver la ecuación polinomial de grado mayor o igual que 5.

actividades

1. Explica por qué $\mathbf{x}^2 + 1$ no es cero para ningún número real **x.**
2. Si un polinomio tiene grado 3 y otro tiene grado 2, ¿cuál es el grado de la suma de esos polinomios?

7 Producto de polinomios

En el almacén de don Manuel se vende el kilogramo de pan a $950. Sin embargo, la panadería que lo abastece del crujiente producto, subirá el precio en $10 cada kilogramo. Este señor sabe que su clientela no puede asumir esa alza, de modo que para mantener a sus clientes, él no lo hará.

Su mujer no está de acuerdo con este planteamiento, porque disminuirán los ingresos en la casa, pero don Manuel la convence argumentando que la gente no sólo compra pan, sino que también compra leche, mantequilla, azúcar, té, aceite, queso, etc. y desde su punto de vista, perder un cliente significa una gran pérdida en ventas. La mujer logra entender y el hombre se pone a hacer cálculos. Si hasta ahora la ganancia por cada kilogramo de pan es G, entonces desde la fecha del alza del pan, la ganancia por cada kilogramo serán $G - 10$, ya que el precio lo mantendrá a $950.

Llega entonces a la siguiente conclusión: si al mes me compran K kilogramos de pan, entonces al mes ganaba KG. En cambio, desde ahora solo ganaré:

$$K(G - 10)$$

Paula, su mujer, pensando en el tema, llega a una conclusión que el almacenero no había considerado: lo más probable es que los negocios del barrio suban el precio del pan, y como nosotros lo mantuvimos es muy factible que algunas vecinas se cambien de almacén y se vengan a comprar al nuestro. Tienes razón, le responde don Manuel.

Supongamos que la cantidad de personas que se cambian a nuestro negocio nos compran p kilogramos de pan, entonces las ganancias que tendremos, sólo por este concepto, serán:

$$(K + p)(G - 10)$$

El hijo de la pareja, dice: entonces lo que ganaremos ahora, será $KG - 10p$. Don Manuel lo piensa un rato y dice, "No, estás equivocado", porque tu fórmula dice que siempre ganaremos menos que KG, que es lo que ganábamos antes, pero si ganamos mucha clientela nueva, es decir, si p es grande es de esperar que empatemos lo que ganábamos antes, incluso podemos ganar más que antes. El hijo se convence, de que su resultado está mal, pero no sabe cómo arreglarlo.

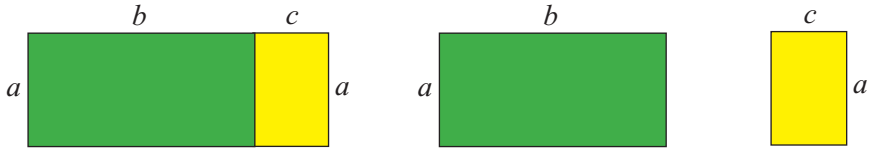
actividades

1. Si las ganancias por kilogramo de pan eran de $80 = G, y la cantidad de pan que se compra por mes es K = 1 200 kilogramos. Completa en tu cuaderno, la siguiente tabla, una fila tiene el cálculo correcto y otra la que pensaba el hijo de Manuel:

p	30	60	90	120	150	180	210
$(\mathbf{K} + \mathbf{p})(\mathbf{G} - 10)$							
$\mathbf{KG} - 10\mathbf{p}$							

¿Estás de acuerdo que el hijo de don Manuel estaba equivocado?

Vimos anteriormente que la ley distributiva, que aprendiste en la enseñanza básica, se puede representar geométricamente como muestra la figura a continuación:



cuidado

La representación geométrica considera **a**,**b**,**c** números positivos, pero la ley distributiva es válida para cualquier trío de números reales.

Es decir, el área del rectángulo grande es $a(b+c)$, y por otro lado es la suma de las áreas de los rectángulos pequeños, es decir

$$a(b+c) = ab + ac \text{ , para cualquier valor de } a, b \text{ y } c$$

Multiplicar un número por la suma de dos números es lo mismo que multiplicar el número por cada sumando y luego sumar los resultados, por ejemplo:

$$5(xy + x^2y) = 5xy + 5x^2y$$

recuerda

Es importante recordar que $\mathbf{x=x^1}$, y que $\mathbf{x^n x = x^{n+1}}$

Recordemos que una propiedad de las potencias es, que si multiplicas potencias de igual base, los exponentes se suman, es decir, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, esto será útil recordar cuando se distribuyan expresiones algebraicas, por ejemplo:

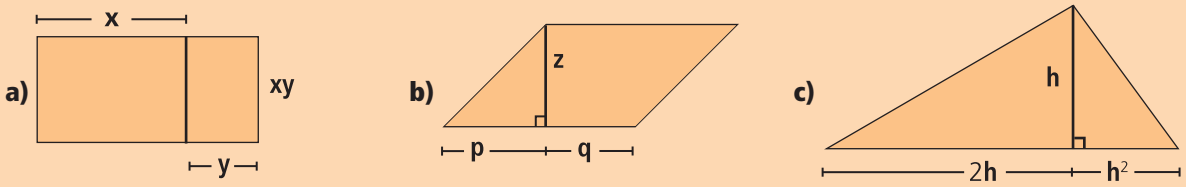
$$x^2y^2(x+y) = x^2y^2x + x^2y^2y = x^3y^2 + x^2y^3$$

El paréntesis de la expresión $a(b+c)$, significa que a multiplica a la suma $b+c$. Si el paréntesis no estuviera, es decir, $ab+c$, a sólo multiplicaría a b. Por esto es importante respetar los paréntesis.

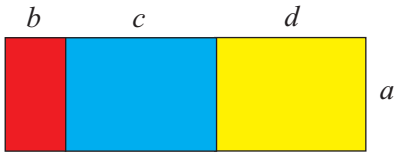
Como la multiplicación es conmutativa, es lo mismo decir $a(b+c)$ que $(b+c)a$, de modo que si el paréntesis está a la izquierda o a la derecha, para el resultado no es importante.

actividades

1. Escribe el área de estas figuras como suma de monomios:



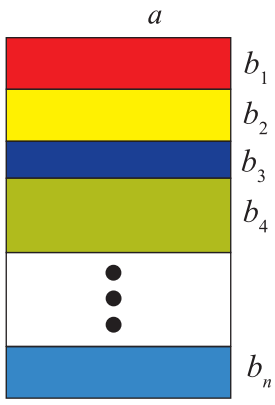
La propiedad distributiva sólo menciona dos términos dentro del sumando, es decir, un binomio. ¿Qué pasaría si hubiese tres términos o más en el paréntesis? ¿Qué podríamos hacer? Observar una representación geométrica como la figura de abajo puede ayudar a entender que es lo qué está pasando:



Como ves, el área del rectángulo completo es la suma de las áreas de los pequeños rectángulos pintados de colores diferentes. Como el largo del rectángulo es $(b+c+d)$ y el ancho es a, entonces el área del rectángulo es:

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad$$

En general, si un lado de un rectángulo es a y el largo se divide en n partes, formando n diferentes rectángulos, donde todos tienen un lado que mide a. Entonces, el área del rectángulo es igual a la suma del área de los pequeños rectángulos (ver figura a la derecha). Es decir, si el largo mide $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$, entonces se tiene que:



$$a(b_1+b_2+b_3+...+b_n)=ab_1+ab_2+ab_3+...+ab_n$$

Supón que tu mamá compra 2 camisas, 2 pantalones y 2 jumpers. Entonces, ella paga $2(c+p+j)=2c+2p+2j$, donde c es el precio de cada camisa p es el precio del pantalón y j de cada jumper. Si por cada prenda le hacen un 20% de descuento, entonces ella paga:

$$2(c-\frac{c}{5})+2(p-\frac{p}{5})+2(j-\frac{j}{5})$$

actividades

1. Si el precio de una camisa y un pantalón juntos es igual al de un jumper. ¿Cuál es el precio de cada jumper, si el descuento total fue $3 200?

2. Don Zacarías, el jardinero, hizo un círculo de radio ***r*** en la plaza, donde plantó petunias. El presidente de la junta de vecinos le pidió que la agrandara, de forma que el radio aumentara en 20 cm. Don Zacarías le respondió que necesitará más cadenas para rodear la glorieta, el equivalente para rodear un círculo de radio 20 cm. ¿Tiene razón don Zacarías? ¿La cadena que falta no depende del radio inicial?

3. Desarrolla las multiplicaciones y reduce términos semejantes: $2\mathbf{a}(\mathbf{xy}+\mathbf{xz}+\mathbf{yz})+(3\mathbf{ax}+2\mathbf{ay}+4\mathbf{az})8\mathbf{x}$

aplicando lo aprendido

1 Desarrolla los siguientes productos y reduce términos semejantes:

a) $x^2y^2(3xy - 2x^2y) + 5x^3y^3$

b) $(-0,2a + 0,25ab)50a^2b$

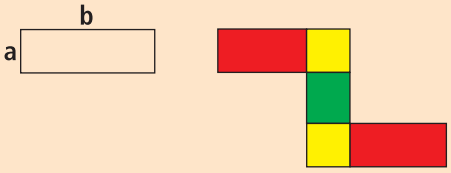
c) $(3uv - 2uz + 5zy)\dfrac{uvz}{2}$

d) $\left(\dfrac{5h - k + 21}{4}\right)8hkl^2$

e) $(-2cs - 3cr + 4rs)(-3r) + s(3r^2 - 4cr)$

f) $\dfrac{abc}{3}(-3a + 6b - 12ac) + a^2(bc + bc^2)$

2 Considera un rectángulo de lados de medidas **a** y **b**, con **b** > 2**a**. Haz tres copias idénticas de él y superponlos como en la figura:



a) ¿Cuál es el área de la figura de la derecha?

b) ¿Cuál es el área del rectángulo rojo?

c) ¿Cuál es el área del rectángulo amarillo?

d) ¿Qué clase de rectángulo es?

e) ¿Cuál es el área del rectángulo verde?

3 Recuerda que un cono de radio **r** y altura **h**, tiene un volumen de $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$ ¿Es cierto que el volumen de un cono de radio **r** y altura $h + k$, tiene el mismo volumen que dos conos de radio **r**, uno de altura **h** y otro de altura **k**?

4 El volumen de una caja de aristas **x** cm, **y** cm y **z** cm es **xyz** cm^3. ¿En cuánto aumenta el volumen de ésta si la medida de la arista **z** aumenta en un centímetro? ¿El aumento es el mismo si en vez de **z** el aumento lo experimenta **x** ó **y**?

5 La energía cinética de un objeto de masa **m** que se mueve a una velocidad **v**, es $K = \dfrac{mv^2}{2}$, ¿es cierto que si la velocidad se duplica, la energía también se duplica? ¿Es cierto que si la masa se duplica, la energía también se duplica?

6 El padre de Rodrigo gana **p** pesos por hora. Si el día lunes trabajó **l** horas, el martes **m** horas, el miércoles **w** horas, el jueves **j** horas y el viernes **v** horas, ¿cuánto ganó en la semana? Si los días lunes, martes y miércoles trabaja una hora más de lo que trabaja el jueves y viernes. Si $p = 1\,750$, y en esa semana ganó \$76 000, ¿cuántas horas trabajó cada día?

7 Compara el área de un triángulo isósceles de base **a**, y altura **h** con otro de la misma base pero el doble de la altura.

8 Factorización: primera parte

Hasta el momento hemos estudiado la multiplicación de un número por una suma: $a(b+c)$, también podemos hacerlo con la resta, recordando que la resta de a menos b es la suma de a más el inverso aditivo de b, esto es

$$b - c = b + (-c).$$

Por lo tanto, $a(b-c) = a(b+(-c))$, pero la distribución respecto a la suma la conocemos bastante bien.

Resumiendo:

$$a(b-c) = ab - ac.$$

En general, si hay varios términos multiplicando a un número, es necesario transformar las restas en suma y luego aplicar la propiedad distributiva, por ejemplo:

$$3x(xy - xz - 3xy^2) = 3x(xy + (-xz) + (-3xy^2)) = 3x^2y - 3x^2z - 9x^2y^2$$

Para muchos propósitos, en vez de desarrollar un producto, es necesario saber si una expresión algebraica es una multiplicación de dos expresiones algebraicas.

Por ejemplo, si n es un número entero, un múltiplo de él se escribe en la forma nk, para algún número entero k. Y viceversa, si un número entero se escribe en la forma nl, para algún entero l, entonces es un múltiplo de n. Si tenemos dos múltiplos de n, ¿es la suma un múltiplo de n? La respuesta es sí, y la razón es que nk y nl son los múltiplos de n en cuestión, entonces su suma es $nk + nl$, pero si nos fijamos con atención, eso es la parte derecha de la distribución

$$n(k+l) = nk + nl$$

Es decir, la suma de los múltiplos de n se puede escribir en la forma $n(k+l)$, o sea n multiplicado por un número entero, por lo tanto es un múltiplo de n.

La suma de dos múltiplos de n es un múltiplo de n.

nota

Encuentra una representación geométrica de la expresión:
a(b − c) = ab − ac

actividades

1. Demuestra que la resta de dos múltiplos de **n** es un múltiplo de **n**.

2. Si **a + b** es un múltiplo de **n**, ¿es verdadero que cada uno de los sumandos es múltiplo de **n**?

3. Escribe las siguientes expresiones algebraicas como productos:

a) $3x + 3y$ **b)** $3x + 6y$ **c)** $9x - 6y$ **d)** $3xy + 6zy$ **e)** $-12x^2y + 24y^2$

Un monomio es un término algebraico donde las potencias de las variables son positivas o cero, una suma de monomios se llama polinomio. Por ejemplo, $3xy^2$ es un monomio en las variables x e y, pero $3\frac{y}{x}$ no es un monomio en las variables x e y. Si dos monomios se multiplican, por ejemplo $3xy^2$ y $2x^2y$, forman un nuevo monomio, en nuestro caso $6x^3y^3$. En ese caso decimos que los monomios iniciales son *factores del producto*. En nuestro caso, $3xy^2$ y $2x^2y$, son factores de $6x^3y^3$. Sin embargo, los factores no son únicos, es decir, puede ocurrir que otros monomios al multiplicarse creen el mismo producto, por ejemplo, al multiplicar $6x^3$ con y^3, también resulta $6x^3y^3$.

En general, decimos que un polinomio p, es múltiplo de otro polinomio q, si p se puede escribir como qr, donde r es un polinomio.

Al proceso de escribir un polinomio, como el producto de factores, se le llama comúnmente *factorizar*. Por ejemplo, al factorizar el polinomio $xy^2 + xz^2$ resulta $x(y^2 + z^2)$.

Recordemos que la ley distributiva es $a(b+c) = ab + ac$, por lo tanto, si sólo tenemos el lado de la derecha, notamos que a se repite en ambos sumandos, entonces decimos que es un factor común, con esto podemos reconstruir el lado de la izquierda. Por ejemplo: $4x^2y + 6xy^2$ lo podemos escribir $2(2x^2y) + 2(3xy^2)$, entonces, el 2 es un factor común. Así tenemos la factorización

$$4x^2y + 6xy^2 = 2(2x^2y + 3xy^2)$$

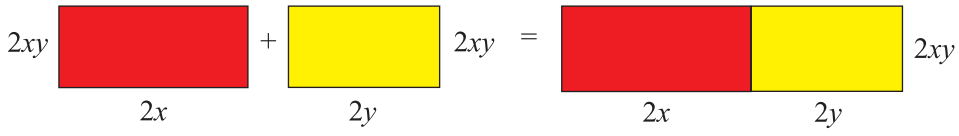
Ahora bien, notamos que el factor $2x^2y + 3xy^2$ de la factorización anterior, todavía tiene factores comunes, de hecho, $2x^2y + 3xy^2 = xy(2x) + xy(3y)$, por lo tanto

$$2x^2y + 3xy^2 = xy(2x + 3y)$$

Retomando la igualdad anterior, se tiene

$$4x^2y + 6xy^2 = 2(2x^2y + 3xy^2) = 2xy(2x + 3y)$$

El proceso de factorización muestra cómo reconstruir el área de un rectángulo a partir de pequeños rectángulos que tienen un lado de la misma medida. En nuestro caso, $4x^2y + 6xy^2$, lo hemos visto como la suma del área de dos rectángulos, cada uno de los cuales tiene un lado de medida $2xy$.



actividades

1. Dibuja en tu cuaderno dos rectángulos, uno de área $2\mathbf{x^3y^2}$ y otro de área $3\mathbf{x^2yz}$, de tal forma que tengan un lado de la misma medida. Factoriza $2\mathbf{x^3y^2} + 3\mathbf{x^2yz}$
2. Factoriza los siguientes polinomios:

   a) $\mathbf{abc - abc^2}$ **b)** $\mathbf{-2xy^2w + 4y^3w^2z}$ **c)** $\mathbf{5u^2v - 10u^2 - 15uv^2w}$

Sigamos distribuyendo

Recordemos el problema de don Manuel: él ganaba por concepto de pan, luego de asumir el alza de \$10:

$$(K+p)(G-10)$$

donde K era la cantidad de pan mensual que vendía antes del alza, p era la clientela que ganaba y G la ganancia por kilogramo, antes del alza. Como $G-10$ es un número, lo podemos distribuir en la suma $K+p$, resultando:

$$K(G-10)+p(G-10)$$

distribuyendo cada uno de los paréntesis, se tiene:

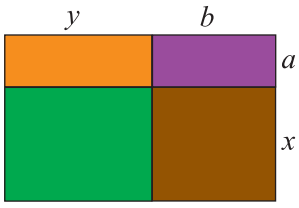
$$KG-10K+pG-10p$$

que es muy distinto, a lo que pensaba el hijo: $KG-10p$.

En general se tiene:

$$(x+a)(y+b)=xy+ay+bx+ab$$

Esta última relación se puede observar geométricamente como se muestra en la figura de la derecha.



Notamos que sólo el rectángulo verde representa xy, el anaranjado representa a ay, el violeta ab y el café xb. Es decir, la diferencia, entre $(x+a)(y+b)$ y xy es $ay+bx+ab$. Si a y b son los errores en las mediciones, es de esperar que sean pequeñas comparadas con x y con y respectivamente, por lo tanto el valor ab suele ser muy insignificante comparado con xy. Por lo tanto, quien hace una diferencia significativa entre:

$$(x+a)(y+b) \text{ y } xy, \text{ es } ay+bx.$$

Por ejemplo, si y y x representan decenas de metros y tanto a como b representan 1 cm, el error ab es 1 cm^2, cantidad muy pequeña para considerarla una diferencia sustantiva.

actividades

1. Desarrolla los siguientes productos y reduce términos semejantes cuando se pueda:

a) $(2x+3y)(2t+5k)$

b) $(ab+cd)(x+y)$

c) $(xy+x^2)(xy-x^2)$

d) $(a-b)(a+b)$

e) $(x^2-y^2)(x+y)$

f) $(x+y)(x-y)(x+y)$

2. Considera un número **A**, que sea la suma de un número par con un múltiplo de 3, y por otra parte, considera un número **B** que sea la suma de un número par con un múltiplo de 5. ¿Es cierto que el producto de **A** con **B** es un número par más un múltiplo de 15?

3. En el problema de don Manuel, supón que la venta mensual, antes del alza es de **K** = 1.200 kilogramos. Si la ganancia, antes del alza era de \$80 por kilo, ¿para qué valores de **p**, se obtienen mayores ganancias después del alza que antes de alza?

aplicando lo aprendido

1 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $5x - 10xy$

b) $0,25x^2 + 0,75xz^2$

c) $\frac{2}{3}abc - 0,\overline{3}ab^2c$

d) $5x^2y + 10xy^2 - 15x^2y^2$

e) $\frac{3x^2y}{2} - \frac{5xy}{2} + \frac{7xy^2}{4}$

f) $xy + 3x - y - 3$

g) $xy + 3bx + 2ay + 6ab$

h) $a(x^2 - xy) - b(xy - y^2)$

2 Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + y)5xy$

b) $(4x + y)(3x - y)$

c) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

d) $(xy + zx)(xz - yz)$

e) $\frac{ab - a^2c}{3}(-6ac - 9a^2b)$

f) $(x - 1)(y - 1)(z + 1)$

g) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

h) $(x + y)(x^2 + xy + y^2)$

i) $(x - a)(x - b)$

3 ¿Cuánto menor es el volumen de una caja, la cual tiene aristas una unidad menor que las aristas de otra caja?

4 Considera dos cajas. Una tiene cada arista un centímetro más grande que las aristas de la otra caja. Si las aristas de la caja chica son **x**, **y** y **z**, ¿cuánto mayor es el volumen de la caja grande que el volumen de la caja pequeña?

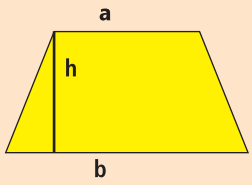
5 Si un rectángulo tiene área $3xy + 12x^2$, ¿cuáles pueden ser las medidas de sus lados?

6 Compara el área de un triángulo equilátero de lado **a** con otro de lado una unidad mayor.

7 Un fabricante de pantalones los vende a $3 500 a una tienda, que le compra 500 unidades. Él pretende subir el precio del artículo y estima que por cada $100 que aumenta el precio, la tienda le comprará 2 unidades menos. Si decide subir el precio en **x** pesos, ¿cuánto será el dinero **D** que reciba de la tienda por la venta de pantalones?

Haz una tabla de **x** versus **D**. Estima cuánto debe subir el precio el fabricante, para recibir la mayor cantidad de dinero.

8 El área de un trapezoide es $\frac{1}{2}(a + b)h$, donde **a**, **b** y **h** son las medidas de los trazos que se muestran a continuación:



Describe el área como la suma de monomios. Si **a**=**h**=10 cm y **b**=20 cm, ¿cuál es el área del trapezoide?

9 Herón de Alejandría en el siglo I de nuestra era, asegura que el cuadrado del área de un triángulo es: $p(p-a)(p-b)(p-c)$ donde **p** es el semiperímetro del triángulo de lados **a**, **b** y **c**. ¿Cuál es el cuadrado del área de un triángulo de lados 4 cm, 3 cm y 3 cm?

10 Si $ab = 0$, ¿es cierto que $a = 0$ ó $b = 0$?

11 Si $a(x - y) = 0$, entonces, ¿qué puedes afirmar?

12 Si $(a - b)(x - y) = 0$, entonces, ¿qué puedes afirmar?

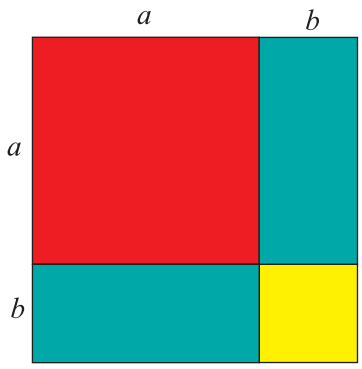
13 ¿Qué debe ocurrir para que $a(x - y)$ sea igual a $b(x - y)$?

14 Si a un terreno rectangular de lados **x** y **y** se le quita **a** unidades al lado **x**, y al lado **y** se le quita **b** unidades, ¿cuál es el área que resulta? Si se le quitan **a** unidades a **y** y **b** unidades a **x**, ¿cuál es el área del rectángulo que resulta? ¿En cuáles casos ambos procesos producen rectángulos de la misma área?

10 Productos notables: el cuadrado del binomio

Entre los productos de polinomios, hay algunos bastante utilizados en matemáticas, ya sea en estrategias de cálculo o en desarrollos algebraicos en modelos matemáticos. A estos productos destacados los denominan *"Productos Notables"*.

Uno de ellos es cuando se repite el factor, es decir $(a+b)(a+b)$, lo que también anotamos $(a+b)^2$, lo llamaremos "el cuadrado del binomio", y geométricamente lo vemos como sigue:



Como vemos, el área del cuadrado de lado $(a+b)$ es igual a un cuadrado de lado a, el rojo, dos rectángulos que miden lo mismo, de lados a y b, los rectángulos verdes y el cuadrado de lado b, el amarillo. Si sumamos las áreas resulta: $a^2+2ab+b^2$, por lo tanto:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

Esto lo sabemos del álgebra. De hecho, si distribuimos, resulta:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$$

También podemos desarrollar el cuadrado de la diferencia, sólo distribuyendo y escribiendo la resta como una suma:

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = (a+(-b))(a+(-b)) = a^2-ab-ba+b^2 = a^2-2ab+b^2$$

nota

Si no recuerdas el resultado del cuadrado del binomio, siempre está la posibilidad de desarrollar la multiplicación.

actividades

1. ¿En qué caso $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2$?

2. Desarrolla los siguientes cuadrados:

a) $(\mathbf{a}+2\mathbf{b})^2$ **b)** $(-\mathbf{x}+3\mathbf{y})^2$ **c)** $(\mathbf{x}+1)^2$ **d)** $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

3. Calcula $\left(\mathbf{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

¿Es cierto que $\mathbf{x}^2+\mathbf{x}+1$ es un número positivo para cualquier valor de $\mathbf{x}$?

11 La suma por la diferencia

Si creemos estar en frente de un cuadrado, y medimos uno de sus lados y resulta ser x, con error en la medición de $\pm a$, el área máxima del cuadrado es $(x+a)^2$ y la mínima es $(x-a)^2$. Sin embargo, puede que no haya sido un cuadrado, sino que un rectángulo con pequeña diferencia en la medida de sus lados. La máxima medida de uno de sus lados es $(x+a)$ y la del otro es $(x-a)$, entonces su área sería $(x-a)(x+a)$. A este último producto se le llama la *suma por su diferencia*, pues corresponde al producto entre la suma de dos números por la diferencia de los mismos.

Si desarrollamos el producto, resulta:

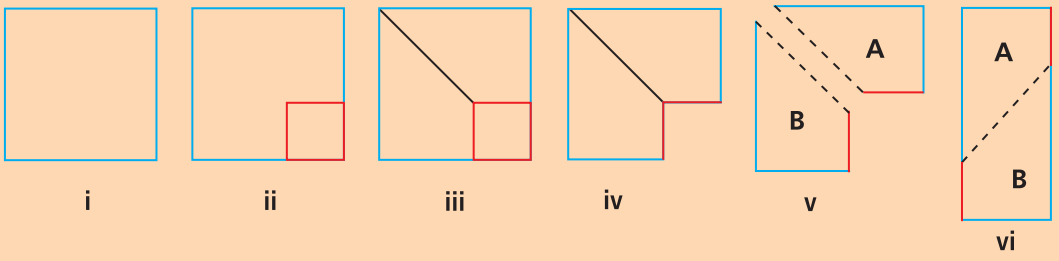
$$(x+a)(x-a)=x(x-a)+a(x-a)=x^2-ax+ax-a^2=x^2-a^2$$

Por ejemplo $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=3-2=1$

actividades

Esta actividad tiene por finalidad que descubras la relación $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$, mediante un método geométrico.

1. Antes de todo, construye en cartulina un cuadrado de lado **a**.
2. Ahora marca en una esquina del cuadrado, un cuadrito de lado **b**. Desde luego $\mathbf{a}>\mathbf{b}$.
3. Desde el vértice opuesto al cuadrado de lado **b**, dibuja la diagonal.
4. Recorta el cuadrado de lado **b**. La figura que te queda divídela en dos, haciendo un corte por la diagonal, denomina **A** y **B** a cada una de esas partes.
5. Une las partes **A** y **B** por el lado donde pasaba la diagonal, pero en el sentido opuesto a como estaba antes.



i ii iii iv v vi

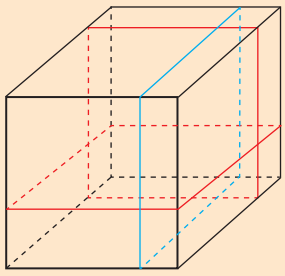
6. Nota que la figura **iv** y la figura **vi**, tienen la misma área.
7. Muestra que el área de **iv** es $\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$. Muestra que el área de **vi** es el área del rectángulo de lados $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.
8. Concluye que $(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$.

aplicando lo aprendido

1. Calcula el producto $\left[(x^2+1)+\sqrt{2}x\right]\left[(x^2+1)-\sqrt{2}x\right]$. (Ayuda: nota que es una suma por su diferencia).

2. Muestra que $(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2$ es un número entero.

3. Construye un cubo de lado **a+b**, con madera (o greda, o plasticina, o yeso, o cartulina, etc.) y realiza los cortes como muestra la figura. Nota que resultan 8 prismas, dos cubos y seis prismas rectos de base cuadrada. Estos últimos se pueden juntar en dos grupos de tres, ya que, cada uno de los grupos tiene cuerpos idénticos. Muestra que $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.



4. Muestra que $(1+\sqrt{2})^3+(1-\sqrt{2})^3$ es un número entero.

5. ¿Es cierto que $\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4} = xy$?

6. Desarrolla los productos:

   a) $(2xy-3x)^2$ **d)** $(x+y)(-x+y)$

   b) $(4x^2+5x)^2$ **e)** $(a+b+c)(a-b+c)$

   c) $(-a-b)^2$ **f)** $(x^2-y)(x^2+y)$

7. Recuerda que $(a+b)^2$ es la suma de los cuadrados de **a** y de **b** con el doble producto entre **a** y **b**. Calcula $(a+b+c)^2$. ¿Es verdadero que es la suma de los cuadrados de **a**, **b** y **c** con los dobles productos de pares de variables distintas?

8. Demuestra que el cuadrado de un número impar es también un número impar.

9. Muestra que la diferencia del cuadrado de un número entero, con el cuadrado de su antecesor es un número impar. (Haz esto de dos formas distintas).

10. Muestra que la suma de tres potencias consecutivas de 2, es divisible por 7. Muestra que la suma de tres potencias consecutivas de 3, es divisible por 13. ¿Podrías afirmar algo similar para la suma de tres potencias consecutivas de 4?

11. Dibuja en tu cuaderno un cuadrado de lado $a+b$, en él pinta los cuadrados de lados **a** y lado **b**. Muestra que si $a>0$ y $b>0$, jamás podrá pasar que $(a+b)^2$ sea igual a a^2+b^2. ¿Podrá ocurrir la igualdad, para valores negativos de **a** o de **b**?

12 Factorización: segunda parte

Amanda veranea en un campamento vacacional donde el terreno es un cuadrado de 130 m de lado. Ella se ha enterado que por litigios con los dueños de los terrenos vecinos, se perderán algunos metros cuadrados del terreno original, de hecho el terreno seguirá siendo cuadrado, pero ahora será de lado 128 m. Ella quiere calcular la cantidad de metros cuadrados que se perdieron en el litigio y propone que el terreno perdido es:

$$(130^2 - 128^2)m^2$$

Cuando la muchacha se disponía a calcular el cuadrado de 130, su hermano mayor le recordó que la diferencia de dos cuadrados es lo mismo que una sola multiplicación. Con esta información Amanda expresó lo siguiente: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, por esto:

$$130^2 - 128^2 = (130+128)(130-128) = 258 \cdot 2 = 516$$

Por lo tanto, el área que se perdió es de 516 m^2, que corresponde a un terreno rectangular de 12 m por 43 m, lo que es bastante grande.

nota

Escribir un trinomio como cuadrado de binomio, y escribir un binomio como la suma por su diferencia, también se llama factorizar.

Para resolver problemas como el de Amanda, y muchos otros, es importante saber reconocer polinomios que se pueden escribir como productos notables. Por ejemplo,

$$25x^2 - 36y^2 = (5x)^2 - (6y)^2 = (5x-6y)(5x+6y)$$

Lo mismo ocurre con el cuadrado de binomio. Si lanzas una piedra hacia arriba con velocidad $20\frac{m}{s}$, la altura de la piedra (medida en metros) en el segundo t es, más o menos, $h = -5(t^2 - 4t + 4) + 20$. Sin embargo, si uno es observador, nota que el trinomio del paréntesis es un cuadrado de binomio. De hecho,
$t^2 - 4t + 4 = t^2 - 2 \cdot 2t + 2^2 = (t-2)^2$

Por lo tanto, la altura es $h = 20 - 5(t-2)^2$
Lo que permite saber cuál es la altura máxima de la piedra. De hecho,

$$20 - 5(t-2)^2$$

es siempre menor o igual a 20. Por lo tanto, la altura máxima es $20m$ y se alcanza cuando $(t-2) = 0$, es decir, cuando han pasado 2 segundos.

actividades

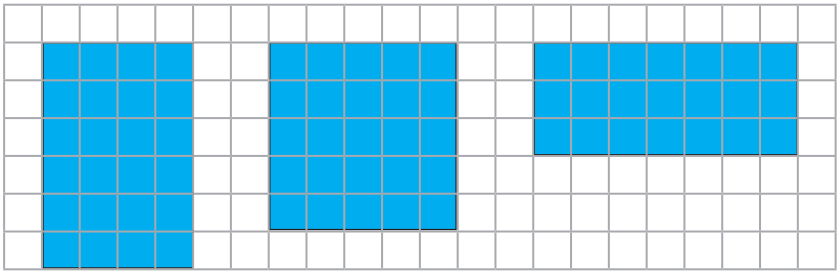
1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $9x^2 - 4y^2$ **b)** $4x^2 + 12xy^2 + 9y^4$ **c)** $x^2 + x + \frac{1}{4}$ **d)** $x^2 - 5x + \frac{25}{4}$

2. Para calcular $(10,1)^2$, y no se tiene calculadora a mano, se puede recurrir a que el cuadrado de 10 es fácil de calcular, de hecho es 100, del mismo modo que el cuadrado de 0,1 es 0,01, por lo tanto el cuadrado de 10,1 es $100 + 2 + 0,01 = 102,01$. Explica tú el razonamiento.

13 El cuadrado es lo máximo

Imaginemos que te heredan un terreno rectangular en Chiloé y lo puedes cerrar con un alambre de 200 metros. ¿De qué forma lo eligirías? A continuación mostramos modelos geométricos de terrenos que se pueden encerrar con un cable de 200 *m*. Cada celda de la cuadrícula representa un cuadrado de lado 10 *m*.

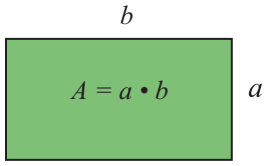


cuidado

Si una propiedad es verdadera en muchos casos, no es efectivo que necesariamente sea cierta siempre.

Alguien podría decir que da lo mismo, que los terrenos son iguales, pero si nos fijamos con atención hay algunos que encierran más celdas que otros, el primero envuelve 24, el segundo 25 celdas y el tercero sólo 21. Te invitamos a que construyas muchos rectángulos que cumplan la condición de ser encerrados por un cable de 200 *m*, y luego sigas leyendo, pensando en la respuesta a la pregunta, ¿cuál encierra mayor área?

Por ejemplo si el terreno lo queremos para sembrar, es muy importante escoger aquel que cubra mayor área. Si tú ya has hecho bastantes ejemplos de modelos de terrenos, te habrás dado cuenta de que ninguno encierra más área que 2 500 m^2 es decir, el terreno cuadrado de lado 50 *m*. Sin embargo, por grande que sea la cantidad de modelos que hayamos hecho, es imposible hacerlos todos, pues son infinitos los rectángulos de perímetro 200, de modo que es necesario estudiar el caso en total generalidad y no casos particulares, por muchos que sean. Consideremos un rectángulo de lados a y b y de perímetro 200, es decir,



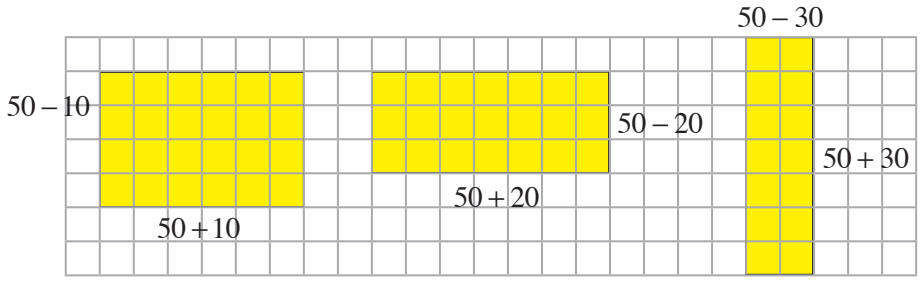
$$a+b+a+b=2a+2b=2(a+b)=200$$

Por lo tanto, $a+b=100$ y $\frac{a+b}{2}=50$. Es decir, el promedio de los lados es 50.

actividades

1. Explica por qué existen infinitos rectángulos de perímetro 200.
2. ¿Cuántos rectángulos de lados enteros, tienen perímetro 200?
3. Con las notaciones de arriba, ¿es cierto que $\mathbf{b}=100-\mathbf{a}$? ¿Es cierto que el área del rectángulo es $100\mathbf{a}-\mathbf{a}^2$?

Al ser constante el promedio entre los lados del rectángulo, si un lado mide más de 50, el otro mide menos que 50, pero en la misma cantidad para que el promedio se mantenga. Por ejemplo, si uno se pasa en 10 de los 50 el otro debe estar 10 abajo de los 50, así tenemos el rectángulo de lados 60 y 40. Abajo mostramos unos ejemplos de esto último.

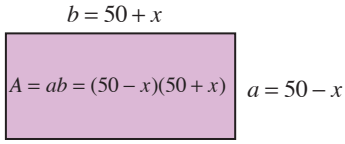


En general, si un rectángulo de lados a y b tiene perímetro 200, entonces sus lados se pueden escribir como $b = 50 + x$ y $a = 50 - x$, donde a es el ancho y b es el largo. De hecho, como $a + b = 100$ se tiene que $b = 100 - a$ y por lo tanto,

$$b = 50 + (50 - a)$$

y también

$$a = 50 - 50 + a = 50 - (50 - a)$$



Por lo tanto si anotamos, $x = (50 - a)$. Se tiene que $a = 50 - x$ y $b = 50 + x$.

Como el área del rectángulo es ab, se tiene que el área es

$$A = (50 - x)(50 + x) = 2\ 500 - x^2$$

Como x^2 es siempre positivo o cero la forma de que el área $A = 2\ 500 - x^2$ sea mayor, es cuando $x = 0$. Pero como $a = 50 - x$ y $b = 50 + x$, la forma de obtener el rectángulo de máxima área es $a = 50 - 0 = 50$ y $b = 50 + 0 = 50$. Es decir, el rectángulo de perímetro 200 de área máxima es el cuadrado de lado 50. Entonces si te dieran a elegir un terreno rectangular, que se pueda encerrar con un alambre de 200 m, debieras elegir el cuadrado.

actividades

1. Supongamos que el terreno rectangular, en vez de tener un perímetro de 200 m, tiene un perímetro de 240 m. ¿Cuál sería el de mayor área?

2. Si un rectángulo de lados **a** y **b** tiene perímetro 32, ¿cuál es el valor de $\mathbf{a} + \mathbf{b}$? ¿Cuál es el valor de $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$? ¿Es cierto que los lados se pueden escribir en la forma $\mathbf{a} = 8 - \mathbf{x}$ y $\mathbf{b} = 8 + \mathbf{x}$? ¿Cuál sería el valor de **x**? Escribe el área en función de **x**, ¿cuál es el rectángulo de área máxima de perímetro 32?

3.* Si un rectángulo de lados **a** y **b** tiene perímetro **P**, Escribe $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$ en términos de P. ¿Es cierto que los lados se pueden escribir en la forma $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{P}}{4} - \mathbf{x}$ y $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{p}}{4} + \mathbf{x}$? ¿Cuál sería el valor de **x** en términos de **a** y **b**? Escribe el área en términos de **P** y **x**. ¿Cuál es el rectángulo de área máxima de perímetro **P**?

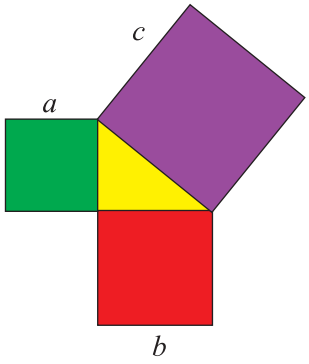
14 Demostración del Teorema de Pitágoras

Ya llevamos bastante tiempo mencionando y aplicando el teorema de Pitágoras, para resolver problemas referentes a triángulos rectángulos. Ahora daremos una demostración que permite asegurar la validez de este resultado, que se le atribuye a Pitágoras, pero que no se sabe a ciencia cierta si es efectivamente de él o de uno de sus discípulos.

Una demostración es una explicación matemática de la veracidad de un resultado, utilizando propiedades asumidas como ciertas, ya sea porque fueron demostradas antes o son verdades asumidas por todos, como postulados iniciales, llamados axiomas.

Para esta demostración que daremos, necesitamos dos resultados por ti conocidos.

El primer resultado es: "El área de un cuadrado de lado x es x^2", y el segundo resultado, "El área de un triángulo rectángulo de catetos y y z es $\frac{yz}{2}$."



Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado formado en la hipotenusa tiene por área la suma de las áreas de los cuadrados formados en los catetos.

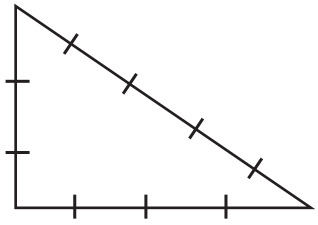
O también se puede decir:

Teorema de Pitágoras

Si ΔABC es un triángulo rectángulo en que sus catetos miden a y b y su hipotenusa c, entonces $a^2 + b^2 = c^2$.

Por ejemplo, el triángulo rectángulo de catetos de medidas 3 cm y 4 cm, e hipotenusa que mide 5 cm, satisface la relación:

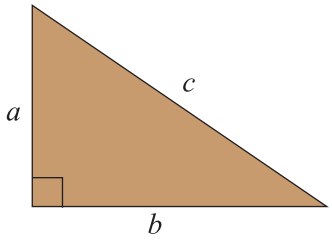
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$



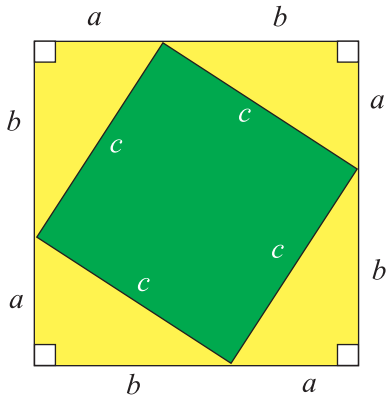
Pero, que el teorema se compruebe en un caso particular, no quiere decir que sea cierto siempre. Es necesario dar una demostración general, que considere todos los triángulos rectángulos. Lo que haremos es tomar un triángulo rectángulo cualquiera y comprobaremos que la relación del teorema se cumple.

Demostración:

Consideremos un triángulo rectángulo de catetos a, b e hipotenusa c, como muestra la figura a continuación.



Ahora dispongamos cuatro triángulos idénticos a él, como muestra la figura, formando un cuadrado de lado $a+b$.



La figura pintada de verde, es un cuadrilátero en que todos sus lados miden lo mismo, además el ángulo interior en cada vértice es recto. Por lo tanto, la figura verde es un cuadrado de lado c. Ahora bien, el área de la figura pintada de amarillo es, por un lado, el área del cuadrado exterior menos el área del cuadrado interior, esto es, $(a+b)^2 - c^2$ y por otro es cuatro veces el área del triángulo inicial, o sea, $4\left(\frac{ab}{2}\right)$. Es decir,

$$(a+b)^2 - c^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right)$$

desarrollando el cuadrado de binomio resulta:

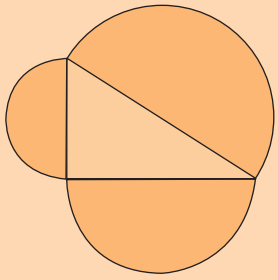
$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = 2ab$$

sumando a ambos lados $c^2 - 2ab$ resulta:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

que es exactamente lo que queríamos probar.

actividades



1. En la demostración se dice "además el ángulo interior en cada vértice es recto" refiriéndose al cuadrilátero verde. Explica por qué, efectivamente, el ángulo interior del cuadrilátero es recto, en cada vértice.
2. Consideremos la siguiente proposición: "El área de una semicircunferencia que tiene por diámetro la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la suma de las áreas de las semicircunferencias que tienen por diámetros los catetos del triángulo rectángulo". ¿Es cierta esta proposición?
3. Según el Teorema de Pitágoras enunciado en la página anterior, ¿es cierto que si en un triángulo de lados **a**, **b** y **c** se cumple $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$, entonces el triángulo es rectángulo?

información en los medios

SENSIBILIDAD A LOS MEDICAMENTOS

En medicina se asigna un valor numérico a la sensibilidad de un paciente cuando se le ha administrado cierta medicina. Este número se relaciona con el grado de eficacia de la droga en el paciente. Si C es el consumo máximo permitido de la medicina, la sensibilidad es: $S=DC-D^2$ donde D denota la cantidad de droga que se le administra al paciente. Si factorizamos esta expresión por D resulta: $S=D(C-D)$. Lo que muestra que la sensibilidad es 0, si la cantidad que se administra es C, y por supuesto cuando D=0.

La pregunta que es importante resolver es: ¿cuál es la cantidad D de droga que hay que administrar, para obtener la máxima sensibilidad?

*** Solución:**

Para responderla usaremos los conocimientos de esta unidad:

$$S=DC-D^2=-(-DC+D^2)=-(D^2-DC)=-(D^2-2D\cdot\frac{C}{2})$$

¿Qué le falta a $D^2-2D\cdot\frac{C}{2}$ para ser un cuadrado de binomio? La respuesta es $\frac{C^2}{4}$. Completemos el cuadrado del binomio, pero quitamos lo que agregamos, para que la igualdad siga siendo cierta:

$$S=\frac{C^2}{2}-\frac{C^2}{4}+DC-D^2=\frac{C^2}{4}-\left(\frac{C}{2}-D\right)^2$$

Entonces vemos que S es máximo cuando $\frac{C}{2}-D=0$, es decir, la cantidad de droga que permite la máxima sensibilidad es la mitad del consumo máximo.

apliquemos

1. ¿Es cierto que la sensibilidad es la misma cuando se administra $\frac{C}{4}$ ó $\frac{3C}{4}$ de una deteminada droga?

2. Un trío de números enteros positivos **a**, **b** y **c**, que satisfacen $\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2=\mathbf{c}^2$ se llama *trío pitagórico*. Por ejemplo, 5,12,13 es un trío pitagórico.

a) Si **a**, **b** y **c**, es un trío pitagórico, y dos de ellos son pares, entonces muestra que el tercero también es par.

b) Si **a**, **b** y **c**, es un trío pitagórico, entonces muestra que no pueden ser todos impares.

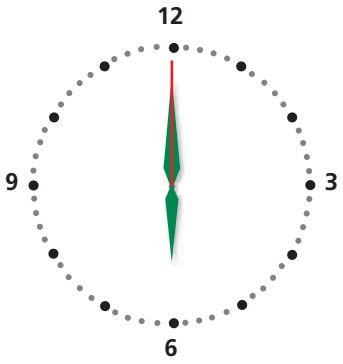
c)* Si $\mathbf{c}^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2$, entonces muestra que $(\mathbf{c}-\mathbf{b})(\mathbf{c}+\mathbf{b})=\mathbf{a}^2$.

d)* Si $\mathbf{c}^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2$, entonces muestra que no puede ser que **a** y **b** sean impares y **c** par.

e)* Sean **p**,**q** dos números enteros positivos, con $\mathbf{p}>\mathbf{q}$. Considera $\mathbf{a}=2\mathbf{pq}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}^2-\mathbf{q}^2$ y $\mathbf{c}=\mathbf{p}^2+\mathbf{q}^2$. Comprueba que **a**, **b** y **c** es un trío pitagórico.

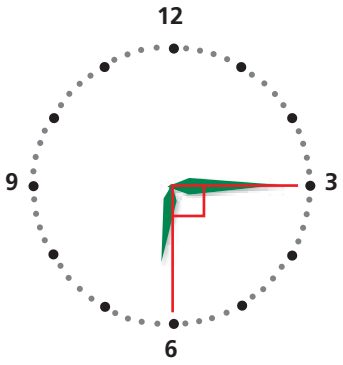
15 Función lineal y función afín

Cuando el reloj marca las seis de la tarde, los punteros del reloj forman un ángulo extendido.



¿Habrá un momento, entre las 6 y las 7, en que los punteros del reloj formen un ángulo recto? ¿A qué hora exacta ocurre?

Uno ojo distraido diría, que a las seis y cuarto, es la primera vez después de las seis, que obtendremos un ángulo recto. Esto sería cierto si el horario se quedara quieto en el seis a medida que avanza el tiempo, lo cual es falso, el horario avanza, lento pero seguro. Así que a las seis y cuarto el ángulo entre los punteros del reloj es un poquito mayor que un ángulo recto.



Pero como a las 6 formaban un ángulo extendido y antes de las 6:45 el minutero pasó por encima del horario, es decir el ángulo fue cero, necesariamente hubo un momento entre las 6 y las 6:45 en el que el ángulo fue recto. De hecho, moviendo experimentalmente las agujas el reloj, podemos asegurar que ese momento está entre las 6:15 y las 6:30.

actividades

1. Muestra dos momentos entre las 6:15 y las 6:30, que se diferencien en 5 minutos, donde puedas asegurar que los punteros forman un ángulo recto en algún momento del intervalo mencionado.
2. ¿A las 7:05 los punteros forman un ángulo extendido?

El minutero da una vuelta por hora, es decir en 60 minutos, barre un ángulo de 360°, por lo tanto recorre 6° en cada minuto, es decir cuando hayan pasado t minutos, el minutero recorre $6t$ grados. Anotaremos:

$$m(t) = 6t$$

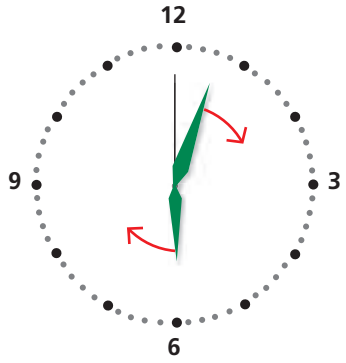
para denotar los ángulos que avanzó el minutero en t minutos.

Por su parte, el horario, recorre la $\frac{1}{12}$ parte de una vuelta completa en una hora. Es decir, recorre $\frac{360}{12}$ grados en 60 minutos, o lo que es lo mismo, el horario recorre 30° en 60 minutos. Por lo visto, tenemos que el horario recorre $\frac{1}{2}$ grado por cada minuto. Así tenemos que el horario recorre $\frac{1}{2}t$ grados, cuando pasan t minutos.

Anotaremos

$$h(t) = \frac{1}{2}t$$

para denotar los ángulos que avanzó el horario en t minutos.



Es importante notar que a medida que el tiempo avanza, el minutero gira para achicar el ángulo entre las manecillas, en cambio el horario gira para agrandar el ángulo entre las manecillas del reloj.

actividades

1. Si el horario se quedara quieto a medida que avanza el tiempo, ¿cuánto mediría el ángulo entre el horario y el minutero después de **t** minutos?
2. Si el minutero se quedara quieto a medida que avanza el tiempo, ¿cuánto mediría el ángulo entre el horario y el minutero después de **t** minutos?
3. ¿Cuál es el ángulo entre el horario y el minutero a las seis y cuarto?
4. ¿Cuál es el ángulo entre el horario y el minutero a las seis y media?

Como hemos visto, el avance del minutero hace que el ángulo entre las manecillas del reloj disminuya de los 180° iniciales, mientras que el avance del horario hace que el ángulo aumente de los 180° iniciales. Por lo tanto, el ángulo entre las manecillas del reloj, después de t minutos, es:

$$\theta(t) = 180° - m(t) + h(t)$$

o lo que es lo mismo

$$\theta(t) = 180° - 6t + \frac{1}{2}\mathrm{t}$$

o dicho de otro modo:

$$\theta(t) = 180° - \frac{11}{2}t$$

Por lo tanto para saber a qué hora los punteros del reloj forman un ángulo recto, basta preguntarle a θ para qué valor de t vale 90°. Es decir, para cuál valor de t, se cumple que $\theta(t) = 90$, es decir, basta resolver la ecuación:

$$90 = 180° - \frac{11}{2}t$$

Y es lo que haremos a continuación:

$$90 = 180° - \frac{11}{2}t$$

$$-90 = -\frac{11}{2}t$$

$$90 = \frac{11}{2}t$$

$$\frac{2}{11} \times 90 = t$$

$$t = 16,\overline{36}$$

Es decir, cuando el reloj marca las 6 horas 16 minutos 21 segundos y 4 décimas de segundo, aproximadamente los punteros del reloj forman un ángulo recto.

actividades

1. Si para algún **t** se cumple que θ(**t**) = 0. ¿En qué posición relativa se encuentran las manecillas del reloj?
2. Si evalúas θ(40) obtienes un número negativo. ¿Cuál es el significado del número negativo respecto a la situación que estamos modelando?
3. Después de las 6:00, ¿cuál es el primer momento que las manecillas del reloj vuelven a formar un ángulo extendido?

aplicando lo aprendido

1 La siguiente máquina transforma números en otros números, al número que entra por la derecha lo multiplica por 10 y al resultado le suma 1, y el número que resulta sale por la izquierda.

a) ¿Cuál número sale por la izquierda, si por la derecha entra –4?

b) ¿Cuál número entró por la derecha si por la izquierda salió $\frac{1}{2}$?

c) Si por la izquierda sale un número racional, ¿por la derecha entró un número racional?

d) Si por la izquierda sale **t**, ¿cuál número entró por la derecha?

2 La siguiente máquina transforma a cada número que entra por la derecha en otro número que sale por la izquierda.

Supón además que tiene la siguiente propiedad:

[C] *Si la máquina transforma* **a** *en* **b** *y transforma* **x** *en* **y,** *entonces a* **a + x** *lo transorma* **b + y.**

a) Muestra que la máquina del ítem anterior no cumple **[C]**.

b) Muestra que la máquina que transforma cada número en su doble, si cumple **[C]**.

c) Muestra que la máquina que transforma **t** en $180 - \frac{11}{2}\mathbf{t}$ no cumple **[C]**.

d) Muestra que la máquina que transforma **t** en 6**t** si cumple **[C]**.

e) Muestra que la máquina que transforma **t** en $\frac{1}{2}\mathbf{t}$ si cumple **[C]**.

f) Muestra que si una máquina cumple con **[C]**, entonces al cero no le hace nada, es decir, transforma el cero en el cero.

g) Muestra que si una máquina cumple con **[C]**, entonces a 2**a** lo transforma en 2**b**.

h) Muestra que si una máquina cumple con **[C]**, entonces a **-a** lo transforma en **-b**.

16 Función

Una función del conjunto de los números reales en el conjunto de los números reales, es una transformación de números reales. Es como una máquina que recibe números reales por la derecha y los entrega por la izquierda. Si la función (o la máquina) la denotamos por f y la función transforma a en b, se suele escribir $f(a) = b$ y se lee f de a es b o también f evaluado en a es b. También se dice que b es la imagen de a vía f, en el caso en que la función se subentiende, entonces decimos que b es la imagen de a.

$f(a) = b$

Por ejemplo, la forma en que depende el ángulo (θ) de las manecillas del reloj después de las 6:00, de los minutos trancurridos (t), lo podemos pensar como la función que transforma t en $\theta(t) = 180 - \frac{11}{2}t$.

Algunas funciones son importantes en matemáticas, ya sea porque modelan situaciones de la vida real, o porque dentro de la propia matemática son interesantes. Una de ellas es la función **identidad**. La función identidad es aquella función que a cada número lo transforma en si mismo, es decir, lo deja igual. Es decir, la función identidad, llamémosla I, transforma x en x, es decir

$$I(x) = x$$

recuerda

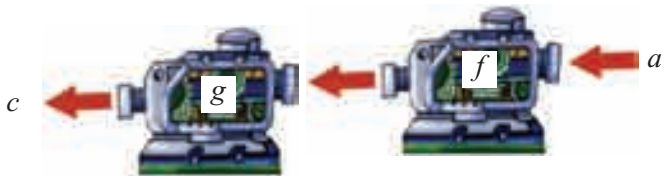
Para cualquier número real **x** se tiene que $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Claramente esta función es muy poco interesante para la vida cotidiana, pero dentro de la matemática es muy importante, pues en cierto sentido hace lo mismo que el 1 dentro del mundo de los números, pero I lo hace dentro del mundo de las funciones.

actividades

1. Si **f** es una función tal que **f** (0) = 0, **f** (1) = 1, **f** (2) = 2. ¿Puedes afirmar que **f** es la función identidad?
2. Considera la función **g** que transforma a cualquier número real en cero. Es decir, para cualquier número **x** se tiene que **g**(**x**) = 0. ¿Es cierto que **g**(**x** + **y**) = **g**(**x**) + **g**(**y**)?
3. Considera la función **g** que transforma a cualquier número real en 1. Es decir, para cualquier número **x** se tiene que **g**(**x**) = 1. ¿Es cierto que **g**(**x** + **y**) = **g**(**x**) + **g**(**y**)?

Si tenemos dos funciones, digamos f y g estas las podemos concatenar, es decir si f transforma a en b y g transforma b en c, entonces la concatenación transforma a en c.



Pero si una de ellas es la identidad, entonces la función que se obtiene al concatenar es la misma que la del principio. Es decir, concatenar con la identidad no hace nada. Del mismo modo que multiplicar por 1 no hace nada.

Las funciones que transforman todos los números reales en un único número se llaman **funciones constantes**.

Si una función **separa las sumas**, es decir, para cualquier par de números reales x, y se cumple que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ y además **saca escalares**, es decir $f(xy) = f(x)\, y$ se les llama **funciones lineales**. Por ejemplo, la función $f(t) = 3t$ es una función lineal, de hecho,

$$f(x + y) = 3(x + y) = 3x + 3y = f(x) + f(y)$$
$$f(xy) = 3xy = (3x)y = f(x)y$$

Sin embargo, la función real $f(z) = 3z + 1$ no es lineal. De hecho, $f(0) = 1$ y $f(1) = 4$, pero $f(0 + 1) \neq f(0) + f(1)$.

Supongamos que L es una función lineal, y denotemos por m la imagen de 1 vía L, es decir, $L(1) = m$, ¿Cuánto es $L(x)$? Notemos que

$$L(x) = L(1 \cdot x) = L(1)x = mx$$

Es decir, si L es lineal, entonces existe un número real m tal que $L(x) = mx$, para cualquier valor de x.

actividades

1. Si **y** es un número real, fijo pero cualquiera. ¿Es cierto que la función **f** (**m**) = **my** es lineal?
2. Demuestra que si **f** es lineal, entonces **f** (0) = 0.
3. Si concatenas dos funciones lineales, el resultado, ¿es una función lineal?
4. ¿Hay alguna función constante que sea lineal?
5. ¿Es la identidad una función lineal?

Por ejemplo, si pensamos en el ángulo que recorre el minutero de un reloj en t minutos, esto es $m(t) = 6t$ y en el ángulo que recorre el horario después de t minutos, esto es $h(t) = \frac{1}{2}t$, notaremos que en ambos casos se trata de funciones lineales. Sin embargo, el ángulo entre los punteros del reloj, después de t minutos de las 6:00 es:

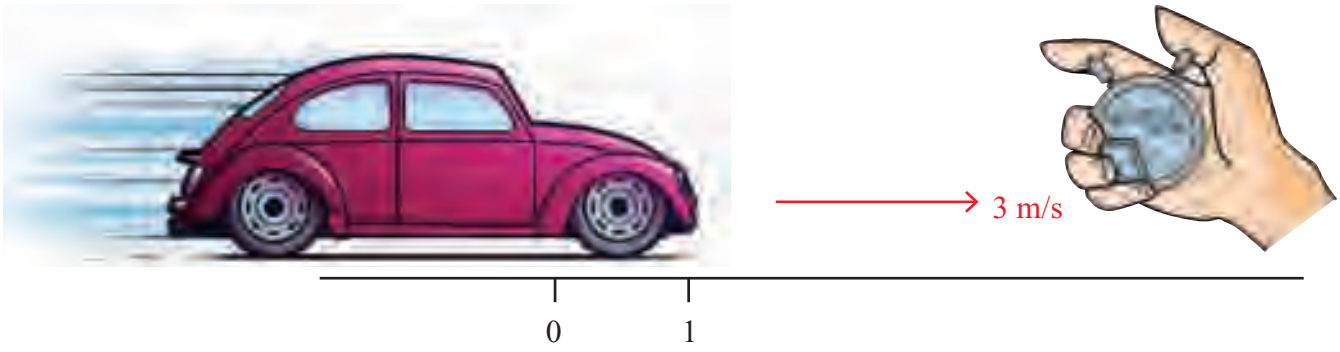
$$\theta(t) = 180 - \frac{11}{2}t$$

la cual no es lineal. Si no que resulta de sumar una constante (180, en nuestro caso) a la función lineal

$$a(t) = \frac{-11}{2}t$$

A esas funciones se les llama **funciones afines**, es decir, una función afín difiere de una función lineal en una constante. Es decir, si a la función lineal, digamos $f(x) = mx$ le sumamos una constante, digamos n, la función que se obtiene, esto es $g(x) = mx + n$, es una función afín. En el caso en que $n = 0$, entonces $g(x) = mx = f(x)$, es decir, toda función lineal es una función afín, pero hay funciones afines que no son lineales.

Si consideranos un móvil que se mueve en línea recta a velocidad constante, por ejemplo, que recorre 3 metros en cada segundo. Si anotamos un punto del camino con O, y cuando pasa el móvil por O echamos a correr el cronómetro, la distancia que separa al móvil del punto O es exactamente $d(t) = 3t$, después de t segundos, donde $d(t)$ está medido en metros.



actividades

1. Si en el ejemplo de arriba, echamos a correr el cronómetro cuando el móvil pasa por la marca de 1 **m**, y **D**(**t**) es la distancia que separa al móvil de **O**, cuando el cronómetro marca **t** segundos. Describe **D**(**t**) en términos de **t**. ¿Es **D** una función lineal en **t**? ¿Es **D** afín?

aplicando lo aprendido

1 Una taxista cobra $200 por los primeros 200 m de recorrido. Por cada 200 m que recorre después de los 200 m iniciales, la cuenta aumenta en $90. Describa la cuenta **D**(**x**), medida en pesos, para cada distancia recorrida **x**, medida en metros. ¿Es **D** una función afín? ¿Es **D** lineal?

2 Sean **y** y **x** dos variables relacionadas en proporción directa. ¿Es cierto que y es una función lineal en **x**?

3 Se sabe que el valor de la cuenta de gas, medido en pesos, en una casa de Santiago, es una función afín del volumen de gas consumido, medido en m^3. En la familia de los González - Valenzuela el mes de marzo de 2009, la cuenta de gas salió 26 mil pesos y el consumo fue de 10 m^3, al mes siguiente consumieron medio m^3 menos que en marzo y el valor de la cuenta fue de $24 950.

a) ¿Cuál es el cobro fijo de la empresa de gas?

b) ¿Cuál es el valor del m^3 de gas?

c) ¿Cuál es el valor de la cuenta, si un mes se consume el doble de lo que se consumió en marzo?

4 Si dos móviles se mueven a la misma velocidad constante en la misma línea recta, ¿en cada instante qué puedes decir de la distancia que los separa?

5 Si se deja caer una piedra de una altura de 100 **m** y si se desprecia la resistencia del aire, se sabe que la velocidad **v** de la piedra (medida en **m/s**) es una función afín respecto del tiempo (medido en **s**) que se dejó caer la piedra. Si después de 2 **s** de soltada la piedra la velocidad de la piedra es de 18,6 **m/s**. ¿Cuál es la velocidad con que la piedra llega al suelo? ¿Es **v** una función lineal del tiempo?

6 La siguiente tabla muestra la población total de Chile, según los censos de 1982, 1992 y 2002.

Año	Población
1982	11 329 736
1992	13 348 401
2002	15 116 435

Fuente: Biblioteca del Congreso Nacional de Chile. www.bcn.cl

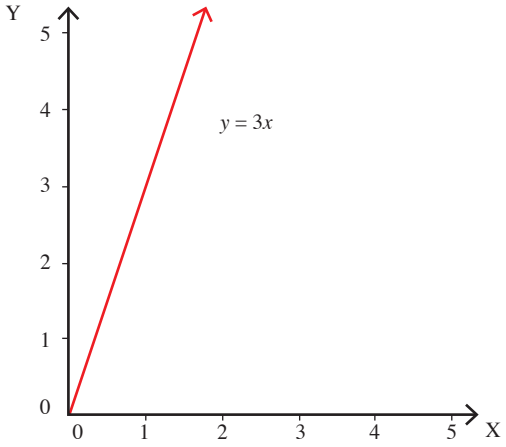
¿Es la cantidad de gente en Chile una función afín del tiempo?

7 Si **x** e **y** son variables relacionadas en proporción inversa, entonces, ¿es cierto que **y** es una función afín de **x**?

8 Considera los ejes coordenados y la recta **L** paralela al eje **X**, que pasa por el 3 del eje **Y**. Considera al área que hay entre la recta **L** y el eje **X**, desde el eje **Y** hasta la recta paralela al eje **Y** que pasa por **x**. Muestra que el área en función de **x** es lineal.

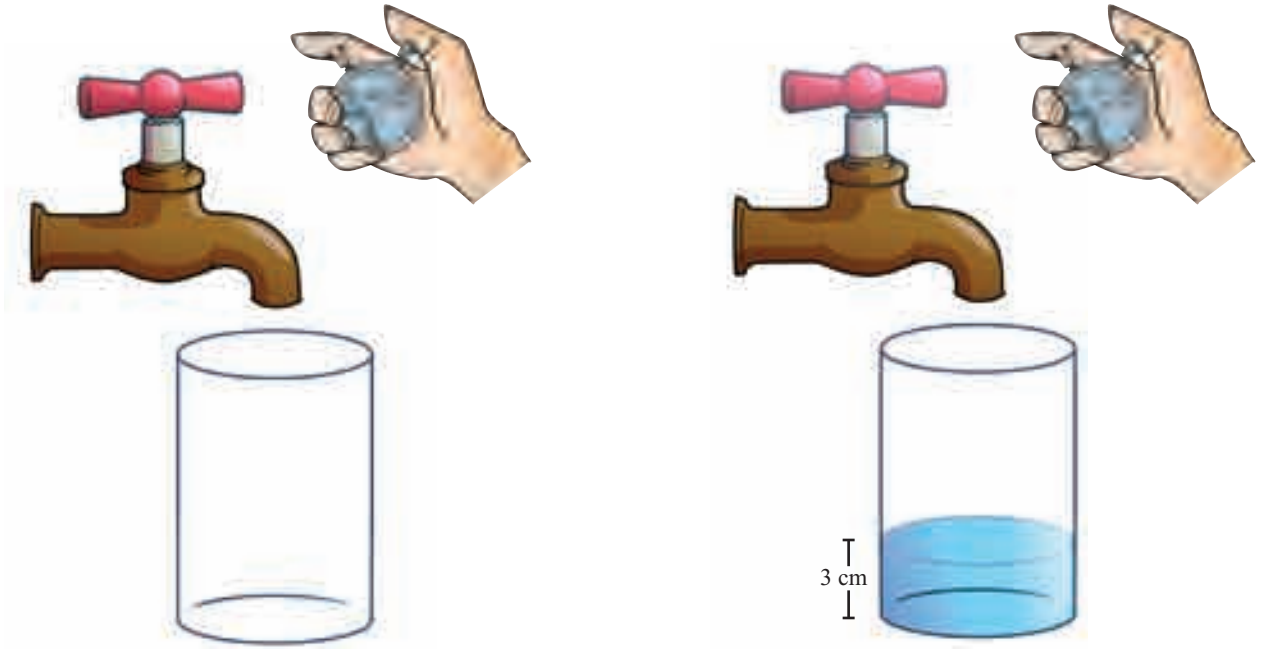
17 Gráfico de la función afín

Del curso anterior conoces que la relación proporcional directa, entre dos variables x e y implica que existe k positivo tal que $y = kx$. Veamos un ejemplo en el siguiente gráfico:

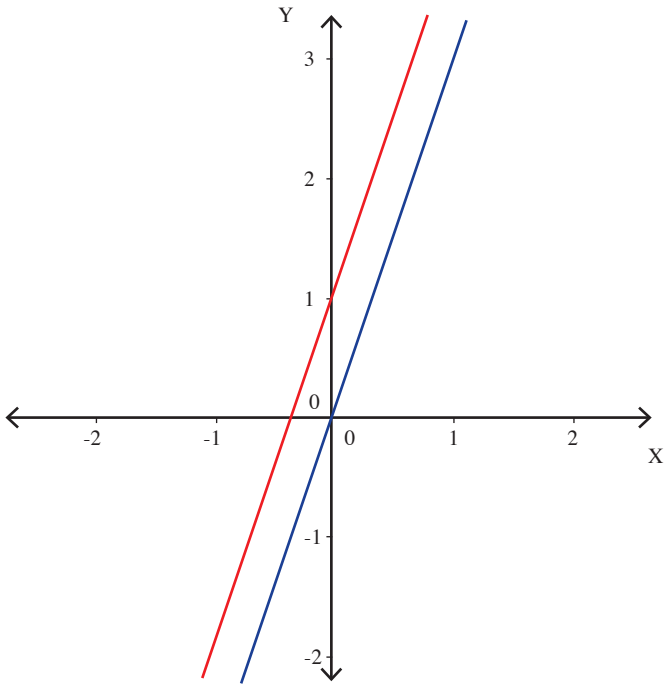


En nuestro ejemplo mostramos $y = 3x$, o también $y(x) = 3x$.

Si un recipiente cilíndrico vacío, que se llena con agua a ritmo constante, de tal suerte que al cabo de un minuto la altura del nivel del agua es 3 cm, entonces la altura del nivel del agua (y) en cada minuto x es $y(x) = 3x$. Que corresponde al mismo gráfico de arriba. En cambio, si el recipiente ya tenía agua al inicio del llenado, y la altura del nivel de agua era de 1 cm, entonces la altura del nivel de agua y en cada instante x será de $y(x) = 3x+1$.



Revisemos el siguiente gráfico, para el cual hemos usado el software **Geogebra** que se puede descargar gratuitamente en www.geogebra.org.

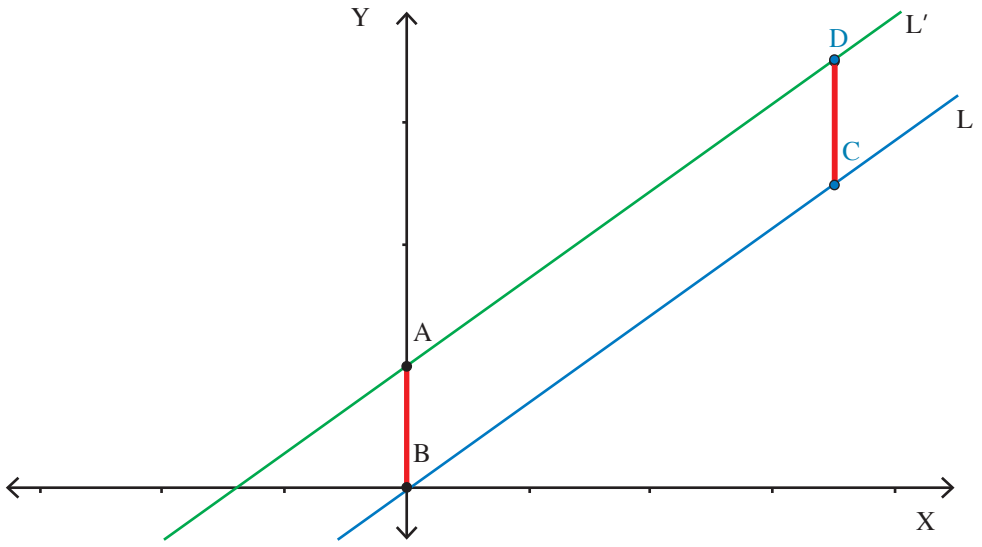


La recta azul es el gráfico de $y(x) = 3x$ y el rojo es el de $y(x) = 3x + 1$. Más generalmente, el gráfico de $y(x) = 3x + n$ será la recta que resulta al desplazar rígidamente el gráfico de $y(x) = 3x$ en una medida de n hacia arriba si n es positivo, $o - n$ unidades hacia abajo si n es negativo. Es decir, el gráfico de $y(x) = 3x + n$ es una recta paralela al gráfico de $y(x) = 3x$ y que corta al eje Y en n.

Con mayor generalidad, si m y n son números reales, consideramos las funciones $y(x) = mx$ y $y'(x) = mx + n$, si evaluamos en un punto x_0 cualquiera y restamos los valores correspondientes se obtiene:

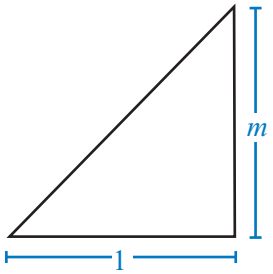
$$y'(x_0) - y(x_0) = mx_0 + n - mx_0 = n$$

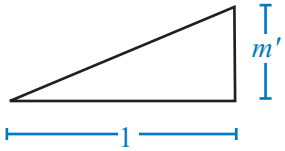
Es decir, la diferencia en la dirección del eje Y es constante, no depende del punto x_0 donde se evalúa. Es decir, las rectas no se intersectarán, a menos que $n = 0$ que en ese caso los gráficos serían el mismo. Es decir, los gráficos de $y(x) = mx$ y de $y(x) = mx + n$ son rectas paralelas. Por otra parte, como el gráfico de $y(x) = mx + n$ y el gráfico de $y(x) = mx + n'$ son rectas paralela al gráfico de $y(x) = mx$, entonces los gráficos de $y(x) = mx + n$ y de $y(x) = mx + n'$ son rectas paralelas.



En el gráfico se muestra la recta L, que corresponde al gráfico de $y(x) = mx$ y la recta L' que corresponde al gráfico de $y(x) = mx + n$, vemos que la distancia entre C y D es la misma que la que hay entre A y B y que como vimos es la misma que entre cualquier par de puntos que resultan de intersectar una recta paralela al eje Y con las rectas L y L'.

Sabemos que para cualquier $m \in \mathbb{R}$, el gráfico de $y(x) = mx$ es una recta que pasa por el origen O. Ahora bien si $0 < m' < m$ consideremos las rectas que resultan de los gráficos de $y(x) = mx$ y $y(x) = m'x$. Entonces al evaluar en $x = 1$ en ambas rectas obtenemos m y m' respectivamente en el valor de y. Por lo tanto, el número m produce cambios en el ángulo que forma la recta con el eje X. Es decir, cuando se avanza de 0 a 1 en el eje de las X, en un caso se avanza de 0 a m en el eje de las Y y en el otro caso se avanza de 0 a m' en el eje de las Y. Es decir, en el caso de $y = mx$ se obtiene una inclinación más pronunciada que en el caso $y = m'x$.

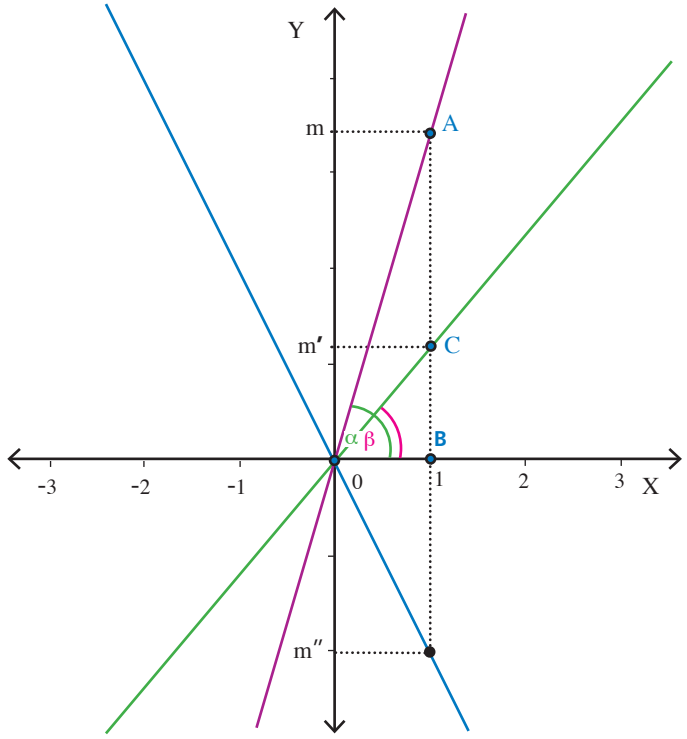




actividades

1. Si **m** = 0, ¿cuál es el gráfico de **y**(**x**) = **mx**?
2. Si **m** = 0, ¿cuál es el gráfico de **y**(**x**) = **mx** + **n**?
3. ¿Cuál es el ángulo que forma el gráfico de la función identidad?
4. ¿Es el eje **X** el gráfico de una función lineal?
5. ¿Es el eje **Y** el gráfico de una función lineal?

En el caso de la página anterior, el ángulo β mide menos que el ángulo α.



Por otra parte, si m'' es negativo, entonces la recta que es el gráfico de $y(x) = m''x$ tiene valores negativos de Y al evaluar en valores positivos de X. En la unidad de geometría, denominaremos a los puntos que están arriba del eje X y la derecha del eje Y como primer cuadrante, y a los que están abajo del eje X y a la derecha del eje Y como cuarto cuadrante. Por lo tanto, el gráfico de $y(x) = mx$ es una recta que pasa por el primer cuadrante si $m > 0$ y por el cuarto cuadrante si $m < 0$.

actividades

1. Realiza el gráfico de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{f(t)} = 3$ **b)** $\mathbf{y(s)} = -\frac{5}{6}$ **c)** $\mathbf{f(x)} - \sqrt{2}$

d) $\mathbf{y(g)} = 4\mathbf{g} - 3$ **e)** $\mathbf{s(f)} = \frac{5\mathbf{f}}{6} + 3$ **f)** $\mathbf{x(f)} = -\frac{-\mathbf{f} + 6}{6}$

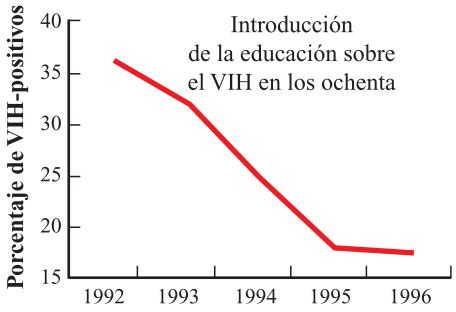
2. ¿Cuál es el ángulo entre el gráfico de $\mathbf{y(t)} = \mathbf{-t}$ y el gráfico de la función identidad?

3. **L** es el gráfico de la función $\mathbf{y(x)} = -\frac{3}{4}\mathbf{x} + 3$. ¿Cuál es la función lineal cuyo gráfico es una recta paralela a **L**?

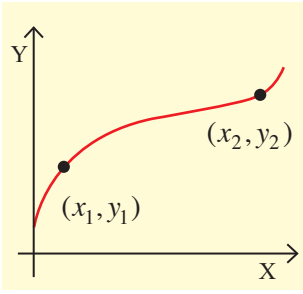
4. Un triángulo rectángulo isósceles tiene el vértice del ángulo recto en el origen de coordenadas, otro vértice en la parte positiva del eje **X** y el otro en la parte negativa del eje **Y**. Encuentra una función afín cuyo gráfico contenga a la hipotenusa del triángulo.

18 Interpretación de gráficos

El siguiente gráfico muestra la predominancia del virus VIH-SIDA en personas de 20 a 24 años en la capital de Uganda. El eje Y muestra el porcentaje de personas de ese rango de edad con el virus, en el eje X aparecen los años en que se ha medido ese porcentaje.



Fuente: OMS.



Notamos que si se mira el gráfico superior de izquierda a derecha, va decayendo, es decir, el porcentaje de gente infectada ha disminuido en el tiempo. Sin embargo se puede ser más preciso en el análisis. De hecho, el **ritmo** de decaimiento es distinto en los diferentes periodos. Por ejemplo, entre 1992 y 1993, el porcentaje bajó en 5 puntos más o menos, pero en el periodo 1993 -1995, la disminución fue de más de 6 puntos por año. En el último periodo, de 1995 a 1996, la disminución fue lenta: menos de un punto porcentual.

Es importante notar que el ritmo de crecimiento o decrecimiento guarda relación con la inclinación de la recta en cada período. Mientras más inclinada la recta, mayor es el crecimiento (o el decrecimiento dependiendo si sube o baja la recta). En general, el gráfico de una relación entre dos variables no es necesariamente una recta, pero de todos modos podemos definir el ritmo de crecimiento (o decrecimiento), también se llama la **tasa** o **razón de cambio** o **promedio**.

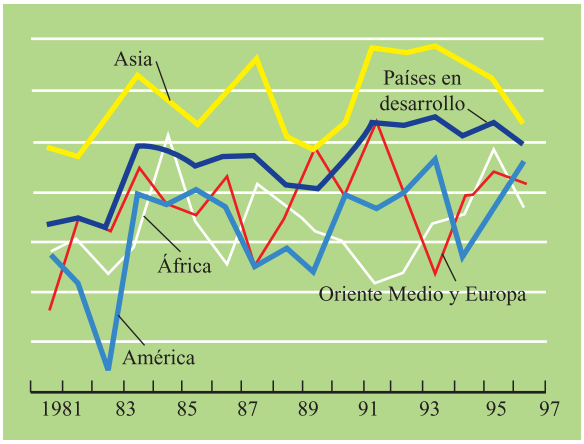
En general, si (a,b) y (c,d) pertenecen a un gráfico, la razón de cambio promedio entre esos dos puntos del gráfico de y respecto de x, se define como:

$$\frac{d-b}{c-a}$$

actividades

1. Haz en tu cuaderno un gráfico, de una relación de **y** respecto a **x**, que cumpla las siguientes condiciones: Para **x** entre 0 y 2 el gráfico crece. De 2 a 5 se mantiene constante (no crece ni decrece). De 5 a 8 decrece con razón de cambio promedio -2. Según tu gráfico, ¿cuál es la tasa de crecimiento promedio entre 0 y 2? y ¿cuál es la tasa de crecimiento promedio entre 2 y 5?

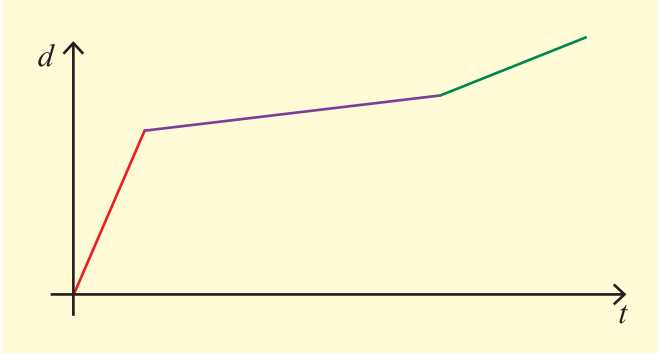
Podemos comparar gráficos, para muchos casos, sin necesidad de conocer los valores de las variables ni las escalas utilizadas. Por ejemplo, el gráfico a continuación muestra la variación porcentual anual del Producto Interno Bruto (PIB) en diferentes años (desde 1981 hasta 1997), de varios conglomerados de países.



Fuente: FMI

Sin conocer la escala ni los valores, podemos afirmar, a partir del gráfico, que los países en desarrollo han tenido un crecimiento mayor que los países africanos, pero menor que los países asiáticos, ya que el gráfico que representa a los países en desarrollo está por sobre el gráfico que representa a África y bajo el de Asia.

Otro ejemplo más cotidiano es el siguiente: pensemos en una atleta que participa en un triatlón. En las tres pruebas su velocidad es esencialmente constante, pero distinta en cada caso. Nada más lento que lo que corre y corre más lento que lo que anda en bicicleta. El siguiente gráfico muestra la distancia recorrida por el atleta en cada instante.



actividades

1. Según el gráfico superior, ¿cuál fue el orden de la carrera? ¿Fue "trote - nado - bicicleta"?
2. ¿Cuál prueba le tomó más tiempo?
3. Si la distancia total fue de 40 km y el atleta la recorrió en 4,16 h, ¿cuál fue su velocidad promedio? (Nota que en este caso velocidad promedio y tasa promedio es lo mismo).

actividades finales

1 Considera la función real $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{-6\mathbf{r}}{5} + 3$. Completa la siguiente tabla que tiene en la fila de arriba los valores de **r** y en la de la abajo las evaluaciones de **r** en **f**.

r	0	1			5	-5		$\sqrt{2}$	
f	3	1,8	1	-2			0		2

2 Si **f** es una función real y $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, entonces **a** es una preimagen de **b** vía **f**. Si **f** es una función afín y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$, ¿es cierto que **b** siempre tiene preimagen vía **f**? ¿En cuáles casos sí? y ¿en cuáles no?

3 Los siguientes son los valores de una función afín **f** en la variable **x**.

x	1	3
f	5	7

¿Es **f** lineal?

4 Realiza el gráfico de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = 3 - 4\mathbf{t}$

b) $\mathbf{y}(\mathbf{s}) = -\frac{5\mathbf{s} - 4}{6}$

c) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{2} - \mathbf{x}$

d) $\mathbf{y}(\mathbf{g}) = \frac{4}{5}\mathbf{g} - 3$

e) $\mathbf{s}(\mathbf{z}) = \frac{5\mathbf{z} + 3}{6}$

f) $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = -\frac{-\mathbf{x} + 6}{6} + \mathbf{x}$

g) $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = -\mathbf{t} + 1$

h) $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = 5 + 4\mathbf{t}$

i) $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = 3(2 - 4\mathbf{t})$

5 Si **f** es afín tal que $\mathbf{f}(1) = 5$ y $\mathbf{f}(-1) = \frac{3}{2}$. Consideremos además $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ cualesquiera en $\mathbb{R}$, pero distintos entre sí. Calcula:

$$\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}$$

6 Si **g** es una función afín cuyo gráfico es una recta paralela a **f** del ítem anterior. Consideremos $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ cualesquiera en $\mathbb{R}$, pero distintos entre sí. Calcula:

$$\frac{\mathbf{g}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}$$

7 Si **p** es una función afín cuyo gráfico es una recta paralela a **g** del ítem anterior. Consideremos $\mathbf{x}_0$ y **h** cualesquiera en $\mathbb{R}$, pero con $\mathbf{h} \neq 0$. Calcula:

$$\frac{\mathbf{p}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{p}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{h}}$$

8 Si $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = \mathbf{mt} + \mathbf{n}$ representa la posición de un móvil que se mueve a velocidad constante, para cada instante **t**. ¿Qué representa el cuociente $\frac{\mathbf{f}(\mathbf{t}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{t}_0)}{\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0}$ para distintos momentos $\mathbf{t}_0$ y $\mathbf{t}_1$?

9 Considera la tabla de la función **f**:

x	1	2	3
f	1	2	3

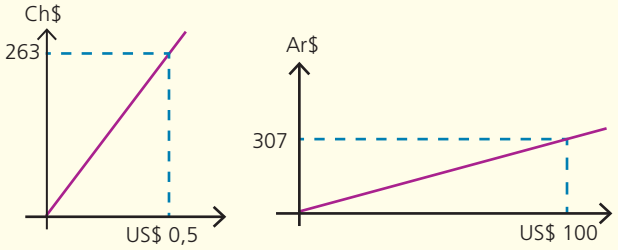
¿Es **f** la identidad?

10 Considera la función real **f**, que a cada número real **x** lo transforma en
$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{x}(\mathbf{x} - 1)(\mathbf{x} - 2)(\mathbf{x} - 3)$.
Completa la tabla:

x	1	2	3	0
f				

¿Es **f** la identidad? ¿Es **f** lineal? Si, en el ítem anterior tu respuesta fue afirmativa, vuelve a él y compara las tablas de las funciones. Verás la función de éste ítem cumple con la tabla del ítem anterior, pero no es la identidad.

11 Los siguientes gráficos muestran la relación entre el peso chileno y el dólar y la relación entre el peso argentino y el dólar. Grafica la relación entre el peso chileno y el peso argentino.

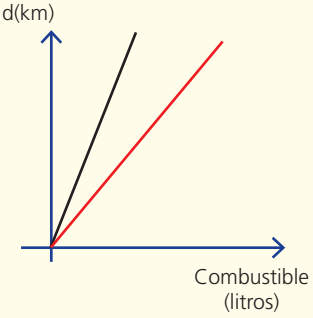


A Jorge, su papá le dio $ 20 000 para que gaste en Buenos Aires en su gira de estudios. ¿Cuántos pesos argentinos equivalen esa cantidad de dinero?

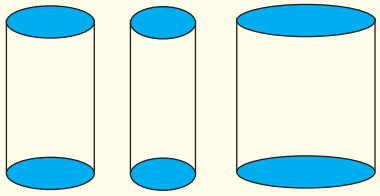
12 Según los datos y resultados del problema anterior completa la siguiente tabla:

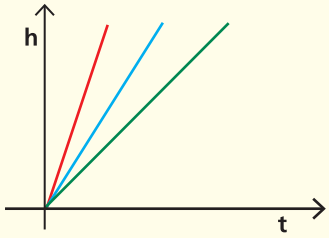
Moneda chilena (Ch$)	10	30	100	500	1 000	10 000	1 000 000	?
Moneda argentina (Ar$)	?	?	?	?	?	?	?	1 000

13 El gráfico de abajo muestra el gasto de bencina de un mismo vehículo en carretera y en ciudad. ¿Cuál de los dos corresponde al rendimiento en carretera?



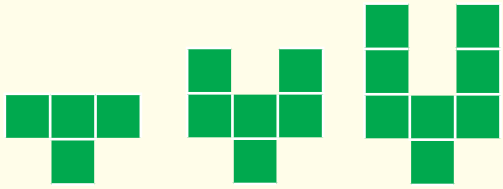
14 Los siguientes recipientes cilíndricos, son llenados con la misma llave, que deja fluir agua a un ritmo constante. El gráfico de abajo representa la relación entre la altura del nivel del agua a cada instante **t**, para cada recipiente. ¿Cuál gráfico corresponde a cual recipiente?





¿Cómo serían los diferentes gráficos, si en vez de la altura, se graficara el volumen de agua que tiene cada recipiente en cada instante **t**?

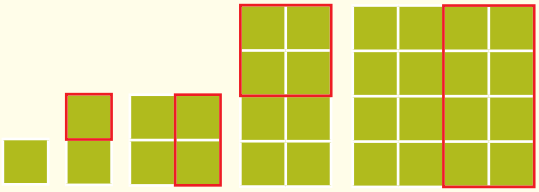
15 La siguiente secuencia de figuras se inicia con 4 cuadrados, la segunda figura se obtiene adjuntándole a la figura anterior 2 cuadrados más en los extremos, la tercera figura resulta de adjuntar a la segunda figura 2 cuadrados en las columnas de los extremos y así se continúa con las figuras posteriores.



a) ¿Cuántos cuadrados son necesarios para las figuras sexta, décima y décima octava?

b) Generaliza y descibre la expresión que te entrega la cantidad de cuadrados para la **n**-ésima figura.

16 La sucesión muestra una primera figura que es un cuadrado, la segunda figura se obtiene colocando la anterior y la misma sobre ella, la tercera figura se obtiene colocando la anterior y la misma pegada a la derecha, la cuarta figura se obtiene colocando la anterior y la misma sobre ella, de esta forma se continua con la secuencia.



a) Construye el diagrama que representa la quinta y sexta figura.

b) ¿Cuántos cuadrados son necesarios para las figuras quinta, décima segunda y vigésima?

c) Escribe una expresión algebraica que arroje la cantidad de cuadrados para la figura **n**.

17 Determina el valor de la incógnita en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $4(3\mathbf{x} - 5) + 3 = 19$

b) $4(\mathbf{x} + 3) - 11(\mathbf{x} - 7) = 4(5\mathbf{x} + 2)$

c) $5(1 - \mathbf{x}) + 4(\mathbf{x} - 3) = \mathbf{x} - 1 - (1 - \mathbf{x})$

d) $\frac{\mathbf{x}-3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{\mathbf{x}-1}{3} + \frac{1}{8}$

e) $2\mathbf{x} + 1 + \frac{\mathbf{x}-2}{5} = \frac{2\mathbf{x}+9}{4} - \frac{1}{3}$

f) $\frac{\mathbf{x}+3}{2} + 2\mathbf{x} = \frac{1}{3}\mathbf{x}$

18 Encuentra una expresión para **x** en las siguientes ecuaciones:

a) $a\mathbf{x} - 3 = \mathbf{b} - 5$ $(\mathbf{a} \neq 0)$

b) $2\mathbf{px} = 7\mathbf{p}^2 - 5\mathbf{px}$ $(\mathbf{p} \neq 0)$

c) $5(\mathbf{x} + 1) = 3(\mathbf{a} - \mathbf{x})$

d) $\frac{2}{3}\mathbf{x} - \mathbf{b} + 6\mathbf{a} = -4(\mathbf{x} + \mathbf{b})$

19 Sabiendo que la cantidad de diagonales que se pueden trazar en un polígono de **n** lados viene dada por la fórmula $D = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}-3)}{2}$. ¿Cuántos lados tiene un polígono en el cual se pueden trazar un total de 20 diagonales?

20 La fórmula para expresar grados Farenheit en Celsius es:

$$\mathbf{C} = \frac{5}{9}(\mathbf{F} - 32).$$

a) Escribe los grados Farenheit en función de los grados Celsius.

b) ¿Existe alguna temperatura que sea la misma tanto en Celsius como en Farenheit? Argumenta tu respuesta.

21 Sabiendo que $\mathbf{a} > 0$ y $0 < \mathbf{b} < \mathbf{a}$, ubica en la recta numérica: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, $2\mathbf{a}$ y $-3\mathbf{b}$

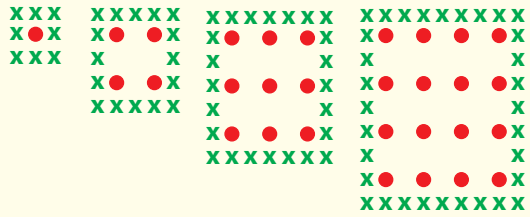
22 Si $\mathbf{a} < 0$ y $\mathbf{b} > 0$, ubica en la recta numérica: $-\mathbf{a}$, $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ y $-\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b}$

23 Los números en la secuencia 3, 8, 13, 18, 23, ... se obtienen sumándole cinco al término anterior. Y en la secuencia 5, 11, 17, 23, 29, ... los números se obtienen sumando seis al número anterior. Ambas secuencias tienen el número 23 en común, ¿cuál es el próximo número en común que tiene estas sucesiones? [**Problema modificado Prueba Timss 2003**].

24* ¿Es un múltiplo de dos la suma de dos números consecutivos? ¿Es un múltiplo de tres la suma de tres números consecutivos? ¿Es un múltiplo de cuatro la suma de cuatro números consecutivos? ¿Es un múltiplo de cinco la suma de cinco números consecutivos? ¿Podrías afirmar que la suma de **n** números consecutivos es siempre un múltiplo de **n**? ¿Para qué valores de **n** es cierto y para cuáles no es cierto? Justifica tu respuesta.

25 Dos tinajas contienen la misma cantidad de vino. Si se pasa 37 litros de vino de una tinaja a otra, ésta contiene ahora triple cantidad que la otra. ¿Cuántos litros de vino había en cada tinaja inicialmente?

26 ***[Prueba Pisa 2000]** Un agricultor planta manzanos en un terreno cuadrado. Con el objetivo de proteger los manzanos del viento planta pinos alrededor de la totalidad del huerto. Aquí ves un esquema de esta situación donde se puede apreciar la colocación de los manzanos y de los pinos para cualquier número colocar imagen **n** de filas de manzanos:



Con la ayuda de un compañero realiza la siguiente actividad:

a) Completen la siguiente tabla, tú escribiendo el número de manzanos y tu compañero el número de pinos.

n	Número de manzanos	Número de pinos
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

b) Conjeturen y describan, cada uno, una fórmula para calcular el número de manzanos y otra para el número de pinos para **n** filas de manzanos.

c) Ahora comparen las fórmulas que obtuvieron. ¿Existe un valor de **n** para el cual el número de manzanos coincide con el de pinos? Hallen este valor y expliquen cómo lo encontraron.

d) Supongan que el agricultor quiere agrandar el huerto con muchas filas de árboles. A medida que el agricultor vaya haciendo mayor el tamaño del huerto, ¿qué aumentará más rápidamente, el número de manzanos o el de pinos? ¿Por qué?

27 Desarrolla los siguientes productos y reduce téminos semejantes:

a) $(2\mathbf{x} + 3\mathbf{y})(-3\mathbf{y} + 2\mathbf{x}) + 2\mathbf{xy}(6 - 2\mathbf{y})$

b) $(2\mathbf{k} + 1)^2 + (2\mathbf{k} + 3)^2$

c) $(\mathbf{x} - 2\mathbf{y})^3$

d) $(\mathbf{x}^2 - 3\mathbf{y})^2 + \mathbf{x}^3(\mathbf{x} + \mathbf{y})$

e) $(\mathbf{x} + 1)^3 - \mathbf{x}^3 - 1$

f) $(2\mathbf{x} - 3)(\mathbf{x} - 1)(\mathbf{x} - 2)$

g) $(5\mathbf{x} - \mathbf{y})\left(\frac{3\mathbf{y}}{2} + \frac{3\mathbf{x}}{2}\right)$

h) $(0{,}4\mathbf{x} + 2{,}3\mathbf{xy})2$

28 En cada caso suma un número (no una variable), que permita formar un cuadrado de binomio:

a) $\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x}$

b) $\mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x}$

c) $\mathbf{x}^2 - 10\mathbf{x}$

d) $4\mathbf{x}^2 + 8\mathbf{x}$

e) $\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}$

f) $\mathbf{x}^4 - 5\mathbf{x}^2$

29 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2\mathbf{ax} - 3\mathbf{az}$

b) $24\mathbf{x}^2 - 12\mathbf{xy}$

c) $6\mathbf{xy} + 2\mathbf{bx} + 3\mathbf{ay} + \mathbf{ab}$

d) $\mathbf{n}^3 - \mathbf{nm}^2$

e) $\mathbf{mx}^2 + 4\mathbf{mx} + 4\mathbf{m}$

f) $\mathbf{x}^2 + 7\mathbf{x} + \frac{49}{4}$

g) $\mathbf{x}^4 + 2\mathbf{x}^2 + 1$ (Ayuda: Es un cuadrado de binomio en la variable).

30 Muestra que para todo polinomio **p** de grado 1, existe un número real α tal que al evaluar **p** en α resulta cero.

31 Supón que un polinomio **p**(**x**) de grado 2, se puede factorizar en polinomios de grado mayor o igual a 1. Muestra que entonces existe un número real α tal que al evaluar **p** en α resulta cero.

32 Supón que un polinomio **p**(**x**) de grado 3, se puede factorizar en polinomios de grado mayor o igual a 1. Muestra que entonces existe un número real α tal que al evaluar **p** en α resulta cero.

33 Supón que un polinomio **p**(**x**) de grado 4, se puede factorizar en polinomios de grado mayor o igual a 1. ¿Es cierto que existe un número real α tal que al evaluar **p** en α resulta cero? (Ayuda: observar el ítem 29 **g)**).

34 Nota que un número de dos cifras no lo podemos anotar **ab**, pues esa notación está reservada para la multiplicación de **a** por **b**. Entonces, si un número **n** de dos cifras, en el lugar de las unidades está **a** y en el de las decenas está **b**, entonces el número es **n** = 10**b** + **a**, por ejemplo 31 = 10 · 3 + 1. ¿Cómo escribirías un número de 3 cifras? ¿Y de 4 cifras? ¿Y de **k** cifras?

Considera un número de 4 cifras, digamos **n** = 1 000**d** + 100**c** + 10**b** + **a**.

a) Muestra que **n** es igual a 999**d** + 99**c** + 9**b** + (**a** + **b** + **c** + **d**).

b) Muestra que **n** se puede escribir en la forma 9**A** + (**a** + **b** + **c** + **d**), donde **A** es un número entero. ¿Cuál es el valor de **A** en términos de **b**, **c** y **d**?

c) Muestra que si la suma de los dígitos de un número **n**, de 4 cifras es divisible por 9, entonces **n** es divisible por 9.

d) ¿Es el resultado anterior, cierto si se considera un número **n** de cualquier largo?

e) Muestra que si la suma de los dígitos de un número **n**, de 4 cifras es divisible por 3, entonces **n** es divisible por 3.

f) ¿Es el resultado anterior, cierto si se considera un número **n** de cualquier largo?

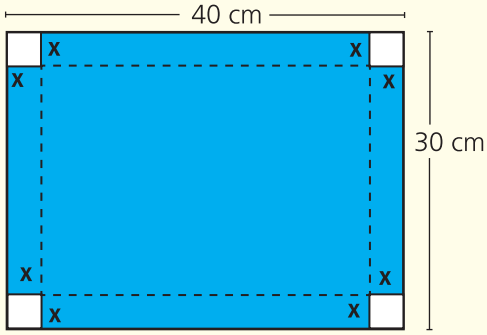
35 Elije cualesquiera 3 números de {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} y forma todos los números de tres cifras que se pueden formar con esos números elegidos, por ejemplo si elegimos 1, 2 y 3, entonces todos los números de tres cifras con 1, 2, 3 son:

123, 132, 213, 231, 312, 321. Si sumamos esos números resulta 1 332 = 6 · 222.

a) ¿Será cierto que para cualquier trío que se escoja y se suman todos los números de tres cifras que se pueden formar resulta un número divisible por 222?

b) Nota que 1 + 2 + 3 = 6. ¿Será cierto que para cualquier trío que se escoja y se suman todos los números de tres cifras que se pueden formar resulta un número divisible por la suma de los dígitos escogidos?

36 Si hacemos una caja abierta con un pedazo rectangular de cartulina de medidas 30 cm de ancho por 40 cm de largo, recortando un cuadrado de longitud **x** en cada esquina y doblando los lados hacia arriba como se muestra en la figura:



a) Escribe el volúmen de la caja en términos de **x**.

b) Escribe la superficie de la caja en función de **x**.

c) Construye una tabla de datos que muestre distintos valores para **x** y los correpondientes de **V** (volúmen). Estima con tus cálculos, ¿qué valor de **x** hace mayor el volumen de la caja?

autoevaluación

1 **(Prueba Timss 2003)** Si **n** es un número negativo, ¿cuál de estos números es el más grande?

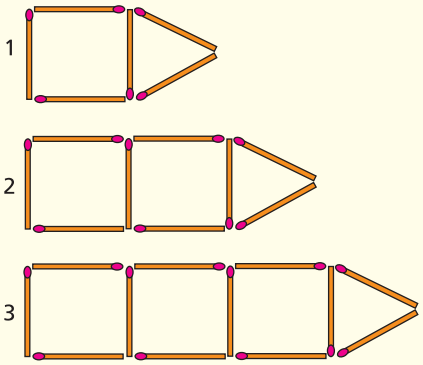
a) $3 + \mathbf{n}$

b) $3 - \mathbf{n}$

c) $3 \cdot \mathbf{n}$

d) $3 : \mathbf{n}$

2 **(Prueba Timss 2003)** Ciertos segmentos se ordenan como se muestra en las figuras.



Si se continúa la misma secuencia de ir agregando cuadrados, a la izquierda de la figura anterior, ¿cuántos segmentos se usarían para la figura 10?

a) 30

b) 33

c) 36

d) 39

3 **(Modificación Prueba Timss 2003)** $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = 5$ y $\mathbf{c} = 3$. ¿Cuál es el valor de $\mathbf{a} + 2(\mathbf{b} + \mathbf{c})$?

a) 11

b) 8

c) 16

d) No se puede determinar.

4 **(Prueba Timss 2003)** Si $\mathbf{L} = 4$ cuando $\mathbf{K} = 6$ y $\mathbf{M} = 24$, ¿cuál de las siguientes opciones es verdadera?

a) $\mathbf{L} = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{K}}$

b) $\mathbf{L} = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{M}}$

c) $\mathbf{L} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{M}$

d) $\mathbf{L} = \mathbf{K} + \mathbf{M}$

5 Si el área de un cuadrado de lado $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ se le resta el área de un cuadrado de lado $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ resulta:

a) $4\mathbf{ab}$

b) $2\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b}^2$

c) $2\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{b}^2$

d) 0

6 En relación a la función $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 5\mathbf{x} - 2$ es cierto que:

a) $\mathbf{f}(-1) = 3$

b) La expresión $\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(1)}{\mathbf{x} - 1}$ toma diferentes valores para diferentes valores de $x \neq 1$.

c) El gráfico de **f** es una recta que pasa por el origen.

d) El gráfico es una recta paralela al gráfico de $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = 5\mathbf{x}$

7 ¿Cuál es el valor de $1\,501^2 - 1\,502^2$:

a) 1

b) -1

c) 3 003

d) $-3\,003$

8 ¿Cuál de los siguientes polinomios es igual a $\frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$?

a) 0

b) $\frac{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}{2}$

c) $\mathbf{xy}$

d) $\frac{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}{2} + \mathbf{xy}$

Geometría

Al finalizar esta Unidad serás capaz de:

- Caracterizar la estructura y uso de un sistema de coordenadas rectangular y denominarlo Plano Cartesiano
- Representar puntos, trazos, triángulos y cuadriláteros en un plano cartesiano en forma manual o mediante el uso de un procesador geométrico.
- Resolver problemas geométricos de áreas y perímetros de figuras representadas en un plano cartesiano.
- Construir traslaciones y composiciones de traslaciones utilizando la adición de vectores en un plano cartesiano.
- Identificar las regularidades presentes en las traslaciones.
- Construir, en el plano cartesiano, reflexiones y rotaciones en forma manual o utilizando un procesador geométrico. Construir composiciones de reflexiones.
- Reconocer reflexiones, traslaciones y/o rotaciones en pares de figuras dadas en el plano cartesiano y fundamentar su razonamiento. Reconocer las transformaciones isométricas presentes en distintos tipos de teselaciones.
- Caracterizar los aspectos invariantes que se observan en la aplicación de reflexiones, rotaciones y traslaciones en un sistema cartesiano de coordenadas.
- Analizar los datos necesarios y suficientes para construir un triángulo, y relacionar dichos datos con los criterios de congruencia de triángulo y las transformaciones isométricas.
- Componer y descomponer figuras analizando la congruencia entre sus lados y ángulos.
- Resolver problemas que involucran congruencias de trazos, ángulos y triángulos.
- Conjeturar y demostrar propiedades de polígonos utilizando la congruencia de triángulos.

Temas que estudiaremos en esta Unidad:

Plano Cartesiano:

Par ordenado, sistema de coordenadas rectangulares, representación de formas geométricas unidimensionales y bidimensionales en dicho plano.

desarrolladas en el

Transformaciones Isométricas:

Traslación, reflexión y rotación.

Composición de traslaciones y reflexiones.

Teselaciones.

para trabajar la

Congruencia de triángulos

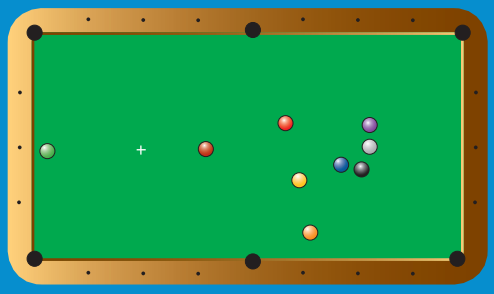
Criterios de Congruencia de Triángulos.

Congruencia de Polígonos

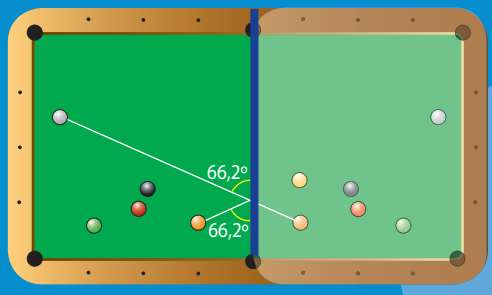
Unidad

3

El billar es un deporte, aunque no el único, en el que las isometrías juegan un papel fundamental. De hecho, para ser un buen billarista no es importante tener un buen "golpe de muñeca", sino poseer unas nociones básicas de geometría para saber elegir qué golpe dar. El estudio de las isometrías permite precisar el punto de impacto en la banda.



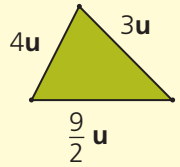
Analicemos el caso del "pillo a una banda", es decir cuando queremos pegarle a una bola y forzadamente tenemos que pegarle a una banda primero para darle a la bola que queremos. Para ello debemos realizar una simetría, como si la banda fuera un espejo donde se puede proyectar la mesa. Así tenemos que trazar la trayectoria de la bola blanca a la bola 5 de la mesa proyectada para determinar el punto de golpe en la banda, el cual permitirá pegarle a la bola 5. ¿Puedes determinar otros puntos en las bandas los cuales permitan pegarle a la bola 5 o a otra?



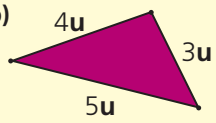
para recordar

1 Indica cuáles de los siguientes triángulos son rectángulos y marca el vértice recto.

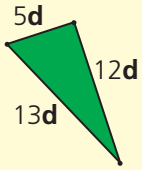
a)



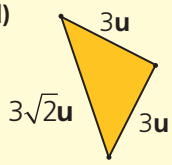
b)



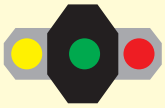
c)



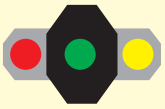
d)



2 Determina la transformación isométrica que se aplicó a la figura para obtener **A**, **B**, **C** y **D**.

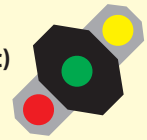


a)

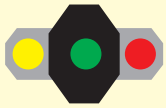


b)

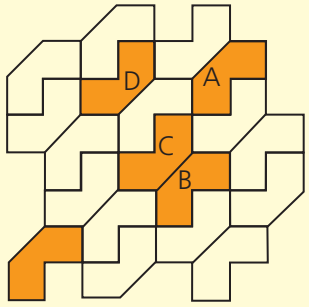
c)



d)



3 Observa la figura de la derecha y responde:



a) ¿Qué transformación isométrica se le aplicó a la región naranja sin letra para obtener la región **A**? ¿Y para obtener la región **C**?

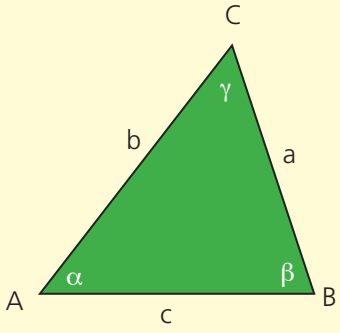
b) A la figura **A** se aplicó una rotación para obtener la región **D**. Determine el punto y el ángulo de rotación.

4 Señala en cuál o cuáles de los siguientes casos la información que se entrega permite construir inequívocamente el triángulo que se pide y en cuáles no. En caso de no entregarse la información necesaria, explica por qué dicha información no permite determinar el triángulo.

a) **a** $= \frac{13}{2}$ cm; $\gamma = 45^\circ$; **b** = 4,6 cm

b) $\alpha = 40^\circ$; **c** = 4 cm; $\beta = 50^\circ$

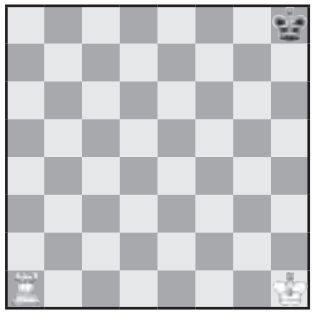
c) $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 90^\circ$



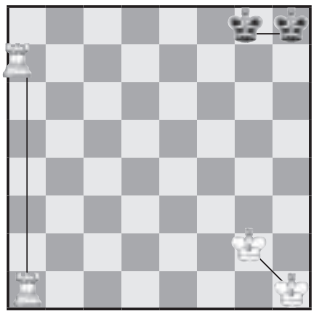
1 Ubiquémonos: sistema de referencia

En muchas situaciones necesitamos referirnos a un lugar y para ello indicamos puntos de referencia y un número para lograr la ubicación del lugar, como por ejemplo en un tablero de ajedrez, se usan las letras de la *a* a la *h* para identificar las columnas del tablero y los números del 1 al 8 para identificar sus filas. Es así como cada movimiento se indica por la letra inicial de la pieza que se mueve (T: torre, R: rey) seguido por la casilla a donde llega la pieza. Es así por ejemplo, que si movemos la torre a la posición a7 entonces dicho movimiento se anota T a 7. Con esta técnica, los jugadores pueden anotar sus jugadas, en los partidos, o simplemente comunicarle a su adversario las coordenadas de la pieza que piensa mover y este sabe exactamente cual será la nueva configuración del tablero.

8	a8	b8	c8	d8	e8	f8	g8	h8
7	a7	b7	c7	d7	e7	f7	g7	h7
6	a6	b6	c6	d6	e6	f6	g6	h6
5	a5	b5	c5	d5	e5	f5	g5	h5
4	a4	b4	c4	d4	e4	f4	g4	h4
3	a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3	h3
2	a2	b2	c2	d2	e2	f2	g2	h2
1	a1	b1	c1	d1	e1	f1	g1	h1
	a	b	c	d	e	f	g	h



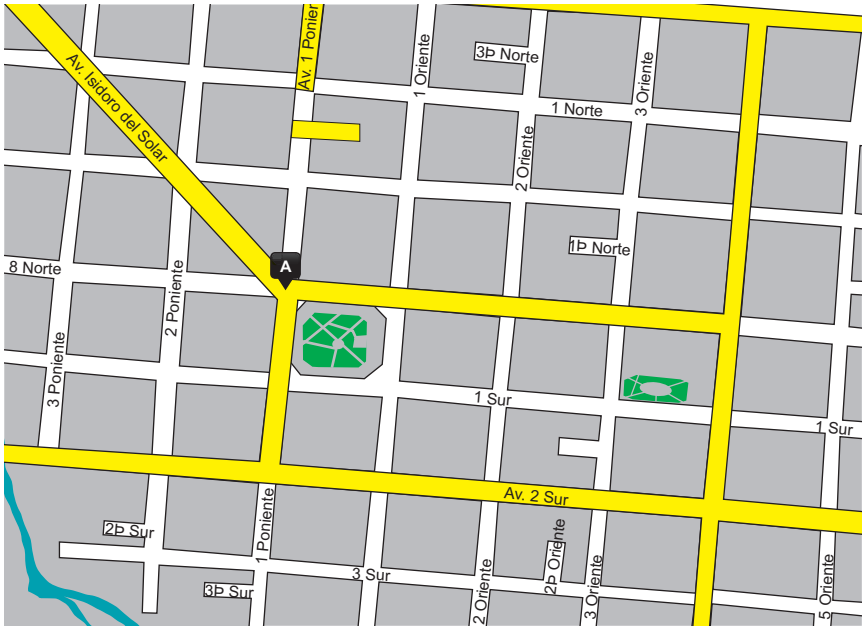
Juegan las blancas



Juegan las blancas

Tres primeras jugadas para un Mate de Torre Rey contra Rey

Ahora recuerda las ubicaciones del tablero de ajedrez para ayudar a Amaru a ubicarse en el mapa de Talca. Él se encuentra en una esquina de la Plaza de Armas, en la intersección de las calles 1 Sur con 1 Oriente. Necesita llegar a la tienda en que trabaja uno de sus tíos. Para ello le pregunta a un transeúnte: ¿cuántas cuadras me faltan para llegar a esta dirección? Mientras le muestra un papel que tenía escrita la intersección de las calles en que se encontraba la tienda, el transeúnte le responde, "te faltan 5 cuadras". Marca en el mapa la ubicación de la tienda del tío de Amaru.



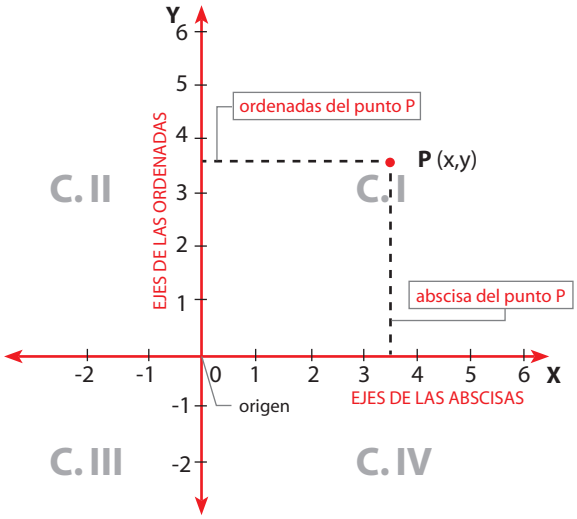
Júntate con 3 compañeros más y responde: ¿Todos marcaron el mismo punto en el mapa? La información proporcionada por el transeúnte, ¿fue suficiente?, ¿a cuántos lugares diferentes podría haber llegado Amaru? La intersección de las calles donde está ubicada la tienda es 3 Norte con 4 Oriente, ¿podría haber llegado Amaru a este punto sin pedir ayuda a otra persona?, ¿qué referencia hubieses usado tú para llegar a esta dirección?

RENÉ DESCARTES
(1596-1650)

Filósofo, matemático y científico francés.

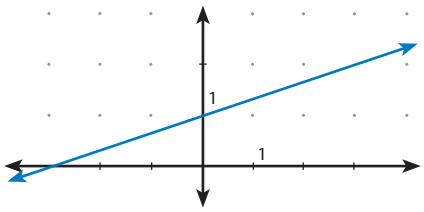
Descartes fue uno de los primeros filósofos modernos. En 1637 publicó su gran obra "Discurso del método para conducir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias", en la que figuran La Dióptrica, Los Meteoros y la Geometría, siendo esta última un apéndice de dicha obra. En La Geometría aparecen las ideas sobre lo que hoy se conoce como sistemas de coordenadas cartesianas debido a la forma latina de su apellido Cartesius.

En todas las situaciones anteriores hemos considerado dos elementos para dar una ubicación, la dirección (recta) y una unidad de medida (cuadra). En general en un plano, para dar un sistema de referencia se consideran dos rectas (denominadas ejes de coordenadas) que se cortan en un único punto que usualmente se denota con la letra *O* y se denomina origen (en el caso de Talca, fue la plaza). Sobre cada una de estas rectas se toma una unidad de medida, no necesariamente la misma en ambos ejes (en el caso de Talca, fueron las cuadras). Al fijar una unidad de medida en uno de los ejes, tomamos la longitud del segmento como la unidad. De esta manera, en ese eje, tenemos una correspondencia con los números reales. De la misma forma se procede con el otro eje. Este par de rectas con sus respectivas unidades de medidas, es lo que se llama sistema de **Coordenadas Cartesianas en el plano**.



Dado un punto *P* del plano, al trazar por *P* paralelas a los ejes, éstas cortan a dichos ejes en puntos a los que podemos asociar números reales que se denominan coordenadas del punto *P*. También se tiene que: dados dos números reales *x* e *y* podemos asociar un único punto en el plano cuyas coordenadas son el par ordenado (x,y). El par ordenado (x,y) tiene en primer lugar a la abscisa *x* y en segundo lugar a la ordenada *y*.

Observemos que los ejes particionan al plano cartesiano en 4 zonas, las cuales llamaremos **cuadrantes**. Así tenemos 4 cuadrantes.



Recuerda que ya habíamos utilizado el plano cartesiano en otras oportunidades, como por ejemplo cuando graficamos la ecuación afín de una recta.

actividades

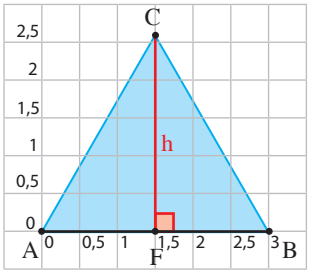
1. Di sin dibujar, en qué cuadrante están situados los puntos **A**(4;1), **B**(3;5), **C**(–1;4) y **D**(0;0). Luego dibuja los puntos y une los puntos con segmentos. ¿Qué figura geométrica es la que trazaste? ¿Cómo puedes comprobarlo?
2. ¿En qué cuadrante puede estar situado un punto si la abscisa es positiva?
3. ¿Qué signos tienen las coordenadas de los puntos situados en el segundo cuadrante? ¿En el tercer cuadrante? ¿Y en el cuarto cuadrante?
4. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya ordenada es 5? ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya abscisa es –2?

2 Figuras en el Plano Cartesiano

Amaru está en el liceo haciendo una tarea de geometría que consiste en trazar un triángulo equilátero ABC de lado 3 unidades, en el plano cartesiano, tal que el vértice A se encuentre en el origen y el lado $\overline{AB}$ se encuentre en el eje de las abscisas. ¿Cómo lo hará Amaru?

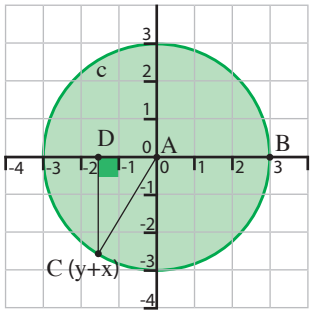
Procedimiento de Amaru

Él colocó el vértice B en el punto de coordenadas (3,0), luego pensó, ¿dónde trazo el vértice C? Amaru recordó que la altura h_c cae en forma perpendicular en el punto de medio del lado $\overline{AB}$, de ello concluyó que la abscisa de la coordenada del vértice C es la mitad del lado del triángulo, es decir $\frac{3}{2}$ unidades. ¿Por qué pensó eso Amaru? Él lo pensó porque faltaba la ordenada del vértice C y por lo tanto utilizó el Teorema de Pitágoras, planteando la siguiente expresión:



$$\overline{BC^2} = \frac{\overline{AB^2}}{2} + h_c^2$$

Así Amaru determinó que la ordenada del vértice es $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ unidades. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice C?



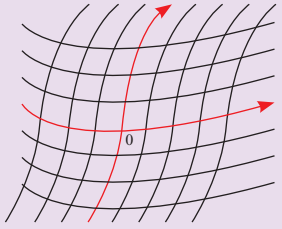
Amaru necesita saber cuáles son todos los puntos del plano que están a 3 unidades del origen del Plano Cartesiano. ¿Cómo podrá determinarlo? Amaru responde hay que usar Pitágoras otra vez, planteando la siguiente expresión.

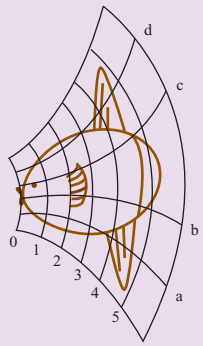
$$3^2 = x^2 + y^2$$

donde x e y representan las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo formado. Los puntos pertenecen a una circunferencia de radio 3 unidades.

recuerda

En general, para establecer un sistema de coordenadas en el plano basta con que se den dos curvas que se cortan en un único punto y una unidad de medida en cada una de estas curvas. Ahora podemos pensar el plano como una red determinada por todas las curvas paralelas prefijadas.



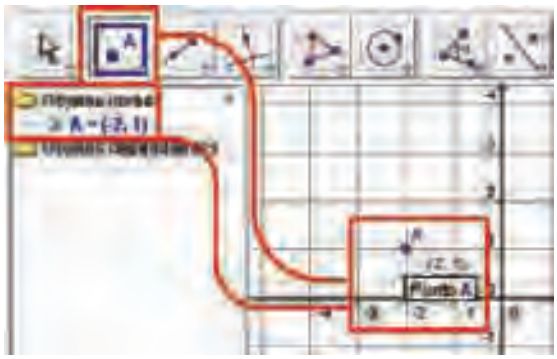


actividades

1. Determina las coordenadas de todos los puntos del plano cartesiano donde se pudo haber trazado el vértice **C** del primer problema.
2. ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cartesiano tal que su abscisa es el doble de su ordenada más uno? Grafica el lugar geométrico.
3. Determina la expresión que deben satisfacer todos los puntos del plano cartesiano que están a dos unidades del punto de coordenadas (–1,1).

3 Visualizando el Plano Cartesiano con Geogebra

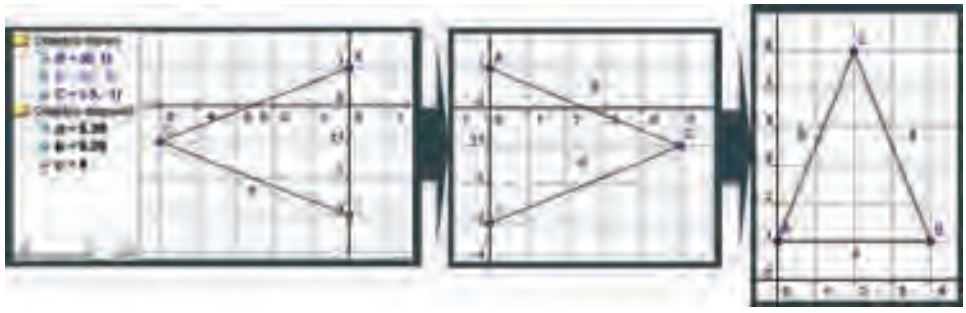
En la red de Internet hay muchos programas que permiten visualizar el plano cartesiano. Entre estos programas está el *Geogebra*, el cual puedes descargar de la página www.geogebra.org



Para que aparezca en la zona gráfica la cuadrícula, debes hacer clic secundario y activar la opción de cuadrícula.

El geogebra te permite colocar puntos en cualquier parte del plano cartesiano. Para ello debes activar el botón de punto, así podrás ver en la descripción de los objetos definidos en la zona gráfica, las coordenadas del punto que definiste en el plano cartesiano.

También geogebra permite construir figuras geométricas, como por ejemplo un triángulo isósceles *ABC* de altura 5 unidades y base 4 unidades con el vértice *A* en las coordenadas (0,1).



Podemos observar que se puede construir más de un triángulo con las condiciones dadas. ¿Cuántos triángulos más se pueden construir con las condiciones dadas?

actividades

1. Construye ayudándote del programa Geogebra un cuadrado **ABCD** de lado 5 unidades, tal que cada uno de sus vértices se encuentre en cada cuadrante. ¿Cuántos cuadrados se pueden construir?
2. Construye un rectángulo **ABCD** cuya área es de 6 unidades cuadradas y los vértices **A** y **B** tengan coordenadas (1,-2) y (3,0) respectivamente. ¿Cuáles son las posibles coordenadas de los vértices **C** y **D**?

aplicando lo aprendido

1 Descifra la palabra que está escrita en el plano cartesiano:

(6,2), (9,2), (12,1), (12,0), (11,2), (9,–2), (4,–2), (2,–1), (1,1), (–1,1), (–2,0), (–2,–2), (2,1), (5,2), (12,2), (9,1), (10,2), (10,0), (4,1), (2,2), (–2,2), (–2,1), (0,0), (2,0), (2,–2), (4,0), (4,–1), (12,–1), (12,–2), (11,0), (7,2), (9,0), (4,2), (–2,–1), (9,–1), (5,0), (6,0), (7,1), (7,0), (7,–1), (7,–2)

2 Señala qué figura geométrica es la que está determinada por los puntos (1,–2), (4,–2) y (4,2). Además calcula su perímetro y área.

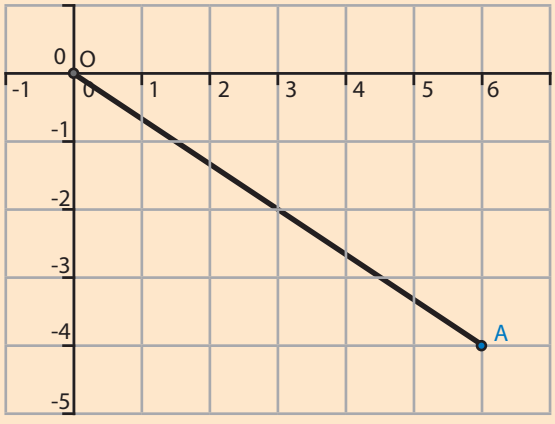
3 Los vértices de un cuadrilátero son los puntos (1,4), (7,4), (9,7) y (3,7). Prueba que el cuadrilátero es un paralelogramo y calcula su área.

4 Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos (–1,1) y (3,1). Determina las coordenadas del tercer vértice.

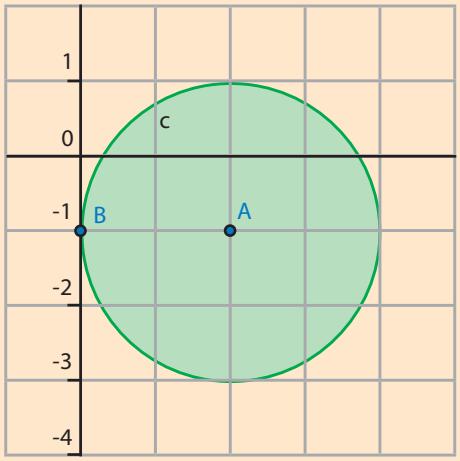
5 Determinar el lugar geométrico de todos los puntos del plano cartesiano tal que la ordenada más 3 es igual a la abscisa menos 1.

6 Los puntos **A**(–2,1), $(0,\frac{5}{3})$ y (7,4), pertenecen a una recta. ¿Cuál es la expresión algebraica de la recta?

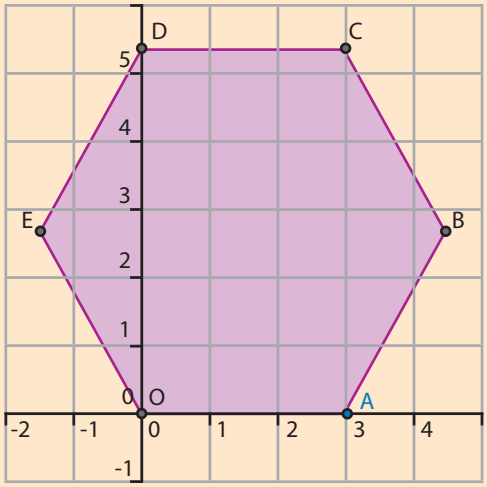
7 Sean los puntos **O**(0,0) y **A**(6,–4). Determina el punto medio del segmento $\overline{\mathbf{AO}}$. Determina el lugar geométrico de todos los puntos que están a igual distancia de los puntos **A** y **O**.



8 El punto (2,–1) es el centro de una circunferencia que es tangente al eje de las ordenadas. Determina la expresión algebraica de la circunferencia.



9 El hexágono regular **OABCDE**, tiene el vértice **O** y **A** en las coordenadas (0,0) y (3,0). Determina las coordenadas de los demás vértices.

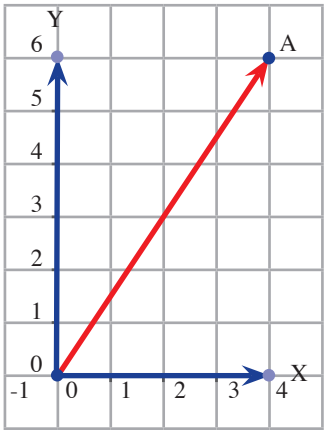


a) Determina la circunferencia inscrita al hexágono.

b) Determina la circunferencia circunscrita al hexágono.

4 Mingaco de traslado

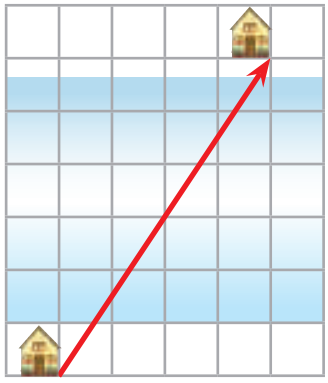
Lautaro Montaña, quiso cambiarse de ciudad, pero quería llevarse la casa con él hacia el norte, así que programó una minga para trasladar la casa. Uno de los problemas que se le presentó a Lautaro fue el río, el cual tenía una corriente de 4 kilómetros por hora de oeste a este, mientras que el bote tenía una velocidad de 6 kilómetros por hora. ¿Dónde llegó la casa de Lautaro?



La velocidad de la casa en la dirección del río puede ser representada por una flecha de longitud 4 en el eje *X* del plano cartesiano, y la velocidad en la dirección perpendicular por una flecha de longitud 6 en el eje *Y*.

Así representamos la velocidad resultante de la casa como la flecha roja que parte en el origen del plano cartesiano y termina en el punto de coordenadas (4,6).

Esta velocidad resultante, no puede ser descrita por un simple número. Esta flecha queda determinada por su **longitud**, denominada **módulo** que vale $2\sqrt{13}$ unidades, por su **dirección**, la de la recta que pasa por los puntos *O* y *A* y por su **sentido** *O* hacia *A*.



Estas magnitudes reciben el nombre de **Magnitudes Vectoriales** y se representan mediante un **vector geométrico** o **flecha**.

En lo que sigue denotaremos a los vectores del plano cartesiano mediante una letra minúscula con una flecha encima cómo por ejemplo $\vec{u}$. Los vectores son identificados por las coordenadas del punto terminal las cuales se denominan componentes del vector. Por ejemplo el vector $\vec{v}$ = (4,6).

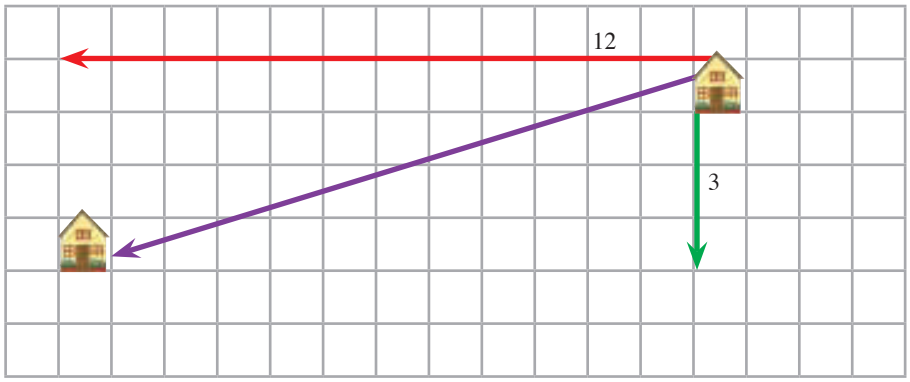
Notamos que al hacer la minga, Lautaro trasladó rígidamente la casa para dejarla al norteste de donde se encontraba, pero para especificar exactamente donde quedaría la casa fue necesario modelar las velocidades en el plano cartesiano por medio de vectores, los cuales quedaron identificados por sus componentes. Así la casa de Lautaro se trasladó 6 km hacia el Norte y 4 km hacia el Este de donde estaba.

actividades

1. En la cuadrícula traslada la casa según el vector $\vec{u}$ = (5,2). ¿Dónde queda la casa con respecto a la anterior?
2. Traslada la casa que obtuviste del traslado anterior según el vector $\vec{w}$ = (1,2). ¿Dónde queda ahora la casa?

Las traslaciones las anotaremos $T_{(a,b)}$; donde el par ordenado (a,b) denota las componentes del vector de traslado, lo que se entiende por trasladar a unidades en la dirección horizontal y b unidades en la dirección vertical. Así si a es positivo se traslada a lugares a la derecha, pero si a es negativo se traslada a puestos a la izquierda. Del mismo modo, si b es positivo se traslada b puestos hacia arriba y si b es negativo se traslada b puestos hacia abajo.

Por ejemplo, vemos abajo que hemos trasladado la casa de Lautaro según la traslación $T(-12,-3)$ o bien , $T_{\vec{v}}$, donde $\vec{v}=(-12,-3)$, es decir, 12 puestos a la izquierda y 3 puestos hacia abajo.



Podemos pensar las traslaciones como movimientos de todo el plano, es decir, todos los puntos del plano se mueven según indica la traslación. Si la traslación dice que se muevan 3 puestos hacia arriba y 2 puestos hacia la izquierda, entonces todos los puntos se mueven en esa dirección.

¿Qué pasa si a la casa trasladada, le aplicamos la traslación $T(-12, -3)$?

investiga

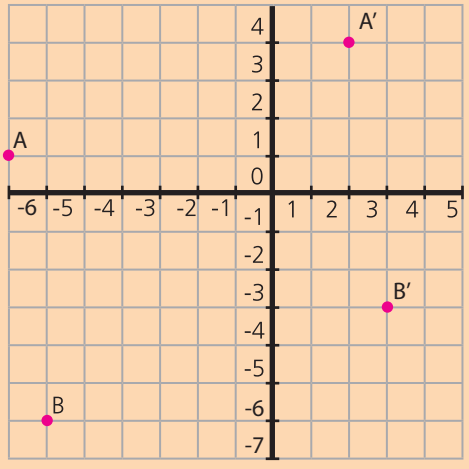
¿Cuál es la acción de la traslación $\mathbf{T_{(0,b)}}$? y ¿de la traslación $\mathbf{T_{(a,0)}}$? y ¿de la traslación $\mathbf{T_{(0,0)}}$?

importante

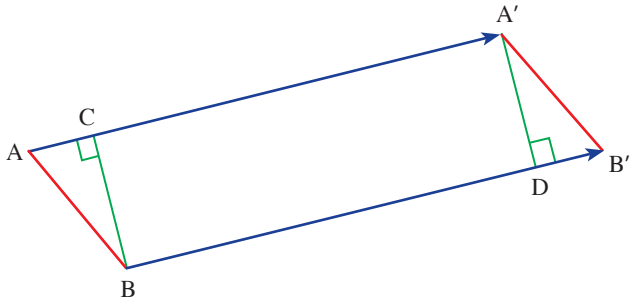
Lo que resulta al aplicar una traslación a una figura o un punto se llama la **imagen** de la traslación a esa figura o a ese punto.

actividades

1. ¿Cuál es la traslación que permite ir de **A** hacia **A'**? ¿Cuál es la traslación que permite ir de **A'** a **A**? ¿Cuál es la relación entre estas dos traslaciones?
2. En general, ¿qué ocurre si aplicamos la traslación $\mathbf{T_{(a;b)}}$ al plano y luego la traslación $\mathbf{T_{(-a,-b)}}$?
3. Traza los vectores de traslación de **A** hacia **A'** y de **B** hacia **B'**. ¿Los vectores tienen la misma dirección? ¿Los vectores tienen el mismo sentido? ¿Los vectores tienen el mismo módulo? ¿Qué figura geométrica determina los puntos **ABB'A'**? ¿Tiene alguna relación la figura geométrica con el sentido, orientación y módulo de los vectores antes determinados?



Consideremos un trazo cualquiera $\overline{AB}$ y apliquémosle una traslación T; que lo transforma en el trazo $\overline{A'B'}$; como muestra la figura:



Marquemos la perpendicular a $\overline{AA'}$ que pasa por B; y denotemos por C la intersección de esas rectas. Del mismo modo, D es la intersección entre $\overline{BB'}$ y su perpendicular. Como $\overline{AA'}$ mide lo mismo que $\overline{BB'}$ se tiene que, BC mide lo mismo que $\overline{A'D}$ y que $\overline{AC}$ mide lo mismo que $\overline{B'D}$.

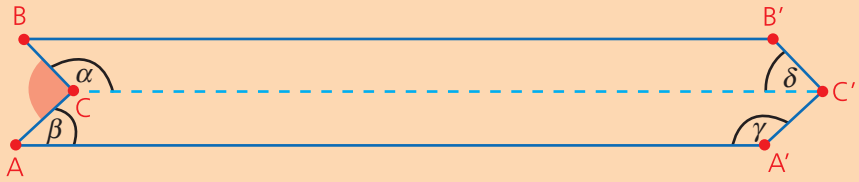
Por lo tanto los triángulos ABC y $A'B'D$ son rectángulos y tienen dos catetos iguales, por el teorema de Pitágoras las hipotenusas miden lo mismo, por lo tanto $\overline{AB}$ mide lo mismo que $\overline{A'B'}$: Resumiendo, tenemos la siguiente propiedad de las traslaciones:

C′

Las traslaciones preservan la distancia entre dos puntos.

actividades

* Esta actividad está dirigida a demostrar que las traslaciones preservan ángulos: Dibuja un ángulo cualquiera y trasládalo.



Debemos demostrar que el ángulo rojo $\angle ACB$ mide lo mismo que $\angle A'C'B'$.

a) Nota que $CC'B'B$ es un paralelógramo, lo mismo que $CC'A'A$. ¿Por qué?

b) Como los ángulos opuestos en un paralelógramo miden lo mismo, muestra que $\angle ACC' = \gamma$ y que $\angle A'C'C = \beta$.

c) Demuestra que el $\angle A'C'B' = \delta + \beta$. Como los ángulos opuestos en un paralelogramo son suplementarios (suman 180°). Muestra que $\delta = 180^o - \alpha$ y que $\beta = 180^o - \gamma$.

d) Demuestra que $\angle A'C'B' = \delta + \beta = 360^o - (\alpha + \gamma)$.

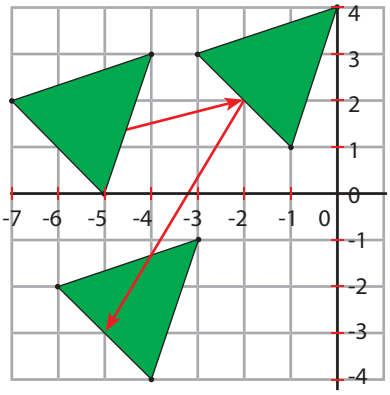
e) Demuestra que el ángulo rojo mide $360^o - (\alpha + \gamma)$. Concluye que el ángulo rojo mide lo mismo que el que resulta de la traslación.

Como hemos visto hasta ahora, las traslaciones tienen la propiedad que transforman un trazo en otro del mismo largo, y si dos rectas se intersectan las traslaciones las transforman en dos rectas que se intersectan, formando el mismo ángulo, es decir:

Las traslaciones preservan ángulos y distancias.

Es por esto que decimos que la traslación es una **transformación isométrica**, pues mantiene medidas (Iso = igual, Métrica = medida). Existen otras transformaciones isométricas que veremos más adelante. También se le llama un **movimiento rígido** del plano, pues mueve el plano sin encoger o dilatar; mueve todos los puntos rígidamente.

Composición de Traslaciones



Consideremos ahora, el caso de aplicar dos traslaciones, una después de la otra: En la imagen de al lado vemos que al triángulo le aplicamos primero la traslación $T = T_{(4,1)}$ y luego, a la imagen que resulta se le aplica la traslación $t = T_{(-3,-5)}$.

C′

Notamos entonces que el triángulo quedó definitivamente un puesto a la derecha y cuatro hacia abajo de su posición inicial. Es decir, resultó lo mismo que si desde el inicio hubiésemos aplicado una sola traslación: la traslación $T_{(1,-4)}$.

Generalmente, si al punto (x, y) se le aplica la traslación $T_{(a,b)}$ resulta $(x+a, y+b)$, si ahora le aplicamos al resultado la traslación $T_{(c,d)}$ resulta $(x+a+c, y+b+d)$, que es lo mismo que aplicar al punto (x, y) la traslación $T_{(a+c,b+d)}$.

importante

Notamos que **T** $_{(a,b)}$ aplicado a (**x**,**y**) resulta el punto (**x**+**a** , **y**+**b**).

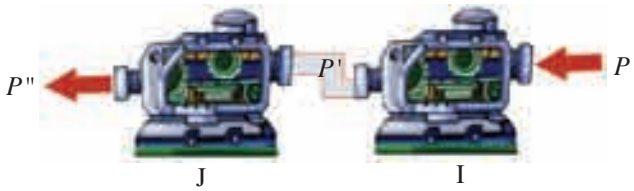
Además, hay que notar que resulta lo mismo que si se aplican las traslaciones en el orden inverso.

Si aplicamos dos traslaciones, una después de la otra, el orden no importa y además es lo mismo que aplicar una sola traslación.

De lo anterior, podemos pensar en las traslaciones y en general en todas las transformaciones isométricas que veremos, (como máquinas que transforman puntos del plano en otros puntos del plano). Los puntos entran por la derecha de la máquina, la máquina trabaja y entrega un resultado por la izquierda. Por ejemplo, la siguiente máquina representa la traslación $T_{(a,b)}$.

$(a+x, b+y)$ (x, y)

Aplicar dos movimientos rígidos, uno después de otro, es concatenar estas máquinas.



Es decir, si el punto P es transformado por la traslación I en P' y luego otra isometría transforma P' en P''; entonces las isometrías I y J concatenadas, transforman P en P''. O sea, el resultado de la primera máquina es la "materia prima" de la segunda máquina.

Cuando concatenamos dos isometrías, U y V en el orden de aplicar primero U y luego V; decimos que la isometría resultante es la composición de U con V y la anotamos VU o también $V \circ U$; y quiere decir que si aplicamos a VU a un punto P el resultado es aplicar V al resultado de aplicar U a P. Es decir,

$$VU(P) = V(U(P))$$

En este lenguaje tenemos que la composición de dos traslaciones es una traslación, más precisamente

$$T_{(a,b)} \circ T_{(c,d)} = T_{(a+c,b+d)} = T_{(c,d)} \circ T_{(a,b)}$$

Lo que hemos hecho anteriormente es sumar dos vectores, obteniendo un tercer vector, así entonces podemos decir que:

La suma de los vectores del plano $\vec{a} = (p,q)$ y $\vec{b} = (r,s)$ es el vector $\vec{a} + \vec{b} = (p + r, q + s)$.

actividades

1. Dibuja un cuadrado que tiene vértices **A**(0,0); **B**(1,0) y **C**(1,1): ¿Cuál es el otro vértice? Después de una traslación el vértice **A** se transformó en **A'**(–3,5): ¿Cuáles son las coordenadas de todos los otros vértices? Después de otra traslación el vértice **A'** se transformó en **A''**(4,1): ¿Cuáles son las coordenadas de los otros vértices? ¿Cuál es la traslación que lleva a **A** a **A''**?

2. La concatenación de máquinas de al lado está compuesta por la máquina azul, que es la traslación $\mathbf{T}_{(1,1)}$ y otra máquina que es la traslación $\mathbf{T}_{(-1,1)}$:

a) ¿Cuál punto entrega la máquina por la izquierda, si por la derecha entra (0,0)? ¿y (1,1)? ¿y (0,–1)? ¿y (1,–1)?

b) ¿Cuál punto debe entrar para que la máquina entregue (0,0)?

c) ¿Hay algún punto tal que cuando entra por la máquina sale el mismo?

aplicando lo aprendido

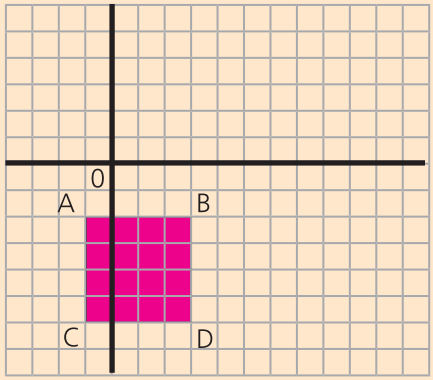
1 Dibuja en el plano cartesiano el trapecio **ABCD** de coordenadas: **A**(–2,2); **B**(–1,5); **C**(3,6); **D**(1,0).

a) Dibuja la imagen **A'B'C'D'** del trapecio **ABCD** por la traslación $\mathbf{T}_{(2,-3)}$.

b) Dibuja la imagen **A''B''C''D''** que resulta al aplicar la traslación $\mathbf{T}_{(-1,-4)}$ al trapecio **A'B'C'D'**.

c) ¿Existe una traslación que lleve el trapecio **ABCD** en el trapecio **A''B''C''D''**? Si la respuesta es afirmativa escribe dicha traslación.

2 Dado el cuadrado de la figura:

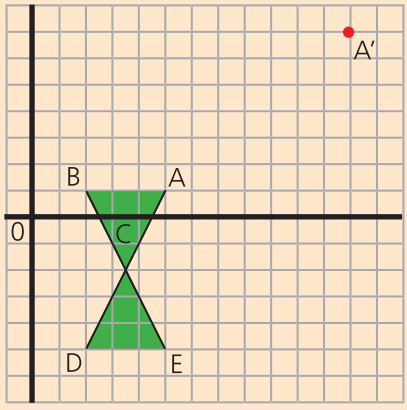


a) Dibuja la imagen que se obtiene al aplicar al cuadrado **ABCD** la traslación $\mathbf{T}_{(0,3)}$. Nombra los vértices de esta imagen con las letras **A'B'C'D'**.

b) Al cuadrado **A'B'C'D'** aplícale la traslación $\mathbf{T}_{(0,3)}$. La imagen resultante la denominaremos con los vértices **A'B'C'D'**.

c) ¿Cuál traslación debes aplicar al cuadrado **A''B''C''D''** para que el vértice **A''** quede en el origen de coordenadas?

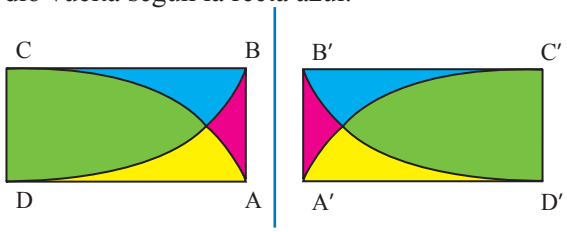
3 Traslada la figura **ABCDE** sabiendo que la imagen del vértice **A** es **A'**. ¿Cuál es la traslación?



5 Reflexiones

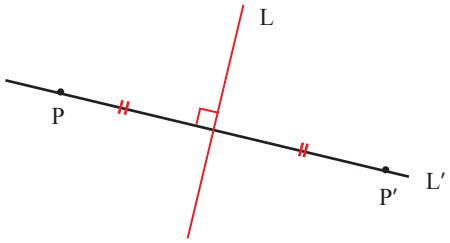
Si pones una figura frente a un espejo, ésta se ve al revés, es decir, la mano derecha se ve enfrente en la misma posición, pero para la persona del otro lado del espejo es su mano izquierda. Sin embargo, si respeta la distancia, es decir, lo que está más cerca del espejo se ve como si estuviera más cerca.

La acción de dar vuelta una transparencia es la misma acción que reflejar en un espejo; por ejemplo: la siguiente imagen la puedes pensar como que la línea azul es un espejo que refleja lo de la izquierda en la derecha o también que la transparencia de la izquierda se dio vuelta según la recta azul.



La operación de dar vuelta una transparencia o reflejar en el espejo se llama **reflexión** y consiste en lo siguiente:

- Considera una recta L cualquiera.
- Para cada punto P del plano, se debe considerar la recta perpendicular a la recta L que pasa por P, y que llamaremos L'.
- Mide la distancia de P a la recta L.
- Ubica P' al otro lado de la recta L, sobre L' y a la misma distancia de L.



Decimos que P' es el reflejo de P respecto a la recta L. También decimos que P' es la imagen de P por la reflexión respecto a L.

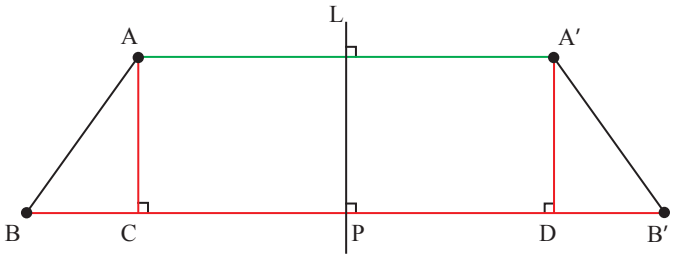
actividades

1. Si a un punto **P** se le aplica una reflexión, resulta **P'**, ¿qué le pasa a **P'** si se le aplica la misma reflexión?

2. ¿Qué les pasa a los puntos de la recta **L** cuando se les aplica la reflexión respecto **L'**?

3. Si el punto **P**(3,4) se refleja con respecto al eje **Y** y el resultado se refleja respecto del eje **X**, ¿cuáles son las coordenadas del punto que resulta?

Cuando estudiamos las traslaciones, vimos que éstas preservan la distancia y los ángulos. Ahora veremos que las reflexiones tienen la misma propiedad. Partamos con la distancia. Consideremos dos puntos A y B y reflejémoslos respecto de una recta L, como muestra la figura.



Nombramos por A' y B' las imágenes de A y B. El punto C es la intersección de la recta $\overleftrightarrow{BB'}$ con su perpendicular. Respectivamente D denota la intersección de la perpendicular con $\overleftrightarrow{BB'}$.

Como $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ son paralelas se tiene que $\overline{AC} = \overline{A'D}$. Además, como $\overline{PC} = \overline{PD}$ y como $\overline{PB} = \overline{PB'}$ se tiene que

$$\overline{BC} = \overline{B'D}$$

Entonces, los triángulos rectángulos ΔACB y $\Delta A'DB'$ tienen catetos que miden lo mismo, por lo tanto sus hipotenusas miden lo mismo. Luego:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

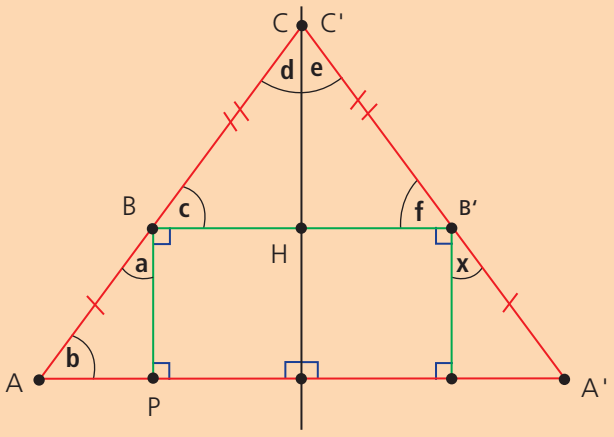
Por lo tanto

Las reflexiones preservan distancias.

Es cierto que las reflexiones preservan ángulos, pero la explicación del porqué de esto será un interesante ejercicio para que tú lo realices.

actividades

Realiza la reflexión a **A** y a **B**, respecto de recta **CH**. Obteniendo **A'** y **B'**, respectivamente. Traza las rectas **AB** y **A'B'**.



1. ¿Por qué esas rectas se intersectan en la recta de reflexión? ¿Por qué $\overline{CB} = \overline{C'B'}$? ¿Por qué $\overline{AB} = \overline{A'B'}$?

2. Nota que **a** y **b** son complementarios. Explica por qué **b** = **c** = **f**. Explica también por qué **a** = **d** = **e**. ¿Es cierto que **a** = **x**?

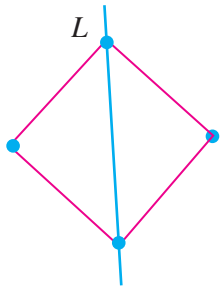
3. Demuestra que la reflexión preserva ángulo.

6 Figuras simétricas

Por lo visto anteriormente y por las actividades que has realizado, se puede decir que:

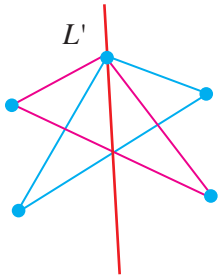
Las reflexiones preservan ángulos y distancias.

Por esta razón, al igual que las traslaciones, las reflexiones también se denominan isometrías o movimientos rígidos, porque mueven las figuras sin distorsionarlas, sin apretarlas ni expandirlas.



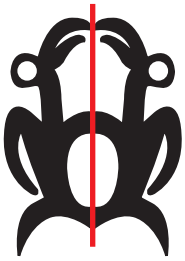
Hay figuras que si se reflejan respecto a una recta que las atraviesa, resulta la misma figura idénticamente igual.

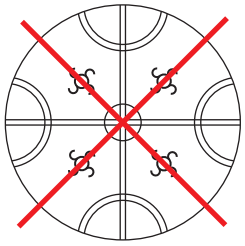
Por ejemplo, si a un cuadrado lo reflejamos respecto a una de sus diagonales, se obtiene el mismo cuadrado, pero en cambio, si tomamos un triángulo escaleno, y lo reflejamos respecto una de sus transversales de gravedad, no se obtiene el mismo triángulo. En la figura el triángulo reflejado es el azul, y como vemos, no coincide con el triángulo original.



A la recta que hace que al reflejar una figura resulte la misma se denomina **eje de simetría de la figura**, por ejemplo en la figura de la izquierda, la recta L es un eje de simetría del cuadrado, en cambio L' no es un eje de simetría del triángulo.

A continuación mostramos algunas imágenes simétricas, la recta pintada encima muestra el eje de simetría. En el segundo ejemplo la imagen es simétrica si no consideramos las imágenes de adentro, y solamente nos fijamos en el contorno.





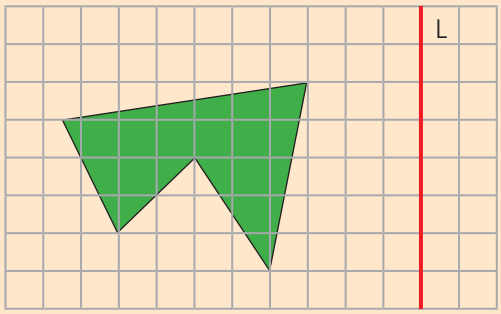
actividades

1. ¿Es un rectángulo simétrico respecto a la recta que une los puntos medios de los lados opuestos?
2. ¿Es un pentágono regular simétrico respecto a la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto?
3. Determina la expresión algebraica del eje de simetría del triángulo rectángulo con vértices en los puntos de coordenadas **A**(0,0), **B**(8,0) y **C**(0,8).

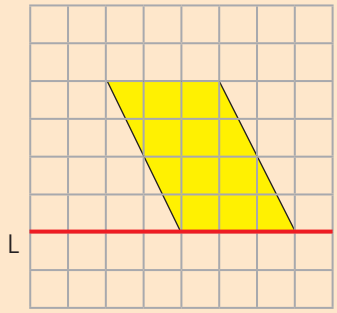
aplicando lo aprendido

1 Dibuja la imagen que resulta al reflejar las siguientes figuras con respecto a la recta **L** dada y luego, a las imágenes obtenidas aplícales la traslación $\mathbf{T}_{(-2,-2)}$:

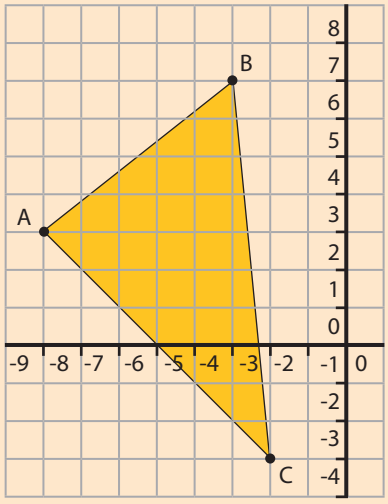
a)



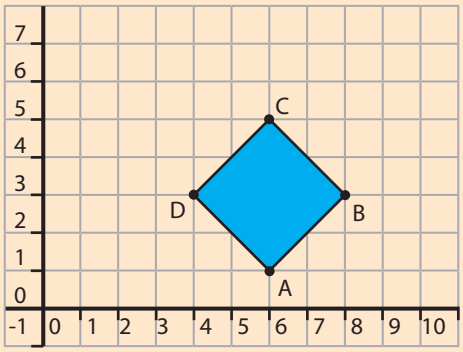
b)



2 Al triángulo **ABC** se le aplica una reflexión con respecto a la recta de ecuación **x** = –6. Determina las coordenadas del triángulo **A'B'C'**.



3 Determina la expresión algebraica de los ejes de simetría del cuadrado **ABCD**.



4 Supongamos que tenemos una recta horizontal **L** que pasa por el punto (0,**b**), donde **b** es un número entero. Ubica un punto **P**(**x**,**y**) arriba de la recta **L**. Si reflejas este punto **P** con respecto a **L**, ¿cuáles son las coordenadas de **P'**? Escribe las coordenadas de **P'** en términos de **x**, **y** ó **b**.

5 Determine las coordenadas del cuadrado, tal que uno de sus ejes de simetría tiene como ecuación 6**x** + 2**y** = 8, y uno de los puntos medios de los lados tiene coordenadas (3,0).

6 Determine las ecuaciones de los ejes de simetría del octágono regular que esta contenido en los cuadrantes I y II, tal que las coordenadas **A** y **B** del octagono son (-1,0) y (1,0) respectivamente.

7 Sabiendo que las ecuaciones de los ejes de simetría de una figura geométrica que tiene solamente dos ejes de simetría son **x** = 2 e **y** = 0, determine a que figura corresponde y determine las coordenadas de al menos una figura.

MAURITS CORNELIS ESCHER
(1898 - 1972)

Comenzó estudios de Arquitectura, pero allí se dió cuenta de que su auténtica pasión eran las artes gráficas. Tras dos años en la escuela de arte, obtuvo una especialización en técnicas gráficas y trabajo en madera. Luego viajó por el sur de Francia, España e Italia, donde encontró inspiración para su obra.

A lo largo de su carrera, Escher se centró en el arte de la estructura. Sin embargo, sus primeras obras retrataban de forma realista los paisajes y la arquitectura que encontró en sus viajes.

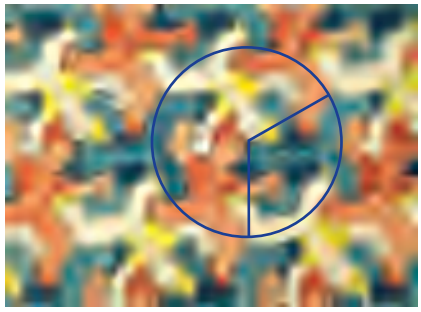
nota

"Con frecuencia me siento más próximo a los matemáticos que a mis colegas los artistas".

M.C. Escher.

7 Rotaciones

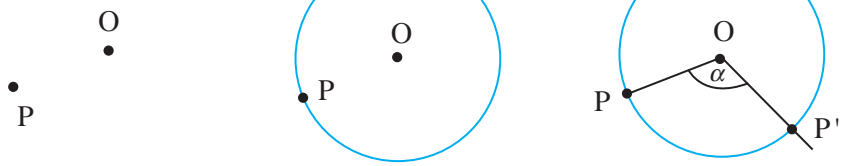
Hemos visto diseños que se generan por traslación o por reflexión. Sin embargo, existen otros para los cuales estos "movimientos" no bastan. Por ejemplo, observemos el siguiente diseño, del más famoso artista que utilizó los movimientos rígidos para desarrollar sus trabajos, Maurits Cornelius Escher (1898-1972).



Como vemos, la figura del personaje se rota en un ángulo marcado por las líneas azules. No es una reflexión ni tampoco una traslación.

En general, si consideramos un punto O y un ángulo α, la rotación de ángulo α y centro O, a cada punto P le asocia el punto P' del siguiente modo:

- Construimos la circunferencia de centro O, que pasa por P.
- Marcamos el ángulo α de modo que el radio $\overline{OP}$ sea uno de los rayos del ángulo. (Medimos los ángulos en sentido opuesto a las manecillas del reloj, a menos que se diga otra cosa).
- El rayo que forma el ángulo α y no es $\overline{OP}$ intersecta a la circunferencia en un punto, ese punto es P'.



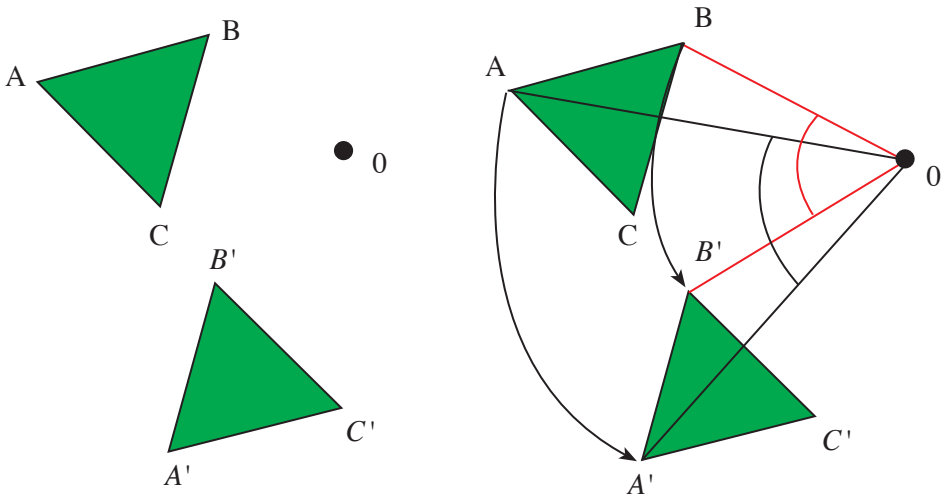
actividades

1. ¿Por qué existe una sola circunferencia de centro **O** y que pasa por **P**?
2. Consideremos dos puntos en el plano, digamos **P** y **P'**, ¿es cierto que existe una rotación que lleva **P** en **P'**? ¿Es la única?
3. Si rotamos todos los puntos del plano en torno a **O**, con ángulo α, ¿qué le pasa a **O**?
4. Si rotamos en torno a **O** todos los puntos del plano en 360º, ¿qué le pasa a cualquier punto **P**?

Vimos que las reflexiones y las traslaciones preservan las distancias y los ángulos. Fue por eso que las llamamos movimientos rígidos o isometrías. La verdad es que la rotación pertenece al mismo grupo, es decir, la rotación es una isometría. La demostración de esto no la daremos en este texto, pero es importante que investigues para conocer por qué este resultado es cierto. Entonces:

Las rotaciones preservan distancias y ángulos.

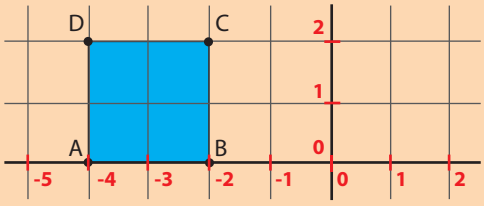
Este resultado permite rotar polígonos de forma muy simple. Como preservan ángulos y distancias basta rotar los vértices de un polígono y luego unir los vértices rotados para obtener el polígono rotado. A continuación vemos la rotación de un triángulo equilátero ΔABC, cuya imagen es el triángulo, también equilátero, $\Delta A'B'C'$.



importante

Es importante notar que el arco $\overset{\frown}{AA'}$ no es igual al arco $\overset{\frown}{BB'}$, pues pertenecen a circunferencias de distintos radios. Sin embargo, el ángulo $\angle BOB'$ es el mismo que el ángulo $\angle AOA'$ que corresponde al ángulo de la rotación.

actividades

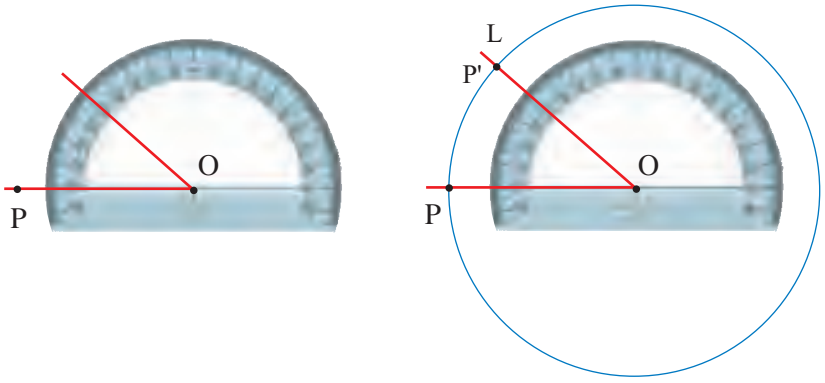


1. Rota el cuadrado en torno al origen con un ángulo de 90°.
2. Rota el cuadrado en torno a (–2,0) con un ángulo de 180°.
3. Rota el cuadrado en torno a (–3,1) con un ángulo de 270°.
4. Al cuadrado que te resultó en el problema 1 aplícale la traslación $\mathbf{T}_{(4,4)}$. ¿Se puede hacer lo mismo con un solo movimiento?
5. Aplícale la rotación de centro (–3,1) y ángulo 90° al cuadrado inicial, pero en el sentido de las manecillas del reloj. Compara tu resultado con el del problema 3.

8 ¿Cómo rotar un punto?

Para realizar una rotación, necesitaremos un compás, un transportador y una regla. Con el compás haremos las circunferencias, con el transportador marcaremos los ángulos y con la regla marcaremos los radios.

Si queremos rotar P, en torno a O con un ángulo α, (nosotros lo haremos con un ángulo de 40° según el sentido de las manecillas del reloj, para fijar ideas) marcamos la recta OP con la regla. Luego pondremos la marca de inicio del transportador en el punto O y marcando 0° en la recta $\overline{OP}$.

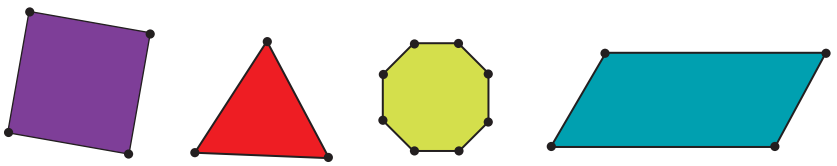


recuerda

A la rotación de centro **O** y ángulo α, la anotamos $R_{(O,\alpha)}$

Enseguida, marcaremos el ángulo α y con la regla trazaremos la recta L que pasa por O y por la marca que acabamos de hacer.

Luego con el compás haremos la circunferencia con centro O y radio $\overline{OP}$. Entonces la rotación del punto P será la intersección de la circunferencia y la recta L.

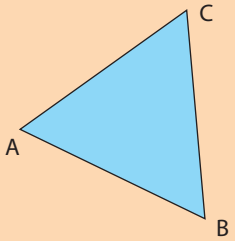


Existen figuras que al rotarlas, según cierto ángulo que no es un múltiplo de 360°, se obtiene la misma figura. En ese caso decimos que la figura tiene **Simetría Rotacional**. Las de arriba tienen simetría rotacional en torno a su centro de gravedad. En cada caso, ¿cuál es el ángulo de rotación que permite que quede la misma figura después de rotada?

actividades

1. Rota el triángulo equilátero en torno a **A**, en un ángulo de 60°. Haz lo mismo con el triángulo que resulta, y luego lo mismo con el triángulo que resulta. Repite lo mismo hasta obtener 5 nuevos triángulos. ¿Qué figura obtienes?

2. Rota el triángulo equilátero en torno al centro de gravedad en un ángulo de 120°, ¿es cierto que el triángulo rotado se confunde con el original?



Algo más de composiciones isométricas

Cuando estudiábamos traslaciones vimos que si aplicamos una traslación y luego otra, el resultado era aplicar una sola traslación. Más precisamente, si aplicamos $T_{(a,b)}$ y luego $T_{(c,d)}$, resulta lo mismo que aplicar desde un principio $T_{(a+c,b+d)}$.

En particular, se tiene que el orden en que se aplican las traslaciones no es importante, es decir, si se aplican consecutivamente dos traslaciones, para el resultado final da lo mismo cuál se aplica primero y cuál después. Sin embargo, esto no sucede para todas las composiciones isométricas. Por ejemplo observa la siguiente máquina de composición.

Las máquinas de arriba muestran la composición entre la traslación $T_{(1,1)}$ y la rotación R de centro en el origen y ángulo 90°. Ahora si entra el punto (0,0), tenemos que $R \circ T(0,0) = R(T_{(1,1)}(0,0)) = R(1,1) = (-1,1)$. Pero si ahora tenemos la máquina de composición

$$\mathbf{T} \circ \mathbf{R}(0,0) = \mathbf{T}_{(1,1)}(\mathbf{R}(0,0)) = \mathbf{T}_{(1,1)}(0,0) = (1,1)$$

importante

Es decir, en general, el orden en que se aplican las isometrías es importante, pues no siempre se obtiene el mismo resultado si aplica primero una u otra.

actividades

1. Para las mismas isometrías que vimos en los ejemplos anteriores:

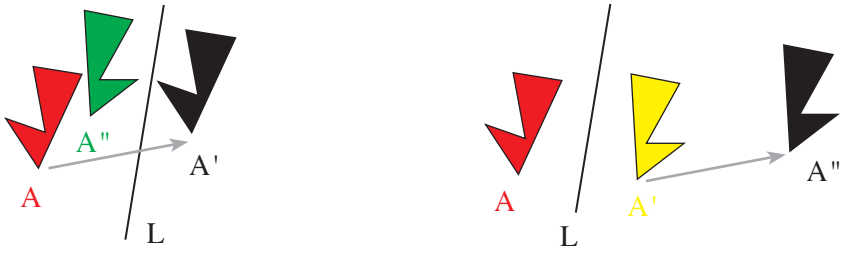
a) Dibuja el cuadrado que resulta de aplicar **TR**, al cuadrado **C**, tal que, tres de sus vértices son $(0,-1)$, $(1,-1)$ y $(0,-2)$.

b) Al cuadrado anterior aplica **RT**. Dibuja el cuadrado que resulta. ¿Es el mismo que antes?

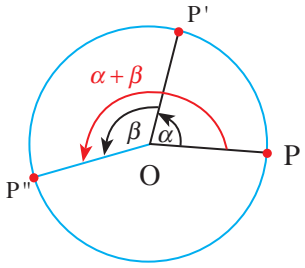
c) Al cuadrado que resultó en **b** refléjalo respecto a la recta paralela al eje **Y**, que pasa por $\left(\frac{3}{2},0\right)$. Dibuja el cuadrado que resulta. Compara este resultado con el de **a**, ¿es el mismo?

Hemos visto también que en general las isometrías no conmutan, es decir, si I y J son dos isometrías **no** siempre se cumple que $I \circ J = J \circ I$. Por ejemplo, vimos que en general, no es lo mismo una traslación compuesta por una rotación que la misma rotación compuesta por la misma traslación.

¿Qué pasará con una reflexión y una traslación? Consideraremos una reflexión respecto a una recta L, llamaremos a esa reflexión S. Consideraremos una traslación T en una dirección distinta a la dirección de la recta L. La figura siguiente muestra, la composición $S \circ T$, es decir, compondremos primero la traslación y al resultado aplicaremos la reflexión. A la derecha compondremos las mismas isometrías en el sentido opuesto.



Como vemos, esas isometrías no conmutan.



¿Qué pasa con una rotación compuesta con otra rotación del mismo centro?

Consideremos el centro O de ambas rotaciones, digamos $R_\alpha = R_{(O,\alpha)}$ y $R_\beta = R_{(O,\beta)}$. Para fijar ideas, pensemos en el caso en que $\alpha + \beta < 360^o$. Entonces, cualquier punto P, lo rotamos con un ángulo de α y luego el resultado lo rotamos en un ángulo β. Es decir, aplicar dos rotaciones (del mismo centro) seguidas es lo mismo que aplicar una rotación cuyo ángulo es la suma de los ángulos de cada rotación. En particular,

$$R_\alpha \circ R_\beta = R_{\alpha+\beta} = R_\beta \circ R_\alpha .$$

actividades

1. ¿Conmutan las rotaciones de diferente centro?, es decir, si **O** es distinto de **O'**, ¿es cierto que $\mathbf{R}_{(O,\alpha)} \circ \mathbf{R}_{(O,\beta)} = \mathbf{R}_{(O',\beta)} \circ \mathbf{R}_{(O',\alpha)}$?

2. ¿Qué pasa con la composición de una reflexión respecto a la recta **L** con una traslación que tiene la misma dirección que **L**? ¿Conmutan?

3.* Considera la traslación, $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{(4,10)}$ y la reflexión respecto a la recta **L** que pasa por el origen y el punto (2,5). Denotemos por **S** esa reflexión. Considera la concatenación **ST** y la concatenación **TS**.

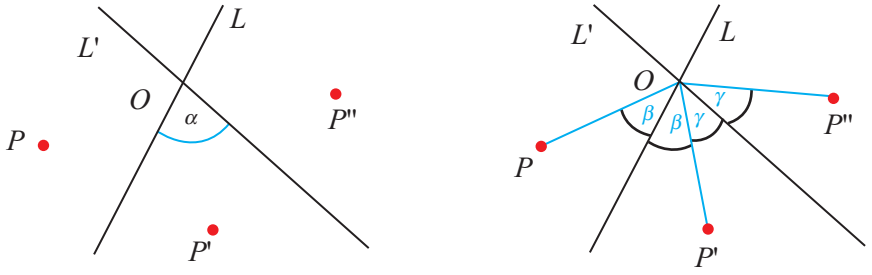
a) ¿Es cierto que si un punto **P** está en la recta **L**, entonces **ST** lo transforma en un punto de **L**?

b) ¿Es cierto que $\mathbf{TS}(\mathbf{P}) = \mathbf{ST}(\mathbf{P})$ para cualquier punto **P**, del plano?

10 ¿Qué pasa con la composición de reflexiones?

Para responder esta pregunta, debemos considerar tres casos:
1º que los ejes de las simetrías son el mismo.
2º que los ejes son paralelos no iguales.
3º que los ejes se intersectan en un solo punto.

Ahora estudiaremos el tercer caso. Para eso, consideremos dos reflexiones, una respecto a la recta L y otra respecto a la recta L'. Denotemos por O, la intersección de L con L' y por α el ángulo agudo o recto que forman. Dispongamos un punto P, apliquemos la reflexión respecto a L, llamemos P' su imagen. A P' apliquemos la reflexión respecto a L' y llamemos P'' su imagen.



Como las reflexiones preservan distancia, se tiene que $\overline{OP}$ mide lo mismo que $\overline{OP'}$. Por la misma razón $\overline{OP'}$ mide lo mismo que $\overline{OP''}$. Es decir, los puntos P, P' y P''están en una circunferencia de centro O.

Como las reflexiones también preservan ángulos, se tiene que la medida del ángulo entre $\overline{OP}$ y L es la misma que el ángulo entre L y $\overline{OP'}$. Llamemos β ese ángulo.

Del mismo modo la medida del ángulo entre L' y $\overline{OP'}$ es la misma del ángulo entre L' y $\overline{OP''}$. Llamemos γ a ese ángulo. Por lo tanto el ángulo $\angle POP''$ mide $2\beta+2\gamma$.

Notemos que $\beta+\gamma=\alpha$, por lo tanto $\angle POP''$mide 2α. Resumiendo, tenemos el siguiente resultado:

> Dada la reflexión V respecto a L y dada la reflexión U respecto a L'.
> Si L y L' se intersectan en O con un ángulo agudo o recto α, entonces la isometría UV es la rotación de centro O y ángulo 2α.

actividades

1. ¿Qué se obtiene si se componen dos reflexiones que tienen el mismo eje de simetría?
2. ¿Qué se obtiene si se componen dos reflexiones que tienen ejes de simetría paralelos no coincidentes?
3. En la explicación que dimos arriba, pusimos **P** más cerca de **L**, ¿cómo hubiese sido la explicación si hubiese estado en **L**?
4. ¿Cómo hubiese sido la explicación, si **P** hubiese estado en donde resultó **P''**?
5. ¿Conmutan las reflexiones?

aplicando lo aprendido

1 Si al segmento $\overline{AB}$ de coordenadas **A**(–1,0) y **B**(–2,3) se le aplica la composición $\mathbf{R}_{(0,180°)} \circ \mathbf{T}_{(1,1)}$, las coordenadas de la imagen **B'** es:

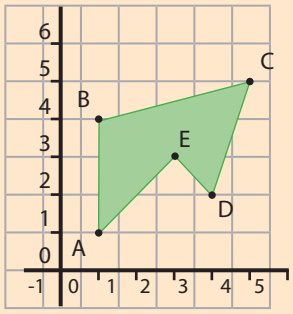
a) **B'** (–1;4)

b) **B'** (2,–3)

c) **B'** (–1,–4)

d) **B'** (1,–4)

2 Dado el siguiente pentágono, grafica las siguientes composiciones de transformaciones aplicadas a él:

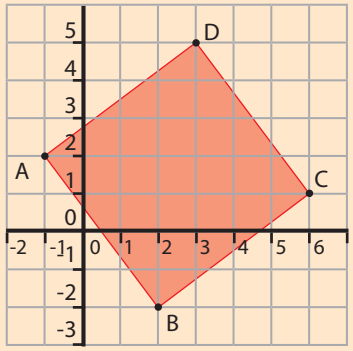


a) Reflexión respecto a la recta horizontal que pasa por el punto **P**(0,3) compuesta con $\mathbf{T}_{(-5,3)}$.

b) $\mathbf{T}_{(-5,3)}$ compuesta con una reflexión respecto a la recta horizontal que pasa por el punto **P**(0,3)

c) ¿Qué puedes conjeturar a partir de los resultados que obtuviste en los ejercicios **a)** y **b)**?

3 Observa la siguiente figura:



a) ¿Qué composición isométrica permite llevar al segmento $\overline{AB}$, al segmento $\overline{AD}$ y luego al segmento $\overline{BC}$?

b) ¿Qué composición isométrica permite llevar al segmento $\overline{AB}$, al segmento $\overline{BC}$ y luego al segmento $\overline{AD}$?

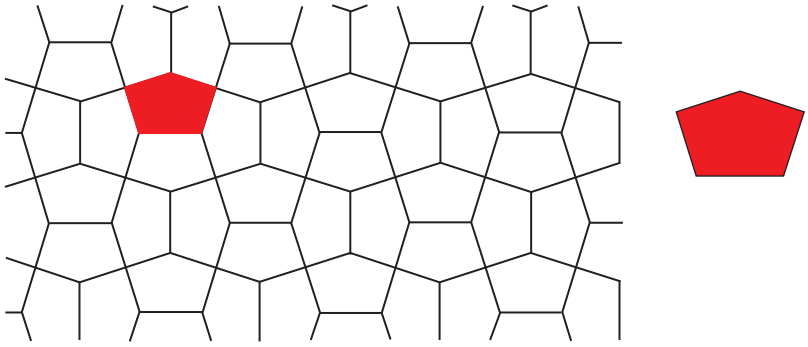
c) ¿Cuáles son las coordenadas del cuadrado si se le aplica la composición $\mathbf{R}_{((2,-2),180°)} \circ \mathbf{R}_{((2,-2),180°)}$?

d) ¿Cuáles son las coordenadas del cuadrado si se le aplica las composición $\mathbf{T}_{(4,3)} \circ \mathbf{R}_{((6,1),90°)}$?

e) ¿Cuáles son las coordenadas del cuadrado si se le aplica la composición $\mathbf{T}_{(4,3)} \circ \mathbf{R}_{((3,5),180°)} \circ \mathbf{T}_{3,-4}$?

4 Sea el segmento $\overline{AB}$ de coordenadas **A**(3,1) y **B**(6,1). Por medio de las composiciones $\mathbf{R} \circ \mathbf{S}$ ó $\mathbf{S} \circ \mathbf{R}$, construya un hexágono regular que se encuentre en el primer cuadrante. **S**, es una reflexión con respecto a una recta **L**.

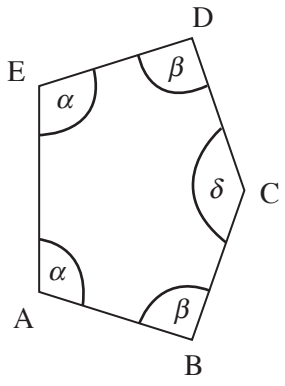
En las calles de El Cairo, en Egipto, se ven baldosas que cubren todo el piso, en la forma que mostramos abajo:



La de la derecha corresponde a la baldosa básica, que si se disponen varias de ellas en diferentes posiciones, cubren todo el piso, sin dejar trechos vacíos entre ellas, y sin necesidad de superponer una en la otra. Al proceso de llenar el plano con baldosas, los matemáticos llaman *teselar*.

Una *teselación* es una manera de cubrir el plano con figuras, de tal manera que no haya lugares del plano que no resulten cubiertos por las figuras (no hay vacíos), ni tampoco las figuras se superpongan (no se traslapan).

Si con la repetición de una misma figura F se puede cubrir el plano, decimos que F tesela el plano. Por ejemplo, las baldosas de El Cairo teselan el plano y la teselación resultante se denomina *Teselación de El Cairo*. La figura de esa baldosa corresponde a un pentágono, pero no cualquier pentágono, sino que uno con propiedades especiales que permiten el calce perfecto entre una y otra figura (ver figura de la derecha). De hecho, veremos que el pentágono regular no tesela el plano.



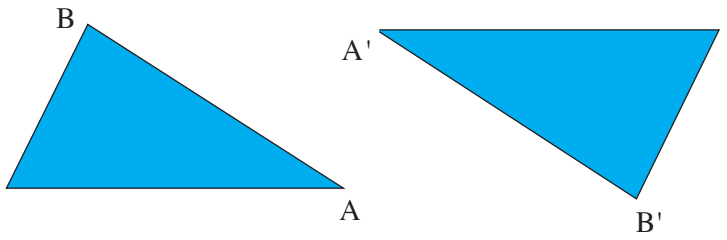
Estudiemos teselaciones con un solo tipo de figuras, y partamos con una muy simple: el paralelógramo. Los paralelógramos tienen la propiedad de que sus lados opuestos son paralelos, de modo que si se pone uno al lado del otro calzan perfectamente bien, lo mismo que si se coloca uno arriba del otro. Es decir:

Cualquier paralelógramo tesela el plano.

actividades

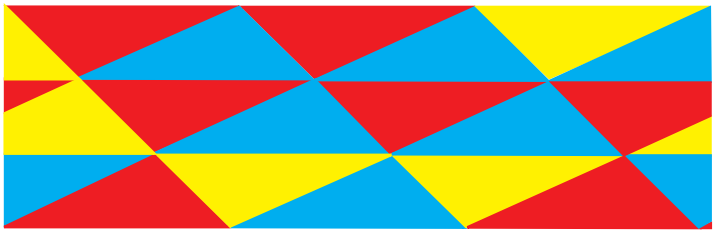
1. En la baldosa básica de la teselación de El Cairo, los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$ miden lo mismo. Demuestra que $\beta = 90^{\circ}$ y que $2\alpha + \delta = 360^{\circ}$.
2. Utiliza esta teselación para hacer una nueva utilizando hexágonos no regulares.

Ya sabemos que cualquier paralelógramo tesela el plano. Ahora, consideremos un triángulo cualquiera, y consideremos el que resulta de aplicar la rotación en 180^o y centro en A.



Si pegamos esos triángulos por el lado AB y $A'B'$, respectivamente, se forma un paralelógramo, que como sabemos tesela el plano. Entonces tenemos el siguiente resultado:

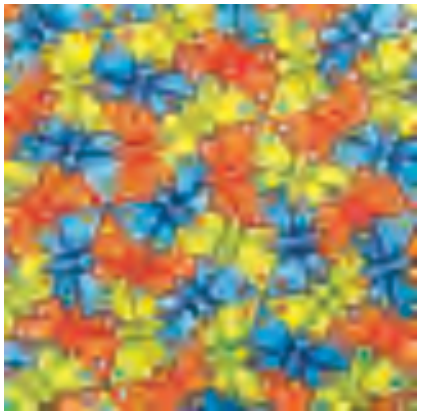
Todo triángulo tesela el plano.



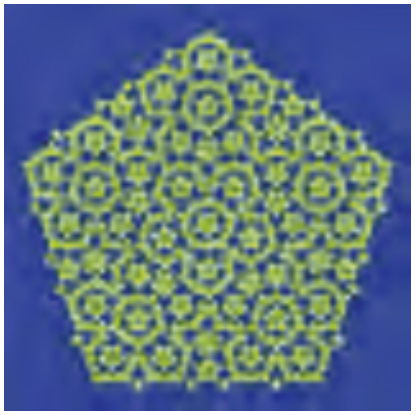
Como casos particulares, podemos decir que el cuadrado, el rectángulo, el triángulo isósceles, el triángulo equilátero y el rombo teselan cada uno por si solo el plano.

Existen muchas teselaciones distintas con diversos diseños, algunas están formadas por un patrón que se repite y en otras no hay patrones.

A continuación mostramos algunas:



Obra del artista holandés
M.C Escher (1898-1972)



Teselación del físico británico
Roger Penrose (1931)

Detalle de un mosaico del
Palacio de La Alhambra
en Granada, España.

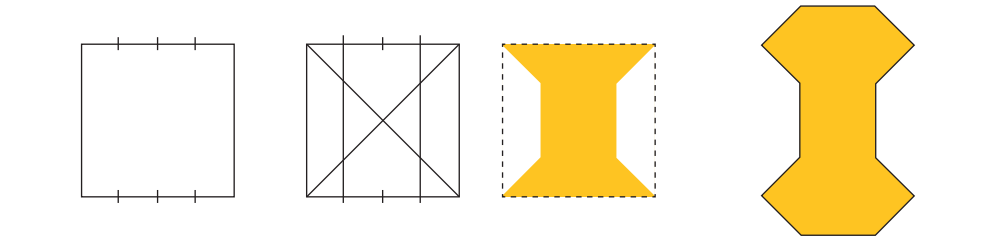
Como hemos visto, las teselaciones han sido empleadas en el arte y en la arquitectura. Sin duda M.C. Escher es considerado el más grande artista que utilizó la geometría y la matemática en general para desarrollar sus obras. Él desarrolló una técnica exquisita al respecto y muchos de sus trabajos tienen como tema central objetos matemáticos.

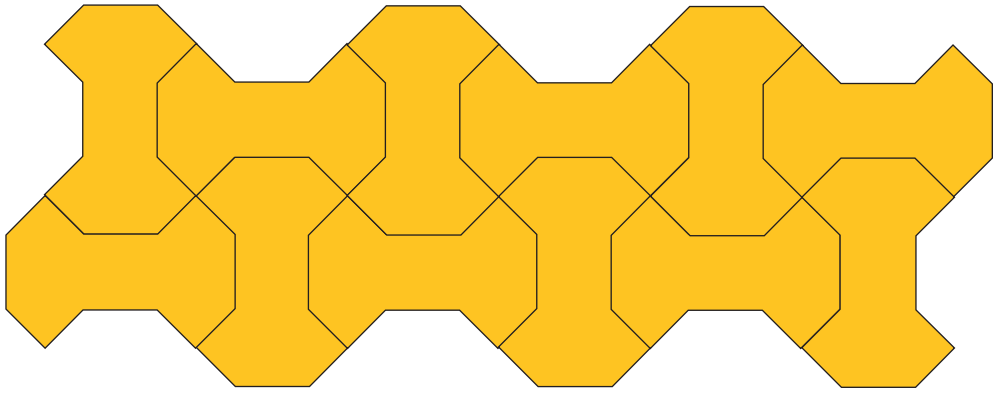
nota

Puedes visitar su galería en el sitio:
www.mcescher.com

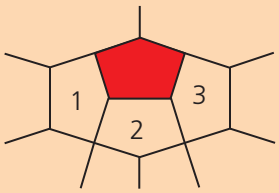
Las teselaciones generalmente nacen de los polígonos, pero para formar teselaciones más interesantes es muy utilizado el método de "agregar y quitar".

Éste consiste en tomar un polígono que sabemos que tesela, quitarle alguna figura de uno de sus lados y agregarlo en algún lado que permita que encajen perfectamente bien las nuevas baldosas. A continuación mostramos un ejemplo de este método aplicado a un cuadrado.





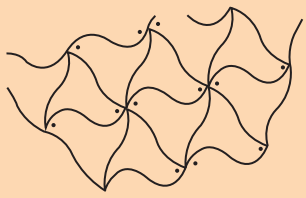
actividades



B

1. En la teselación de El Cairo, ¿cuáles isometrías hay que aplicarle a la baldosa B, sin considerar las traslaciones, para ponerla en cada caso en 1 en 2 y en 3?

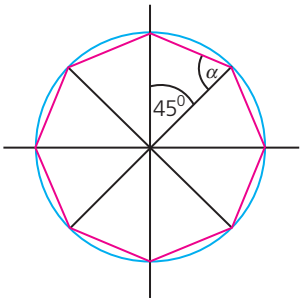
2. La teselación de la derecha surge de la del triángulo equilátero. Explica el proceso de cómo el triángulo equilátero fue transformado en la baldosa básica de esta teselación.



11 Teselaciones regulares

Como vimos antes, se puede teselar el plano con triángulos de cualquier tipo y también con paralelogramos. En particular, se puede teselar con un triángulo equilátero, y con un cuadrado.

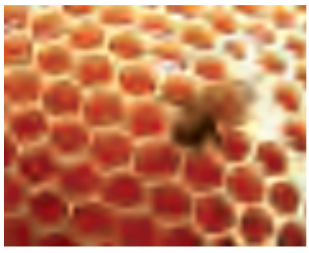
¿Con qué otro polígono regular se puede teselar?

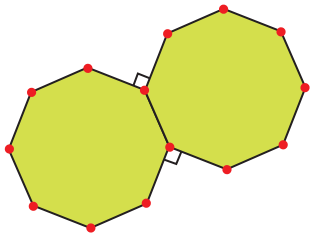


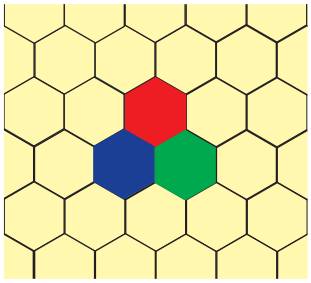
Recuerda que un polígono regular de n lados, es aquel cuyos lados y todos sus ángulos interiores miden lo mismo. Un polígono regular se puede construir en una circunferencia, dividiendo el ángulo completo del centro en n partes iguales. En la figura de la izquierda, construimos un polígono regular de 8 lados. Dividiendo el ángulo 360° en 8, resultó 45°. Entonces marcamos 8 ángulos de 45° cada uno.

Como cada triángulo que se forma en el interior del polígono es isósceles, el ángulo α cumple con $2\alpha + 45 = 180$, entonces, $2\alpha = 135$. Como un ángulo interior del polígono es igual a 2α se tiene que el ángulo interior del octógono mide 135°.

Al intentar teselar con octógonos resulta que al pegar dos, en cualquiera de los vértices comunes tenemos $135 + 135 = 270$ grados. Por lo tanto, sólo nos falta un ángulo recto para formar un ángulo completo (360°).







Como vemos en la figura superior, no podemos agregar un nuevo octógono, puesto que la suma de los ángulos interiores superaría los 360°. Por lo tanto, no podemos teselar con octógonos regulares.

Pero como bien saben las abejas, se puede teselar con hexágonos regulares.

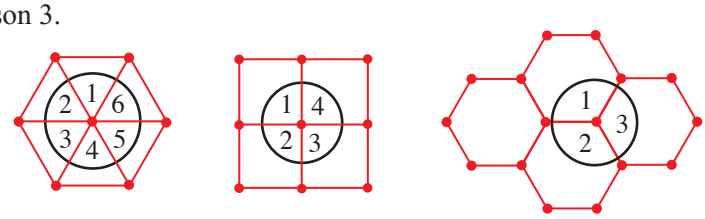
actividades

1. ¿Cuánto mide el ángulo interior de un hexágono regular? ¿Es un divisor de 360°?
2. ¿Puedes teselar con un pentágono regular? ¿Su ángulo interior es un divisor de 360°?
3. ¿Puede ser 180° el ángulo interior de un polígono?

Una teselación se denomina **regular** si está compuesta por un solo tipo de baldosa y ésta es un polígono regular.

Por ejemplo, la teselación con triángulos equiláteros, con cuadrados y con hexágonos regulares, son ejemplos de teselaciones regulares. ¿Habrá otras? ¿Qué crees tú?

Para dar respuestas a las preguntas planteadas, primero es necesario notar que en cada vértice de una teselación regular confluye la misma cantidad de baldosas, para el caso de los cuadrados son 4, para el caso del triángulo equilátero son 6 y para el hexágono son 3.



Supongamos que un polígono regular tesela el plano, entonces en cada vértice confluye el mismo número de polígonos, digamos m. Como es regular, todos los ángulos miden lo mismo, y como forman un ángulo completo, se tiene que m veces el ángulo interior es 360^{o}. Si llamamos α al ángulo interior, podemos afirmar que $m\alpha = 360$, es decir,

$$m = \frac{360}{\alpha}$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado:

La medida de un ángulo interior de un polígono de una teselación regular es un divisor de 360

Entonces, el problema se reduce a encontrar los polígonos regulares, cuyos ángulos interiores sean divisores de 360.

A continuación en la tabla te presentamos los divisores de 360:

1	2	3	4	5	6
8	9	10	12	15	18
20	24	30	36	40	45
60	72	90	120	180	360

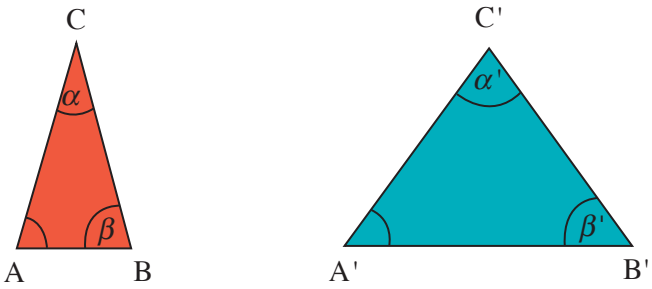
Como el ángulo interior de un pentágono regular es 108^{o} y como el 108^{o} no es un divisor de 360^{o}, podemos afirmar que el pentágono regular no tesela el plano. Como 135^{o} no divide a 360^{o} se tiene que el octógono regular tampoco lo tesela.

actividades

1. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla: **n** indica la cantidad de lados del polígono regular y α es la medida del ángulo interior.

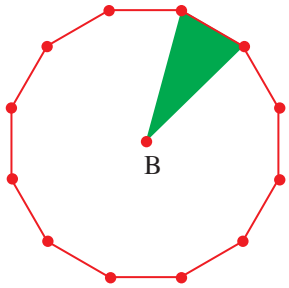
n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α	120	90	?	?	?	?	?	?	?	?

Como sabemos, un polígono regular tesela el plano si su ángulo interior divide a 360^o. Para encontrar aquellos ángulos, hagamos la siguiente observación: consideremos dos triángulos isósceles, donde la base es AB y $A'B'$ respectivamente.



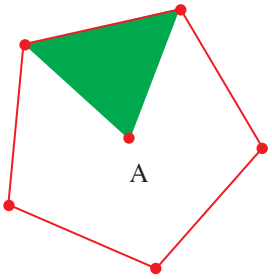
Notamos que si α es más chico que α', entonces 2β es más grande que $2\beta'$, pues

$$2\beta = 180 - \alpha \text{ y por su parte } 2\beta' = 180 - \alpha'$$



En particular, consideremos un polígono regular A de n lados y otro B de m lados, con $m > n$. El ángulo del centro de A es $\frac{360}{n}$, en cambio, el ángulo del centro de B es $\frac{360}{m}$. Como $m > n$, se tiene que:

$$\frac{360}{m} < \frac{360}{n}$$



Como el hexágono regular tiene un ángulo interior de 120°, cualquier polígono regular de más lados que 6, tendrá un ángulo interior mayor que 120°, pero como entre 120° y 180° no hay ningún divisor de 360° se tiene que no hay ningún polígono regular de más de 6 lados que tesele al plano. Entonces, los únicos polígonos regulares que teselan al plano son los que ya conocemos: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular.

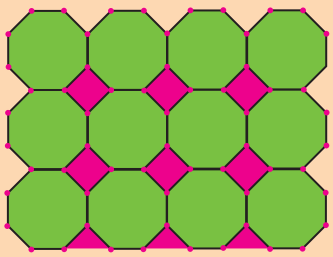
En definitiva, hemos demostrado el siguiente resultado:

> Las únicas teselaciones regulares están formadas por polígonos regulares de 3, 4 ó 6 lados.

actividades

1. Cuando intentábamos teselar con octógonos regulares nos dimos cuenta de que era imposible, porque al pegar dos baldosas sólo quedaban disponibles 90° los que no eran suficientes para poner otra baldosa. Esto nos lleva a pensar que sí podemos teselar utilizando octógonos y cuadrados:

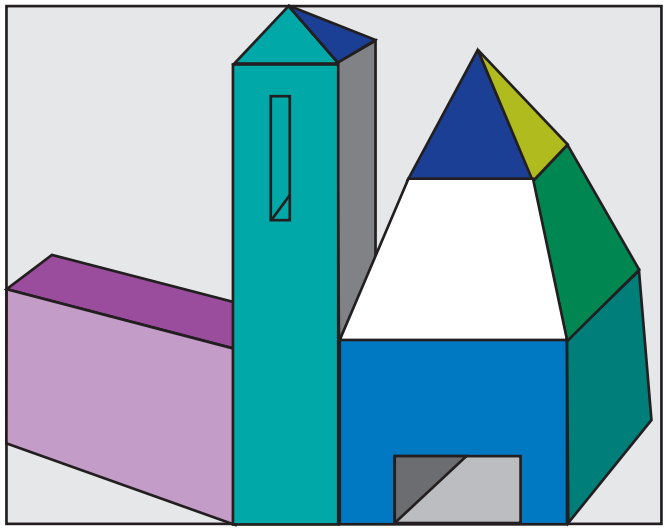
Estas teselaciones se llaman *semi-regulares* y están compuestas por más de un polígono regular. Encuentra otra de este tipo.



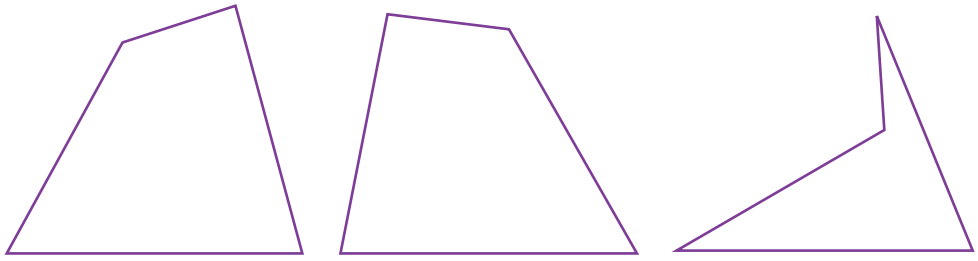
2. ¿Puede el pentágono regular ser parte de una teselación semi-regular?

13 Vitral

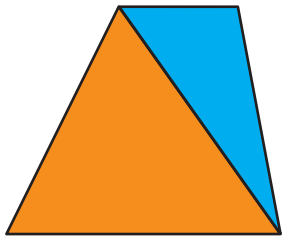
Amaru está realizando un trabajo de artes para el Liceo, debe construir un vitral usando papeles transparentes de colores. Él ha decidido recrear una iglesia como la que se muestra en la figura. Para terminar el trabajo le falta colocar la última pieza (aparece en blanco en la imagen), pero no puede calcarla por el tipo de material, necesita construirla directamente en el papel transparente.



Amaru tomó las medidas del cuadrilátero que le falta construir para completar su vitral. Las medidas del cuadrilátero son 15 cm, 12 cm, 6 cm y 13 cm. Sin embargo, al comenzar a construir el cuadrilátero obtuvo varias figuras diferentes. ¿Coinciden con el cuadrilátero que le falta a Amaru para completar el vitral?, ¿cómo puede construir Amaru el cuadrilátero correcto?



Amaru recordó que para construir los triángulos que están en la parte superior de la iglesia, la estrategia de medir los lados le dio resultado. Por lo que midió la diagonal del cuadrilátero que necesitaba construir, obteniendo así el cuadrilátero correcto.



Amaru concluyó que había que determinar triángulos en el cuadrilátero para poder construirlo. ¿Será necesario medir las dos diagonales?

aplicando lo aprendido

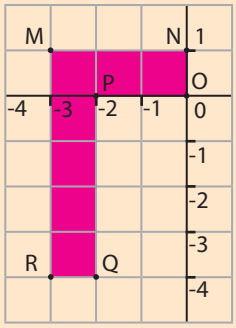
1 Ubica el punto **H**(3,5) en el plano cartesiano.

a) Rota el plano en torno al origen de coordenadas en 90°. ¿Cuáles son las coordenadas de la imagen **H'**?

b) Rota el plano en torno al origen de coordenadas en 180°. ¿Cuáles son las coordenadas de la imagen **H"**?

c) Rota el plano en torno al origen de coordenadas en 270°. ¿Cuáles son las coordenadas de la imagen **H"'**?

2 Determina las coordenadas de los vértices de la figura geométrica **MNOPQR** y realiza las transformaciones que se indican:



a) Aplica una rotación $\mathbf{R}_{(0,270°)}$ a la figura **MNOPQR**.

b) A la imagen que obtuviste anteriormente llámale **M'N'O'P'Q'R'**. Realiza la siguiente rotación a esta figura: $\mathbf{R}_{(0,180°)}$ cuya imagen denominarás **M"N"O"P"Q"R"**.

c) ¿Existe una rotación que lleve la figura **MNOPQR** en la figura **M"N"O"P"Q"R"**? Si así fuera, ¿cuál sería esa rotación?

3 Se tiene el segmento $\overline{\mathbf{AB}}$ de coordenadas **A**(0,3) y **B**(4,0). Este segmento es rotado en torno a **B** entonces:

a) Si la imagen $\overline{\mathbf{A'B'}}$ es una línea vertical, ¿cuáles son las posibles coordenadas para **A'** y **B'**?

b) Realiza el mismo ejercicio que en **a)**, pero antes refleja el segmento **AB** con respecto al eje **X** de coordenadas y luego rótalo en torno a **B**.

4 Para producir un cuadrilátero idéntico a otro, ¿basta conocer la medida de sus lados?

5 Toma dos lápices de distintas medidas, por ejemplo, uno mide 10 cm y otro 8 cm. Disponlos de modo que sean los lados de un triángulo. Cierra el triángulo, con otros lápices, de diferentes medidas, uno por vez.

¿Es cierto que el tercer lado, puede ser tan pequeño como se quiera? ¿Puede ser tan grande como queramos? ¿Es cierto que el ángulo entre los dos primeros lápices, depende del largo del tercero? ¿Es cierto que mientras más largo es el tercero, más grande es el ángulo entre los dos primeros lápices?

6 Para que Amaru, construya una pieza triangular del vitral, ¿basta saber los ángulos del triángulo?

7 Para que Ancavil, construya una pieza triangular del vitral, ¿basta saber la medida de los lados del triángulo?

8 ¿Qué información se necesita para construir una pieza del vitral de forma pentagonal?

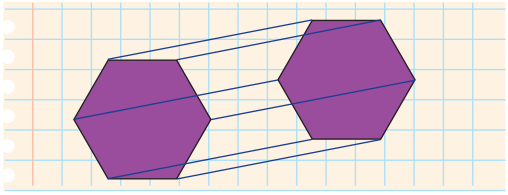
9 Para construir un rombo, ¿basta conocer la medida de sus diagonales?

10 Para construir un rectángulo, ¿basta conocer la medida de un lado y la medida de una diagonal?

13 Congruencias

Cuando dos amigos se encuentran, y se percatan que llevan el mismo modelo de zapatillas, uno de ellos dice: "¡tus zapatillas son **iguales** a las mías!," en realidad están abusando del lenguaje, pues no son exactamente iguales; para una se ocupó un pedazo de lona y para la otra otro pedazo de lona. Si fuesen iguales ocuparían el mismo lugar en el espacio. Ni siquiera tu ojo izquierdo es igual a tu ojo derecho. Ni siquiera un máquina troqueladora de cuero puede cortar dos piezas iguales, pues están hechas de pedazos de cuero distintos. Lo que queremos decir, es que usamos la palabra "igual" cuando queremos expresar que si pudiésemos poner un objeto sobre otro calzarían perfecto. Es decir, si los amigos que llevan el mismo modelo de zapatillas, y si tienen la misma medida de pie, se intercambiaran las zapatillas nadie lo notaría.

En matemáticas pasa lo mismo: si dibujas dos hexágonos regulares de lado 10 cm cada uno, en una hoja de papel, no pueden ser iguales, pues están en lugares distintos de la hoja, pero con una isometría es posible transformar uno en el otro. En este caso la isometría es una traslación.



En matemáticas, cuando existe una isometría (traslaciones, rotaciones, reflexiones o composición de ellas) que transforma una figura en otra, no decimos que son iguales, sino que son **congruentes**.

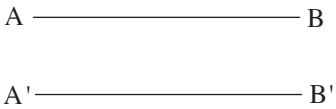
nota

Si dos figuras **A** y **B** son congruentes, anotaremos $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

Dos figuras son congruentes si una es la imagen de la otra, vía una isometría.

Como las isometrías preservan medidas de ángulos y segmentos, entonces si dos figuras son congruentes, las medidas de sus ángulos y segmentos son las mismas.

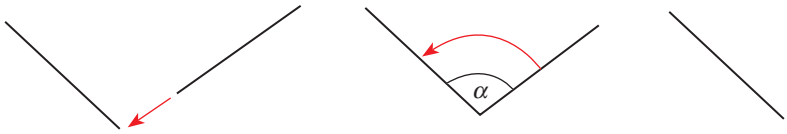
Si una figura tiene un segmento recto $\overline{AB}$, y se le aplica una isometría a la figura obteniendo el segmento recto $\overline{A'B'}$ en la imagen, A y A' se llaman puntos **homólogos**, y los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, también se llaman **homólogos**. Si decimos $\overline{AB}$ es homólogo a $\overline{A'B'}$ queremos decir que existe una isometría que lleva A en A' y B en B', en ese orden.



actividades

1. ¿Es cierto que un cuadrado de lado **a** es congruente con cualquier cuadrado de lado **a**?
2. ¿Es cierto que un segmento de largo 10 cm es congruente con cualquier otro segmento de largo 10 cm?

Para comenzar, consideremos dos segmentos de la misma medida, ¿serán congruentes?



importante

Desde luego la pregunta inversa es inmediatamente cierta, pues si dos segmentos son congruentes, entonces uno de ellos es la imagen del otro vía una isometría, pero como las isometrías preservan distancias, esos segmentos deben medir lo mismo.

Primero con una traslación, hagamos coincidir un extremo de un segmento con un extremo del otro segmento.

Ahora, medimos el ángulo entre los segmentos, si ese ángulo es α, entonces realizamos un rotación de ángulo α y con centro en el punto de coincidencia de los trazos, como ambos segmentos miden lo mismo, ambos son radios de una misma circunferencia. Entonces, la composición de la traslación con la rotación transforma un segmento en el otro. Entonces tenemos que:

Un par de segmentos son congruentes
sí y sólo sí miden lo mismo.

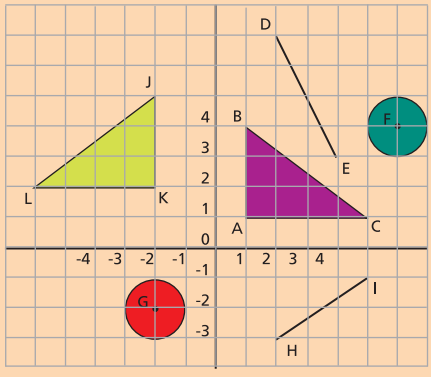
Consideremos ahora, dos circunferencias si son congruentes, quiere decir, que existe una isometría que transforma una en la otra, en particular el centro de una es transformado en el centro de la otra y como la isometría preserva distancias, se tiene que los radios miden lo mismo. En el otro sentido, consideremos dos circunferencias del mismo radio.

En este caso, basta considerar la traslación que transforma el centro de una circunferencia en el centro de la otra. Como los radios miden lo mismo, la primera circunferencia es transformada en la segunda vía la traslación.

actividades

- Considera las siguientes figuras en el plano cartesiano: ¿Cuáles parejas de figuras son congruentes?

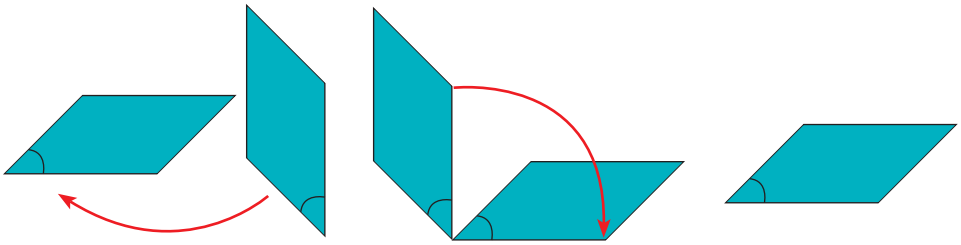
  En cada caso describe la isometría que transforma una figura en la otra.



De la página anterior tenemos que:

Dos circunferencias son congruentes si y sólo si tienen el mismo radio.

Según vimos, en la actividad de la página anterior, para dar la información precisa de un paralelógramo, no basta con dar a conocer la medida de sus lados, pues hay infinitos con esas condiciones. En nuestro nuevo lenguaje, significa que dos paralelogramos de lados que miden lo mismo no necesariamente son congruentes. Pero, si además agregamos como datos las medidas de sus ángulos, entonces sí los podemos conocer únicamente.



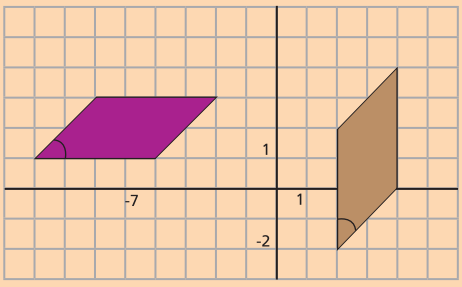
Primero, reconozcamos dos ángulos que midan lo mismo en cada uno de los paralelogramos, luego vía una traslación llevemos el vértice del ángulo reconocido en el primer paralelógramo en ángulo reconocido del segundo. Luego vía una rotación, con centro en el vértice en común, hagamos coincidir los lados que forman el ángulo reconocido como ambos son paralelogramos de las mismas medidas, todos los otros lados coincidirán. Por lo tanto, los paralelogramos son congruentes.

En un caso más general puede ser necesario, además, una reflexión. Entonces, dos paralelogramos son congruentes si y sólo si sus lados y ángulos miden lo mismo.

Dos paralelogramos son congruentes si y sólo si sus lados homólogos tienen iguales medidas y la medida de uno de sus ángulos coincide.

actividades

- Describe la isometría que permite afirmar que los siguientes paralelogramos son congruentes:



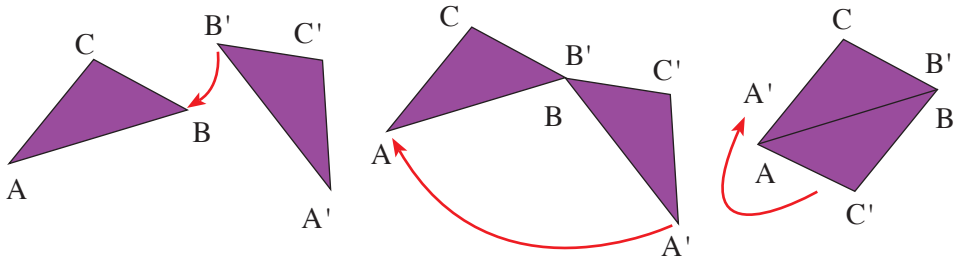
Como los rectángulos son paralelogramos, entonces dos rectángulos son congruentes si y sólo si sus lados homólogos miden lo mismo y la medida de uno de sus ángulos coincide. Pero, como los rectángulos tienen todos sus ángulos rectos, la información de los ángulos es redundante, no es necesario darla. Por lo tanto:

Dos rectángulos son congruentes si y sólo si
sus lados homólogos miden lo mismo.

Como los cuadrados son un caso especial de rectángulos, entonces dos cuadrados son congruentes si y sólo si sus lados miden lo mismo. Pero como los lados de un cuadrado miden todos lo mismo se tiene que:

Dos cuadrados son congruentes si y sólo si
sus lados homólogos miden lo mismo.

Ahora, estudiemos el caso de los triángulos. Si dos triángulos son congruentes, entonces sus lados y ángulos miden lo mismo. A la inversa, si tenemos dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ tales que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, y además $m(\angle ABC) = m(\angle A'B'C')$, $m(\angle ACB) = m(\angle A'C'B')$, y $m(\angle CAB) = m(\angle C'A'B')$



Vía una traslación llevamos el punto B' en el punto B. Como $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, una rotación con centro en B, permite llevar A' en A. Luego, si es necesario, vía una reflexión entorno al eje $\overline{AB}$, se obtiene que C' calza con C. Luego los triángulos son congruentes. Entonces,

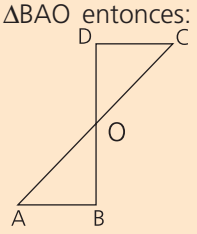
Dos triángulos son congruentes si y sólo si
sus lados y ángulos homólogos miden lo mismo.

actividades

1. ¿Existe un triángulo cuyos lados midan 5 cm, 6 cm y 7 cm? Júntate con varios compañeros y cada uno construya un triángulo con palitos de helados, con las medidas dadas. ¿Son todos los triángulos construidos congruentes?
2. Si las medidas de los lados de dos triángulos son las mismas, ¿los triángulos son congruentes?
3. De un triángulo se conoce que un lado mide 7 cm y otro lado mide 8 cm y que el ángulo entre ellos es de 60º. Júntate con varios compañeros y cada uno construya un triángulo con palitos de helados, con las medidas dadas. ¿Son todos los triángulos construidos congruentes?

aplicando lo aprendido

1 Si $\Delta DCO \cong \Delta BAO$ entonces:



a) Prueba que O es punto medio de $\overline{DB}$ y $\overline{AC}$.

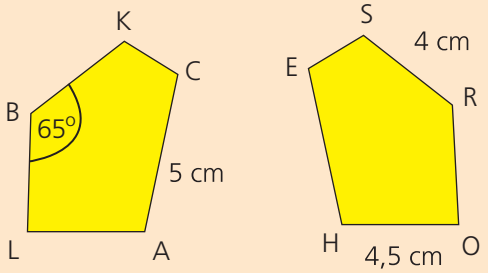
b) Es correcto afirmar que si $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ entonces $\overline{CD} \perp \overline{BD}$?, ¿porqué?

2 Analiza y determina para cada caso si los siguientes pares de triángulos dados son congruentes:

a) Si ΔABC, $\overline{AB} = 4$ cm, $\mathbf{m}\angle ABC = 45°$ y $\overline{BC} = 6$ cm y ΔDEF, $\overline{DE} = 4$ cm, $\mathbf{m}\angle DEF = 45°$ y $\overline{EF} = 6$ cm.

b) Si ΔRST, $\overline{RS} = 5$ cm, $\mathbf{m}\angle RST = 100°$ y $\mathbf{m}\angle SRT = 30°$ y ΔXYZ, $\overline{XY} = 5$ cm, $\mathbf{m}\angle YXZ = 30°$ y $\mathbf{m}\angle XYZ = 100°$

3 El pentágono KBLAC es congruente con el pentágono SROHE como muestra la figura.



a) Completa:

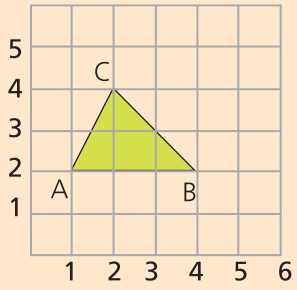
$\mathbf{m}(\overline{KB}) =$? cm $\mathbf{m}(\overline{EH}) =$? cm

$\mathbf{m}(\overline{LA}) =$? cm $\mathbf{m}\angle SRO =$? cm

b) ¿Cuál es la medida de la suma de los ángulos interiores de un pentágono?

c) Si tenemos dos pentágonos que no son congruentes, ¿es la misma la suma de los ángulos interiores de los pentágonos?

4 Júntate con cinco compañeros y observen el triángulo **ABC** de la figura:

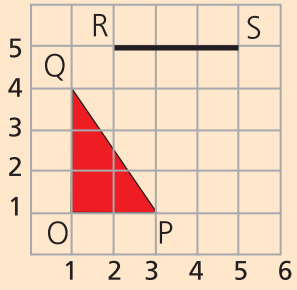


a) Determinen de manera individual las coordenadas de un punto **D** tal que $\Delta ABC \cong \Delta ABD$.

b) Comparen sus respuestas: ¿coincidieron o hay alguna respuesta distinta? Si todos coinciden en la respuesta encuentren otro punto **E** tal que $\Delta ABC \cong \Delta ABE$. ¿Existirán más puntos que cumplan con estas características?

c) Verifiquen que con todos los puntos encontrados se cumpla la congruencia con el triángulo **ABC**.

5 Observa junto a tres compañeros el triángulo ΔOPQ y el segmento $\overline{RS}$ de la figura:



a) Determinen de manera individual las coordenadas de un punto **T** tal que $\Delta OPQ \cong \Delta RTS$.

b) Comparen sus respuestas. ¿Coincidieron o hay alguna respuesta distinta? Si todos coinciden en la respuesta encuentren otro punto **M** tal que $\Delta OPQ \cong \Delta RTM$. ¿Existirán más puntos que cumplan con estas características?

c) Verifiquen que con todos los puntos encontrados se cumpla la congruencia con el triángulo **OPQ**.

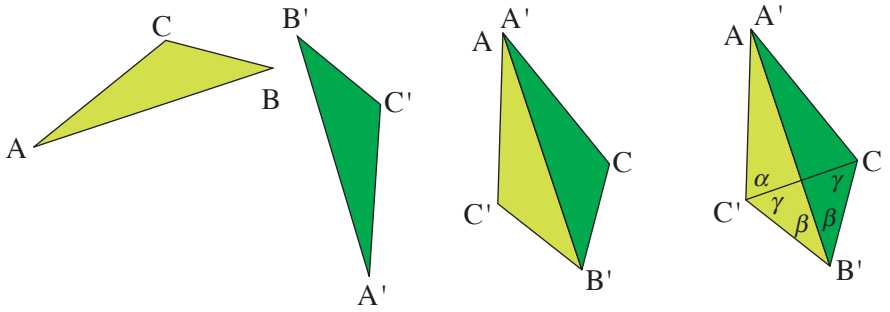
14 Triángulos congruentes

Como hemos visto, dos triángulos son congruentes si y sólo si sus lados miden lo mismo y sus ángulos miden lo mismo. Sin embargo, como los ángulos interiores de un triángulo suman un ángulo extendido (180º), en realidad nos basta que tengan los tres lados de iguales medidas y dos ángulo de iguales medidas, pues el tercero está obligado a medir la diferencia entre 180º y la suma de los otros dos.

Es decir, si dos triángulos tienen dos ángulos de iguales medidas, el tercero también coincide.

Entonces, hemos quitado una información redundante, ¿podremos quitar otra? ¿Bastará tres lados iguales y un ángulo igual para que dos triángulos sean congruentes? Investiguemos.

Consideremos dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, tales que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, y además $\angle ABC$ mide lo mismo que $\angle A'B'C'$.



Como $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, existe una isometría que lleva A en A' y B en B'. Tracemos ahora el segmento $\overline{CC'}$, Por la congruencia de los lados, se tiene que los triángulos. $\Delta CBC'$ y $\Delta CAC'$ son isósceles, entonces los ángulos $\angle CC'A$ y $\angle C'CA$ miden lo mismo. Del mismo modo los ángulos $\angle CC'B$ y $\angle C'CB$ miden lo mismo.

Por lo tanto, el ángulo $\angle ACB$ mide lo mismo que el ángulo $\angle A'C'B'$, entonces los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, tienen lados que miden lo mismo, y dos ángulos que miden lo mismo. Por lo tanto los triángulos son congruentes. Resumiendo, tenemos:

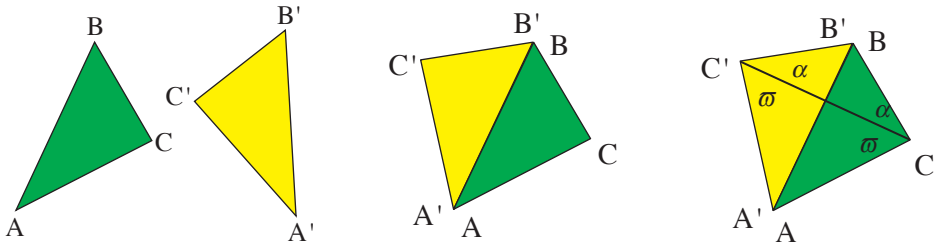
> Si la medida de los lados de dos triángulos y la medida de uno de sus ángulos son iguales, entonces los triángulos son congruentes.

actividades

- Don Pedro corta maderas de formas triangulares. El está seguro de que todavía hay información redundante. Es decir, si conoces los lados de un triángulo, entonces lo conoces completamente. En nuestro lenguaje, decimos que si dos triángulos tienen lados que miden lo mismo, entonces son congruentes. ¿Estás de acuerdo con don Pedro?

Nuestra intuición nos dice que todavía hay información redundante, de hecho si construimos triángulos con palitos de maquetas o con palitos de helados de medidas fijas, los ángulos, los tres, quedan totalmente determinados.

Entonces, nuestra conjetura es que si dos triángulos tienen los tres lados de igual medida entonces los triángulos son congruentes. Investiguemos este caso. Consideremos dos triángulos de iguales medidas, ΔABC y $\Delta A'B'C'$, tales que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$. Por lo que vimos en la página anterior, basta mostrar que tienen al menos un ángulo de igual medida para demostrar que son congruentes.



Mediante una isometría haremos coincidir los vértices A con A' y B con B', igual que en el caso anterior, trazando el segmento CC', formamos dos triángulos isósceles, a saber son, $\Delta CC'A$ y $CC'B$. Por lo tanto los ángulos $\angle CC'A$ mide lo mismo que el ángulo $\angle C'CA$ y por la misma razón los ángulos $\angle C'CB$ y $\angle CC'B$ miden lo mismo. Por lo tanto los ángulos $\angle ACB$ y $\angle A'C'B'$ miden lo mismo, por lo tanto los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, son congruentes.

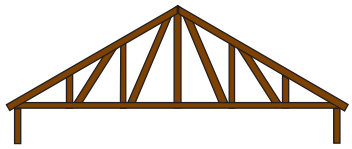
Resumiendo, hemos demostrado:

Teorema (Criterio LLL)

Si las medidas de los lados correspondientes de dos triángulos son las mismas, entonces los triángulos son congruentes.

Al anterior teorema le llaman el Criterio de Congruencia de triángulos **lado-lado-lado**. Este teorema explica por qué las construcciones buscan formar triángulos.

Pues si tienes un triángulo de madera por ejemplo, bien clavados y si las maderas no se deforman, debieran mantenerse en el tiempo sin variar sus posiciones, debido a que los ángulos deben ser los mismos a lo largo del tiempo, si los lados se mantienen fijos. En cambio si tuvieras un cuadrado, este puede deformarse, transformándose en un rombo, pues los ángulos pueden cambiar sin necesidad de cambiar la medida de sus lados.



actividades

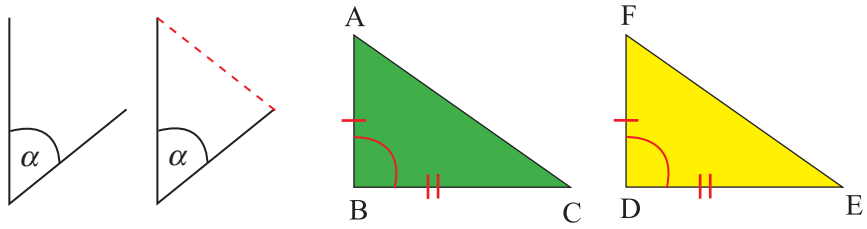
1. Muestra que las diagonales de un cuadrado dividen a éste en cuatro triángulos rectángulos congruentes.
2. En una circunferencia, marca un ángulo de 60°, donde el vértice sea el centro de la circunferencia. Une los puntos del ángulo que intersecten a la circunferencia, con un trazo **t**. Muestra que **t** mide lo mismo que el radio de la circunferencia.

Existen otros criterios que permiten asegurar, la congruencia de triángulos; sin embargo, no haremos estas demostraciones, pero un estudiante interesado debiera investigar y encontrarlas. Uno de esos criterios es el siguiente:

Teorema (Criterio LAL)

Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes congruentes y el ángulo que forman los lados congruentes mide lo mismo, entonces los triángulos son congruentes.

Este criterio se conoce como "**lado-ángulo-lado**" y lo que postula es que si tú tienes dos palitos y los unes por uno de sus extremos, y los abres o lo cierras de manera de formar un ángulo dado, entonces existe una sola forma de cerrar el triángulo. Es decir, la distancia entre los extremos no unidos, está totalmente determinada.



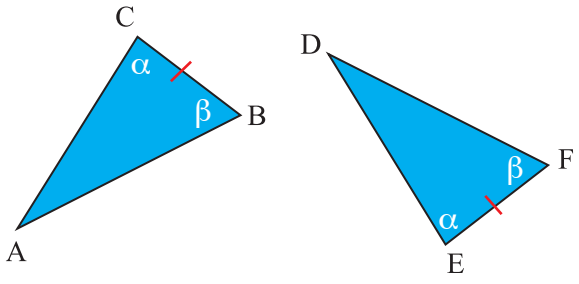
Si $\overline{AB} \cong \overline{FD}$, $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ y los ángulos $\angle ABC$ y $\angle FDE$ miden lo mismo, entonces los triángulos ΔABC y ΔFDE son congruentes.

Otro criterio es el siguiente:

Teorema (Criterio ALA)

Si dos ángulos de un triángulo miden lo mismo que dos ángulos de otro triángulo, y los lados comprendidos entre los ángulos son congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

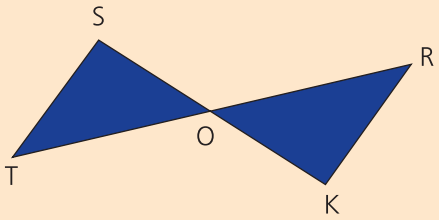
Este criterio se conoce como "**ángulo-lado-ángulo**" y lo que postula es que, si tienes un palito y en cada extremo del palito pones dos palos de manera tal de formar ángulos determinados con el primero, entonces la intersección de los palitos está únicamente determinada.



Si $\overline{EF} \cong \overline{BC}$, los ángulos $\angle DEF$ y $\angle BCA$ miden lo mismo, y los ángulos $\angle ABC$ y $\angle EFD$ miden lo mismo, entonces los triángulos ΔABC y ΔFDE son congruentes.

aplicando lo aprendido

1 En la figura O es punto medio de $\overline{SK}$ y $\overline{RT}$.



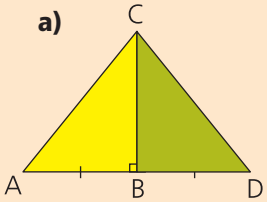
a) Demuestra que $\Delta STO \cong \Delta ROK$.

b) Si ΔSTO es la imagen vía cierta transformación isométrica, ¿cuál podría ser ésta? Describe la imagen de cada vértice del ΔROK.

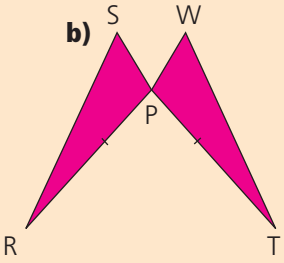
c) Prueba que $\overline{ST} \parallel \overline{RK}$.

2 Dados los triángulos, decide si son o no congruentes indicando el criterio utilizado.

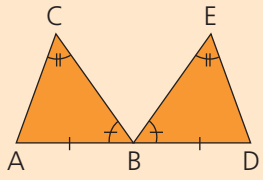
a)



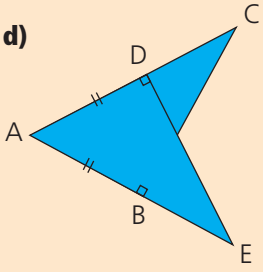
b)



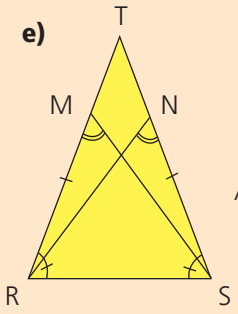
c)



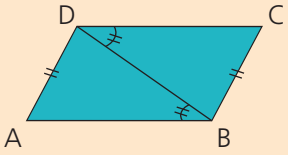
d)



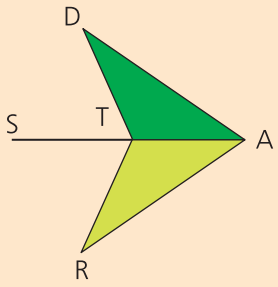
e)



f)

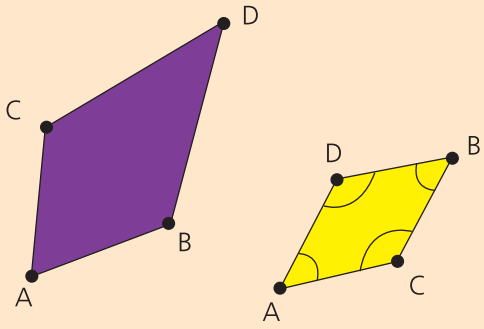


3 Si $\overline{SA}$ es bisectriz de $\angle DAR$ y $\angle DTR$, prueba que $\Delta DAT \cong \Delta RAT$.



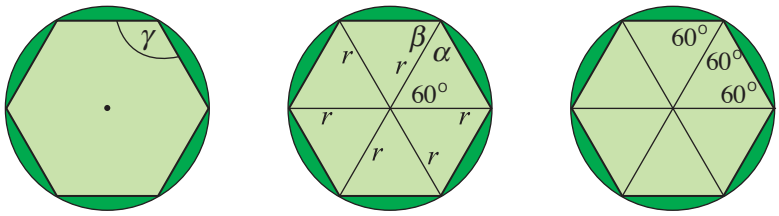
4 Demuestra que el triángulo escaleno no tiene ejes de simetría.
Demuestra que el triángulo isósceles tiene sólo un eje de simetría.
Finalmente, demuestra que el triángulo equilátero tiene 3 ejes de simetría.

5 ¿Cuántos ejes de simetría tiene el rombo? ¿Y el romboide?
¿Es cierto que las diagonales del romboide se dimidian? ¿Y las del rombo?
¿Son perpendiculares las diagonales del rombo? ¿Y las del romboide?



15 Aplicaciones geométricas

Muchos resultados muy importantes en geometría se pueden deducir de propiedades de los triángulos congruentes, debido a que siempre podemos triangular una figura poligonal. Por ejemplo, el hexágono regular está formado por seis triángulos congruentes.



De hecho, el hexágono regular resulta de tomar una circunferencia, dividir, el ángulo completo del centro en 6 partes iguales y marcar los puntos de la circunferencia que determinan esos ángulos. Como el ángulo completo mide 360º su sexta parte es 60º. Una vez formado los seis triángulos, cada uno de ellos tiene dos lados, al menos, que miden lo mismo, pues corresponden a la medida del radio r de la circunferencia. Entonces los triángulos son congruentes por el criterio *LAL*.

Como el triángulo es isósceles, los otros dos ángulos del triángulo miden lo mismo y suman 120º, que es lo que le falta a 60º para formar 180º.

Es decir, el triángulo es equilátero de lado r. Entonces, podemos deducir varios resultados de este descubrimiento; por ejemplo:

El hexágono regular inscrito en la circunferencia de radio r, tiene perímetro $6r$.

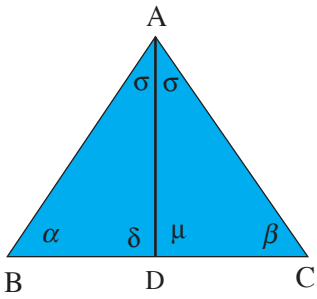
Otro resultado es el siguiente:

Los ángulos interiores de un hexágono regular miden todos 120°.

actividades

1. Si el radio de la circunferencia, donde está inscrito el hexágono, mide 1 m. ¿Cuánto mide la altura de cada uno, de los seis triángulos, que forman el hexágono?
2. Con los datos del problema anterior, ¿cuánto mide el área de cada triángulo que forma el hexágono?
3. ¿Cuál es el área del hexágono regular, inscrito en la circunferencia de radio 1m?
4. Recuerda que el perímetro de la circunferencia de radio **r** es $2\pi\mathbf{r}$, y recuerda que el perímetro del hexágono regular inscrito en la circunferencia de radio **r** es $6\mathbf{r}$. Muestra que esto implica que $\pi > 3$.

Las propiedades de los triángulos se pueden deducir de las características de los triángulos congruentes. Consideremos un triángulo isósceles ΔABC, donde $\overline{AC} \cong \overline{AB}$, por lo tanto los ángulos α y β miden lo mismo. Consideremos la bisectriz del ángulo $\angle BAC$.

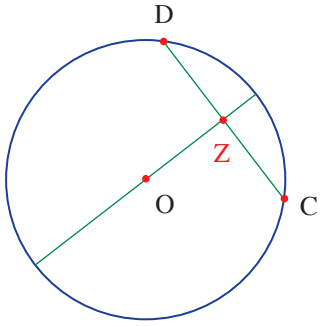


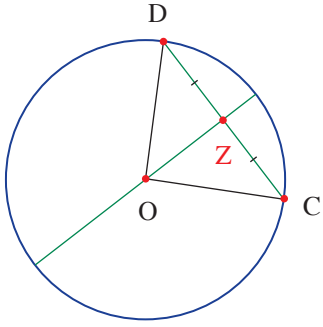
Como $\overline{AD}$ es bisectriz, se tiene que el ángulo $\angle BAD$ mide lo mismo que el ángulo $\angle DAC$. Entonces por el criterio LAL, se tiene que los triángulos BDA y CAD son congruentes. Por lo tanto $\overline{BD} \cong \overline{DC}$, luego D es punto medio de $\overline{BC}$. Es decir, $\overline{AD}$ es transversal de gravedad. También por congruencia, podemos afirmar que δ y μ miden lo mismo y como son suplementarios, se tiene que miden 90^o cada uno de ellos, por lo tanto $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, es decir $\overline{AD}$ es altura del triángulo.

Resumiendo, tenemos el siguiente resultado:

En un triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo opuesto a la base, es transversal de gravedad y altura.

Estudiemos ahora algunas propiedades de los trazos de la circunferencia. Consideremos, una cuerda $\overline{CD}$ en ella. Existe un único diámetro que divide por la mitad a esa cuerda. Llamemos Z la intersección de la cuerda con el diámetro. Marquemos los radios $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$. Por el criterio *LLL*, se tiene que los $\Delta OZC \cong \Delta OZD$, por lo tanto los ángulos $\angle OZD$ y $\angle OZC$ miden lo mismo y como son suplementarios se tiene que $\angle OZD = 90°$, por lo tanto $OZ \perp CD$ Entonces, hemos demostrado el siguiente resultado:

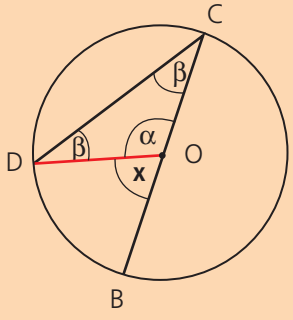




El diámetro que dimidia a una cuerda es perpendicular a ella.

actividades

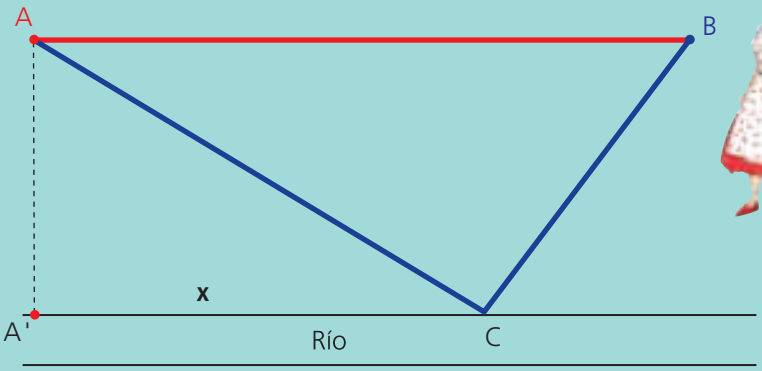
1. Considera la figura lateral. En esta actividad demostrarás que $\angle BCD$ mide la mitad que el ángulo $\angle BOD$. Muestra que $\angle ODC$ mide β. Muestra que $2\beta + \alpha = 180°$. Si $\angle DOB$ mide **x**, muestra que $\alpha + \mathbf{x} = 180°$. Muestra que $\mathbf{x} = 2\beta$. Concluye que $\angle BCD$ mide la mitad que el ángulo $\angle BOD$.



2. Demuestra que un triángulo inscrito en una circunferencia, que tiene un diámetro como lado es un triángulo rectángulo.

problema resuelto

Un joven enamorado quiere ir a visitar a su novia que está a 30 km de distancia río arriba, pero el camino está en una línea recta paralela al río. El joven va a caballo a cumplir su romántica misión, el río está a 10 km del camino que une los puntos A del joven y B de la doncella. El caballo necesita agua para hacer todo el viaje, el jinete se pregunta dónde debe parar para que el caballo tome agua, ¿en algún punto más cerca de la doncella? ¿En algún punto más cerca de él? ¿En el punto medio?

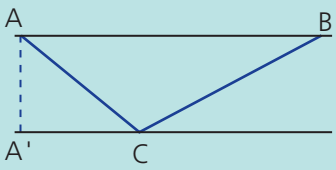


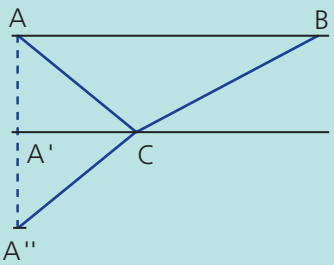
Solución:

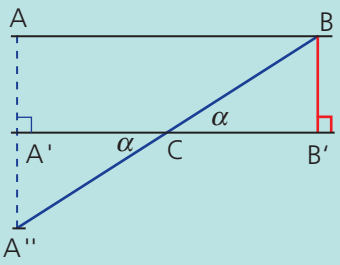
Denotemos por **x** la distancia de A' a C, como muestra la figura. Completa en tu cuaderno una tabla como la siguiente, de la distancia recorrida D para distintos valores de **x**.

D(km)	?	?	?	?	?	?	?
x(km)	0	5	10	15	20	25	30

Al parecer, el punto que hace que la distancia recorrida sea mínima, es el punto medio o alguno muy cercano a él. Hagamos un modelo puramente geométrico.





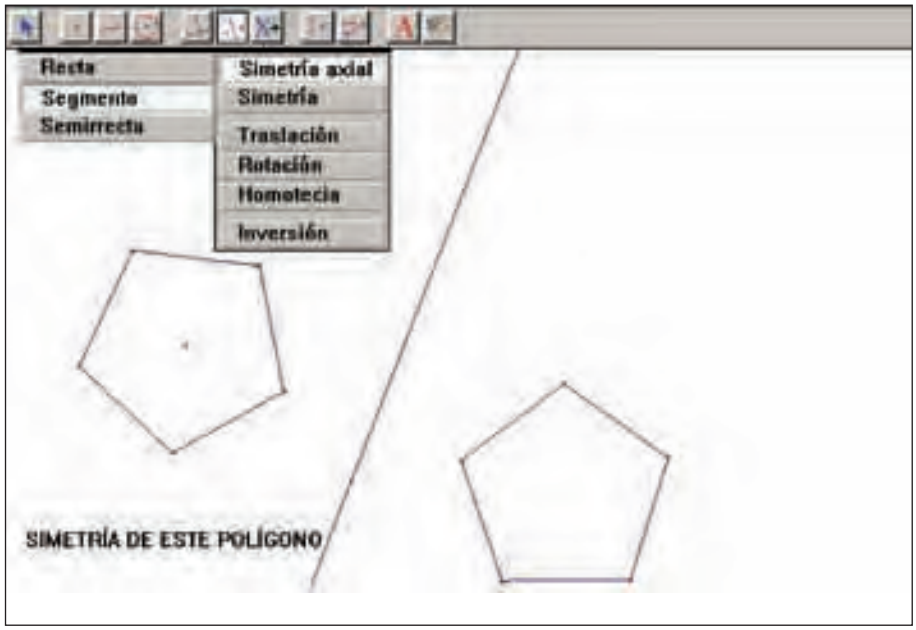


Si reflejamos el punto A, en torno a $A'C$ obtenemos el punto A'', como se trata de una reflexión $\overline{AA'} \cong \overline{A'A''}$. La distancia de A a C más la distancia de C a B es la misma que la distancia de A'' a C más la distancia de C a B. Como buscamos la distancia mínima, necesitamos que los puntos B, C y A'' estén en una línea recta. Como los triángulos $\Delta A'A''C$ y $\Delta BB'C$ tienen ángulos de iguales medidas y $\overline{BB'} \cong \overline{A'A''}$, entonces $\Delta A'A''C \cong \Delta BB'C$. Por lo tanto $\overline{A'C} \cong \overline{CB'}$.

Entonces C es el punto medio de $\overline{A'B'}$, por lo tanto el jinete debe hacer beber agua al caballo en el punto medio del trayecto.

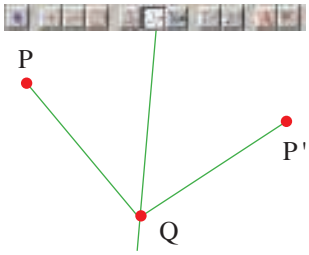
16 Programas computacionales

Existen programas computacionales que permiten hacer construcciones geométricas. Como ejemplo abajo te mostramos uno llamado *Cabri*, que tiene bastantes funciones geométricas.



Como ves, puede hacer polígonos regulares, trazar rectas, trazos segmentos, por cualquier par de puntos que tu elijas. También realiza reflexiones de cualquier figura respecto a la recta que tú elijas, rotaciones respecto al punto que quieras y en el ángulo que puedas copiar, y traslaciones respecto a algún vector.

Con este programa, por ejemplo, te mostraremos cómo construir un triángulo isósceles. Traza una recta L cualquiera. Luego marca un punto P fuera de la recta. Ahora construye un segmento que tenga por extremo a P, y el otro extremo Q que esté en la recta, pero que el trazo no sea perpendicular a la recta. Ahora haz la reflexión del trazo respecto a la recta L, llama P' el reflejado de P. Para finalizar marca el segmento $\overline{PP'}$. Concluimos que el triángulo $\Delta PP'Q$ es isósceles.



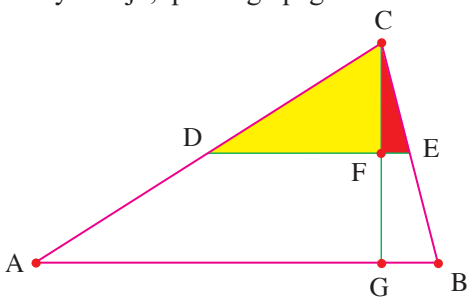
actividades

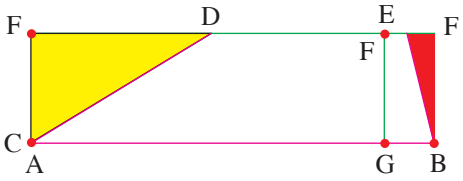
1. Explica por qué la construcción de arriba efectivamente produce un triángulo isósceles. ¿En cuál caso resulta un triángulo equilátero?

2. Dada una circunferencia, la cual tiene marcada una cuerda construye una cuerda del mismo tamaño que la cuerda dada. El programa no tiene la opción "cortar y pegar".

17 Puzles geométricos

Martina tiene un trozo triangular de madera; para un trabajo en Tecnología necesita transformarlo en un trozo rectangular. Tiene pegamento y pasta para pegar los trozos, si es necesario cortar, y empastar las uniones para que no se note el ensamblaje. Ella cree que haciendo un corte en $\overline{DE}$ y luego otro en $\overline{CF}$, obtendrá dos trozos, el amarillo y el rojo, que luego pegando como indica la figura se obtendrá un rectángulo.





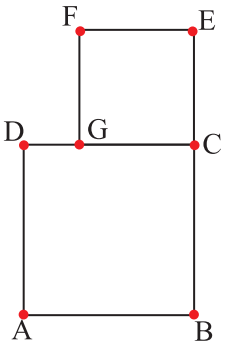


Figura 1

Lo que no sabe bien, es dónde hacer el corte $\overline{DE}$, pero está segura, por pura intuición, que $\overline{CG}$ es una altura. Sin embargo, observando el bosquejo con detenimiento se da cuenta que $\overline{FC} \cong \overline{FG}$, lo que quiere decir que el corte $\overline{DE}$ hay que hacerlo a la mitad de la altura.

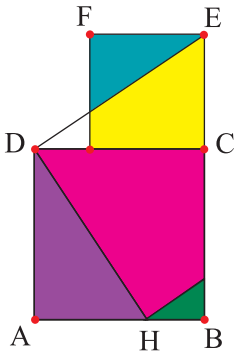


Figura 2

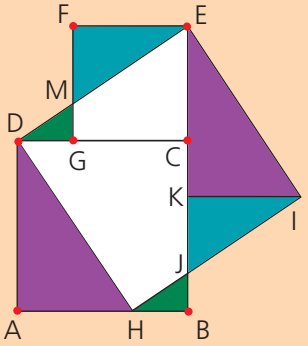
Pensándolo bien, Martina se da cuenta que $\angle DFC$ será un ángulo del rectángulo, por lo tanto, el ángulo es recto y como $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ se tiene que efectivamente $\overline{CG}$ es una altura.

Lautaro, el profesor de Martina, sorprendido con su ingenio, le propone el siguiente puzzle:

En un trozo de madera que está formado por dos cuadrados (Figura 1). El profesor le dice que haga un corte en $\overline{ED}$, luego un corte perpendicular al anterior, pasando por D. Llame H el punto del corte en $\overline{AB}$. Para finalizar haga un corte perpendicular al anterior, pasando por H (Figura 2). Cuando tiene todas las piezas desordenadas, le pide que arme un cuadrado con todas esas piezas. ¿Puedes ayudarle a Martina?

actividades

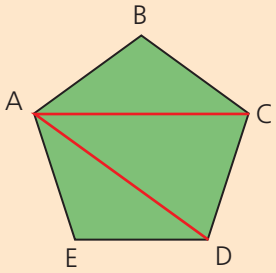
1. En un modelo geométrico, en papel, del problema anterior del profesor Lautaro. Traza la perpendicular **L** a $\overline{\mathbf{DE}}$ que pasa por **E**; continúa el segmento $\overline{\mathbf{HJ}}$ hasta que intersecte a **L**; llama a la intersección **I**. Traza la paralela a $\overline{\mathbf{AB}}$ que pasa por **I**; a la intersección de esa recta con $\overline{\mathbf{BC}}$, llámala **K**. Demuestra que las figuras pintadas del mismo color son congruentes. Concluye que el profesor de Martina tenía razón al decirle que podía formar un cuadrado.



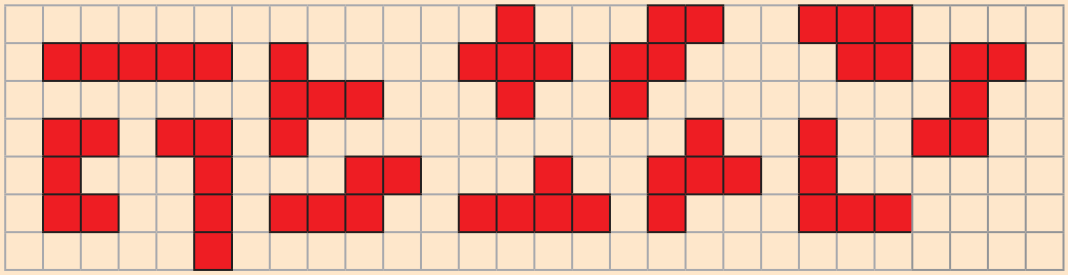
2. Justifica todas las afirmaciones de Martina en el primer puzle, aquel que cambió un triángulo por un rectángulo.

aplicando lo aprendido

1 El pentágono ABCDE es regular. Prueba que las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ son congruentes.

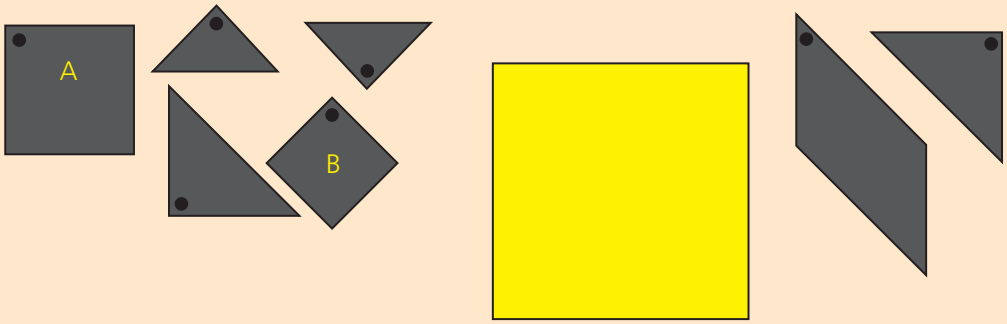


2 Considera las siguientes 12 figuras compuestas, cada una de ellas por 5 cuadraditos.
Si el lado de cada cuadradito es de 1 cm. construye un rectángulo lados 6 cm y 10 cm. ¿Existe alguna figura formada por 5 cuadrados que no sea congruente a una de las que te presentamos?



3 Un par de lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes y paralelos. Prueba que el otro par de lados opuestos también son congruentes y paralelos.

4 Martina tiene las piezas negras y cree que las puede disponer de forma de llenar completamente el cuadrado amarillo, sin que las piezas se traslapen. ¿Puedes comprobar que la creencia de Martina es cierta? Si el cuadrado negro rotulado con **A** tiene área 4 cm^2, ¿cuál es el área del cuadrado amarillo?



- ¿Cuántas veces más grande es el área del cuadrado **A** que el área del cuadrado **B**?
- ¿Cuántas veces mayor es el área del cuadrado amarillo que el área del cuadrado **B**?

un poco de historia

EUCLIDES Y SUS ELEMENTOS

EUCLIDES

Muy poco se sabe de la vida de Euclides. Se cree que probablemente, fue llamado a Alejandría en el año 300 aC ya que Ptolomeo, sucesor de Alejandro en sus dominios africanos, había fundado una gran biblioteca en Alejandría. Creó una universidad y Euclides se encontraba entre sus primeros maestros. Enseñó durante 20 ó 30 años, mientras escribía sus conocidos **"Elementos"** y muchas otras obras de importancia. Esta enseñanza influyó notablemente en otros matemáticos, como Arquímedes y Apolonio, dos de los principales miembros de la universidad.

En los "Elementos", Euclides intentó hacer una descripción exhaustiva de la matemática que se conocía en su tiempo. Escribió esa matemática en 13 libros. Hoy esta tarea sería muchísimas veces más colosal, debido al gran desarrollo y diversificación que ha tenido la matemática en todos estos siglos.

Los libros I, II, IV y VI tratan sobre líneas, áreas y figuras planas regulares simples, son en su mayor parte pitagóricos.

EL libro III trata sobre círculos, sigue a Hipócrates.

El libro V, elabora el método de Eudoxo sobre proporciones, que servirá para estudiar el libro VI que trata de semejanza de figuras planas.

Los libros VII,VIII y IX son de aritmética. Se introducen los números primos y compuestos y propiedades de ellos, que fueron la base para que muchos siglos después, Gauss demostrara el Teorema Fundamental de la Aritmética.

El libro X está dedicado a estudiar los números irracionales, especialmente los de la forma $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ y los de la forma $\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ donde **a** y **b** son enteros positivos.

El Teorema fundamental de la Aritmética dice que todo número entero se puede escribir como el producto de potencias de números primos, además dice que salvo el orden y signos de los números, esa escritura es única, demostró que no existe un número primo que es mayor que todos los demás.

actividades

Definiciones euclidianas

En los elementos de Euclides, se dan definiciones de objetos geométricos, de algo muy importante como son las relaciones que define entre los objetos. Presentamos algunos ejemplos:

1. "Un punto es lo que no tiene partes."
2. "Una línea es una longitud sin anchura."
3. "Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella."
4. "Una superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura."
5. "Un límite es lo que es extremo de algo."
6. "Una figura es aquello que está contenido por cualquier límite o límites."

Discute con tus compañeros acerca de la claridad de estas definiciones.

El libro XI trata sobre geometría elemental del espacio y el XII se dedica a mostrar el método de exhaución, donde se demuestra el Teorema de Hipócrates que dice que el área de un círculo de radio **r** es πr^2. Estos métodos son los mismos que muchos siglos después desarrollaran Newton y Barrow para la creación del Cálculo Integral, que consiste, gruesamente, en calcular áreas encerradas por cualquier tipo de curvas. El libro XIII proporciona y demuestra las construcciones de los cinco cuerpos geométricos regulares de Pitágoras, alabados por Platón.

Primera impresión del libro "Elementos", un incunable de 1482 impreso por Ratdolt.

Entre todos sus logros, uno muy importante, es que presentó un cuerpo ordenado de definiciones, axiomas, postulados, teoremas, corolarios. Dentro de esa teoría, cada resultado nuevo se deduce de las definiciones básicas, axiomas, postulados o de los teoremas demostrados con anterioridad. Esta forma de hacer matemáticas es la que se practica hasta nuestro días. Si bien, sus definiciones y postulados tenían lagunas lógicas y ambigüedades, fue el primer intento en presentar de esta forma las matemáticas. Por ejemplo una de sus definiciones es la de punto, que la define como "una cosa que no tiene parte", lo cual no da una idea precisa de lo que se está hablando.

El quinto de sus postulados dice, en su forma más simple:
Dada una recta **L** *y un punto* **P** *fuera de ella, existe una única paralela a* **L** *que pasa por* **P**.

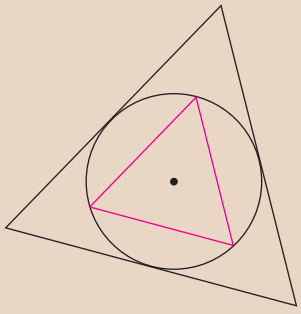
Euclides no demostró esto, sino que su recíproco. Euclides se expuso al ridículo y a los ataques. Los críticos de Euclides decían que éste no es un supuesto adecuado y debe ser demostrable con los anteriores postulados. Muchos años pasaron de intentos de demostrar este postulado con los anteriores, pero no se logró. Pero, en su defecto, se pudo cambiar este postulado por otros, sin que se produzcan inconsistencias lógicas. Los cambios a este postulado produjeron nuevas geometrías, llamadas no Euclideanas. En las geometrías no euclideanas, por un punto exterior a una recta **L** pueden pasar infinitas paralelas a **L**, o también ninguna recta paralela a **L**.

actividades

* El método de exhaución de Hipócrates consistió en aproximar el área del círculo mediante polígonos regulares.

a) Considera una circunferencia de radio 1, construye el triángulo equilátero inscrito y circunscrito a la circunferencia. Calcula las áreas de esos triángulos.

b) Construye el hexágono regular inscrito y circunscrito a la circunferencia y calcula el área de ellos. El método, consistía en aumentar la cantidad de lados del polígono regular, calcular sus áreas y encajonar el área del círculo, entre el área del inscrito y del circunscrito. De forma que mientras más grande sea la cantidad de lados mejor será la aproximación.



información en los medios

LAS TORRES PETRONAS EN MALASIA

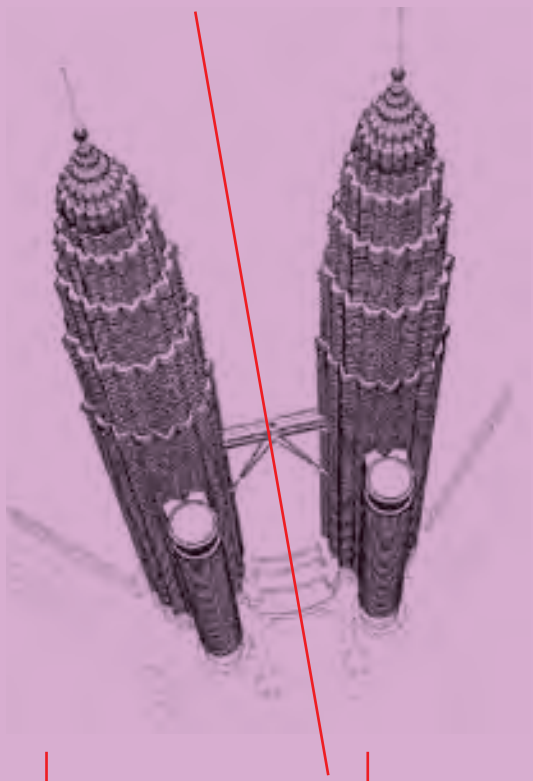
A principios de los 80 el gobierno malasio relocalizó el céntrico Selangor Turf Club a las afueras de la ciudad. Esto posibilitó el uso de un enorme terreno en pleno centro de Kuala Lumpur, el llamado Triángulo Dorado. El plan contemplaba el desarrollo de dos torres, las que deberían ser reconocidas como símbolo de Malasia y para ello se desarrolló un concurso internacional.

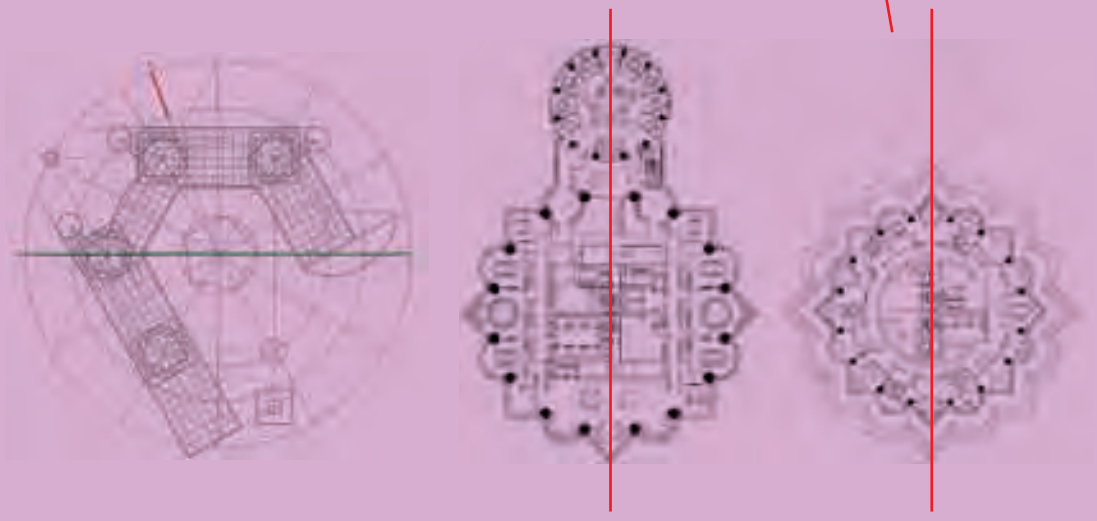
A falta de una tradición malasia de construir edificios altos, César Pelli (arquitecto argentino-norteamericano) basó su propuesta en patrones geométricos basados en referencias islámicas, presidida por dos torres iguales de planta en estrella de 12 puntas y un puente que las interconectaba.

Ambas torres conformaban una puerta urbana y marcaban un lugar simbólico, algo sobre lo que Pelli ha escrito profusamente. Dado que las otras propuestas planteaban torres asimétricas o usaban

un lenguaje moderno-internacional, la idea de Pelli fue aceptada por unanimidad, no sin antes establecer algunas modificaciones: la planta de las torres debería basarse en 2 cuadrados girados y su fachada debería incluir una aguja. Una planta en estrella de 8 puntas traía muchas complicaciones funcionales, por lo que finalmente se optó por añadirle 8 lóbulos circulares, otorgando al edificio una forma única, totalmente diferente a los rascacielos de occidente.

Como se observa, los edificios son simétricos, tanto en su estructura como en su posición uno con respecto al otro.





Fuente: http://moleskinearquitectonico.blogspot.com/2007/12/las-torres-petronas-csar-pelli.html

Apliquemos

Junto a tus compañeros busca edificios chilenos que tengan algún tipo de transformación isométrica.

a) ¿Cuántos ejes de simetría tienen las torres después del puente que las conecta?

b) ¿Qué otras transformaciones isométricas puedes observar en la construcción?

actividades finales

1 Sean los puntos **A**(0,1), **B**(4,–2), **C**(7,2) y **D**(3,5) los vértices de un cuadrilátero.

a) Prueba que el cuadrilátero **ABCD** es un cuadrado.

b) Determina las coordenadas de la imagen de **ABCD** en cada una de las siguientes transformaciones:

i) Traslada **ABCD** tal que la imagen de **A** sea **D**.

ii) Refleja **ABCD** respecto al eje **Y**.

iii) Rota **ABCD** entorno a **D** con un ángulo de 90°.

iv) Aplica a **ABCD** la traslación $\mathbf{T}_{(-1,-8)}$ y la imagen resultante **A'B'C'D'** refléjala con respecto al eje **X** de coordenadas en el plano cartesiano.

2 Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto (3,–2). Si la abscisa del otro extremo es 6 hallar su ordenada. ¿Cuántas soluciones hay?

3 Los vértices de un triángulo son **A**(2,8), **B**(0,–1) y **C**(6,–1). Determina las coordenadas de los puntos medios del triángulo **ABC**, luego pruebe que las medianas (segmento que une los puntos medios), miden la mitad del lado.

4 Las coordenadas de los puntos medios de los lados de un triángulo son (2,5), (4,2) y (1,1). Encuentra las coordenadas de los tres vértices. (Ind: usa lo anteriormente probado)

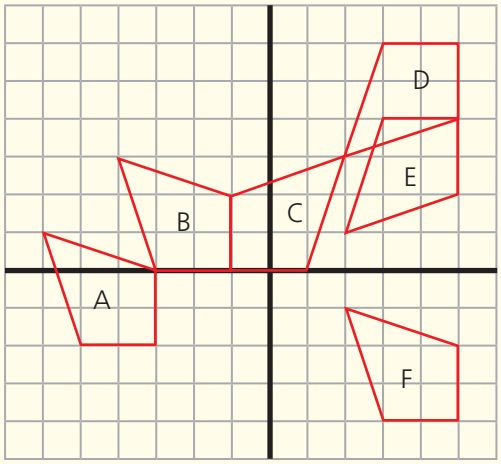
5 Los puntos extremos de un segmento son $\mathbf{P}_1(2,4)$ y $\mathbf{P}_2(8,-4)$. Halla el punto **P**(**x**,**y**) que divide a este segmento en dos partes tales que $\overline{\mathbf{P_1P}} : \overline{\mathbf{PP_2}} = 1 : 3$

6 Dadas las coordenadas de $\triangle$**FAT**, para cada caso, determina las coordenadas de un punto **C** tal que $\triangle$**FAT** $\cong$ $\triangle$**CAT.**

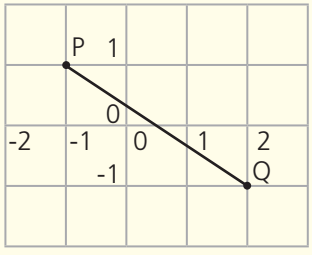
a) **F**(1,2); **A**(4,7); **T**(4,2)
b) **F**(7,5); **A**(–2,2); **T**(5,2)

7 Las coordenadas del $\triangle$**ABC** son **A**(1,2); **B**(4,2); **C**(2,4), y las coordenadas del segmento **DE** son **E**(6,7); **D**(6,4). Encuentra las coordenadas del punto **F** de tal manera que $\triangle$**ABC** $\cong$ $\triangle$**DEF.**

8 Dada la figura **A** en la siguiente ilustración, describe la transformación isométrica que lleva la figura **A** en la **B**, luego la **B** en la **C** y así continúa hasta la figura **F**.



9 Aplica la composición **T**(6,–1) ∘ **T**(–7,2) al trazo $\overline{\mathbf{PQ}}$. ¿Cuál es la traslación que lleva la imagen $\overline{\mathbf{P'Q'}}$ que resulta de la composición, al trazo $\overline{\mathbf{PQ}}$?



10 Las coordenadas del △**ABC** son **A**(–1,2); **B**(4,2); **C**(2,4) y las del △**DEF** son **F**(10,–1); **E**(7,1); **D**(5,–1).

a) ¿Son congruentes estos triángulos?
b) Fundamenta tu repuesta.

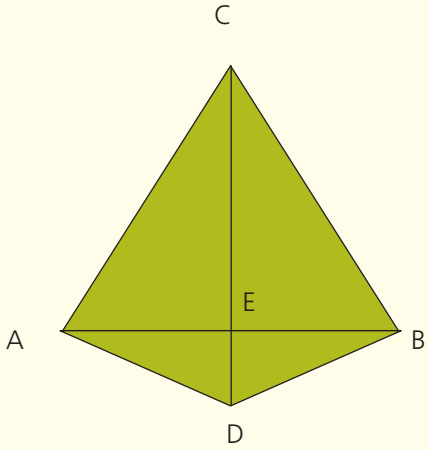
11 El polígono **ABCDE** es congruente a cierto polígono **A'B'C'D'E'**, es decir, existe una transformación isométrica en la cual **A'** es imagen de **A**, **B'** es imagen de **B**, **C'** es imagen de **C**, **D'** es imagen de **D** y **E'** es imagen de **E**.

Entonces de las siguientes aseveraciones es (son) verdadera(s):

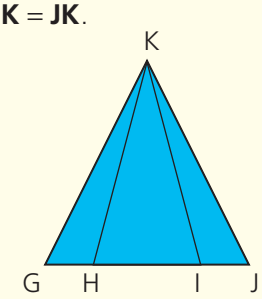
I. $\overline{BC} = \overline{B'C'}$
II. $\angle DEA = \angle D'E'A'$
III. $\overline{C'D'}$ es proporcional a $\overline{CD}$

a) Sólo I.
b) Sólo II.
c) Sólo III.
d) Sólo I y II.
e) Sólo II y III.

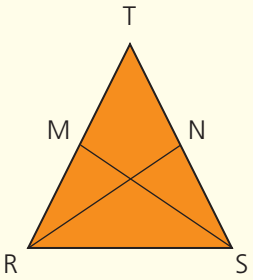
12 Si $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.
Demuestra que $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.



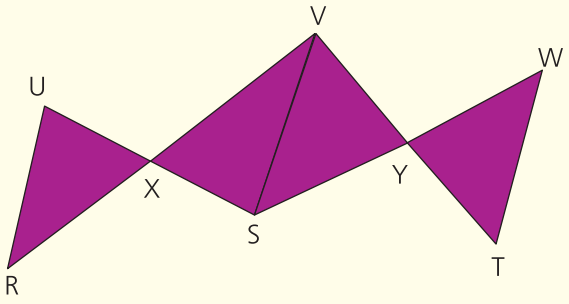
13 Sea el △**GJK** con $\overline{HK} \cong \overline{IK}$ y $\overline{GH} \cong \overline{IJ}$. Prueba que $\overline{GK} = \overline{JK}$.



14 Sea el △**RST** Isósceles con $\overline{RT} \cong \overline{ST}$, **M** punto medio de $\overline{RT}$ y **N** punto medio de $\overline{ST}$. Demuestra que $\overline{SM} \cong \overline{RN}$.

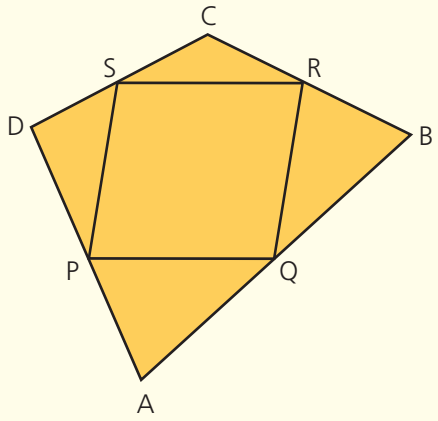


15 Si **X** es punto medio de $\overline{US}$ y $\overline{RV}$, y el punto **Y** es punto medio de $\overline{VT}$ y $\overline{SW}$. Además, **UR** || **VS** || **WT**. Decide, ¿cuáles pares de triángulos, en la figura, son congruentes?

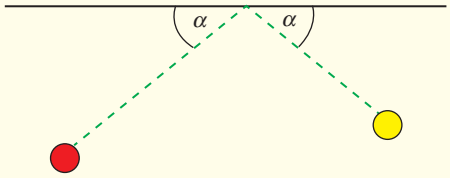


16 Demuestra que en todo triángulo las transversales de gravedad se cortan en la razón 1 : 2.

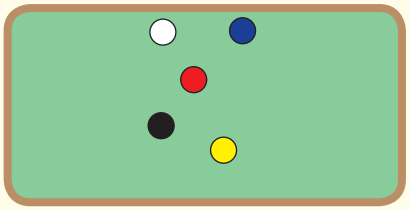
17 Sea el cuadrilátero **ABCD** con **Q**, **R**, **S**, **P**, puntos medios de $\overline{\mathbf{AB}}$, $\overline{\mathbf{BC}}$, $\overline{\mathbf{CD}}$ y $\overline{\mathbf{DA}}$ respectivamente. Demuestra que el cuadrilátero **PQRS** es un paralelógramo.



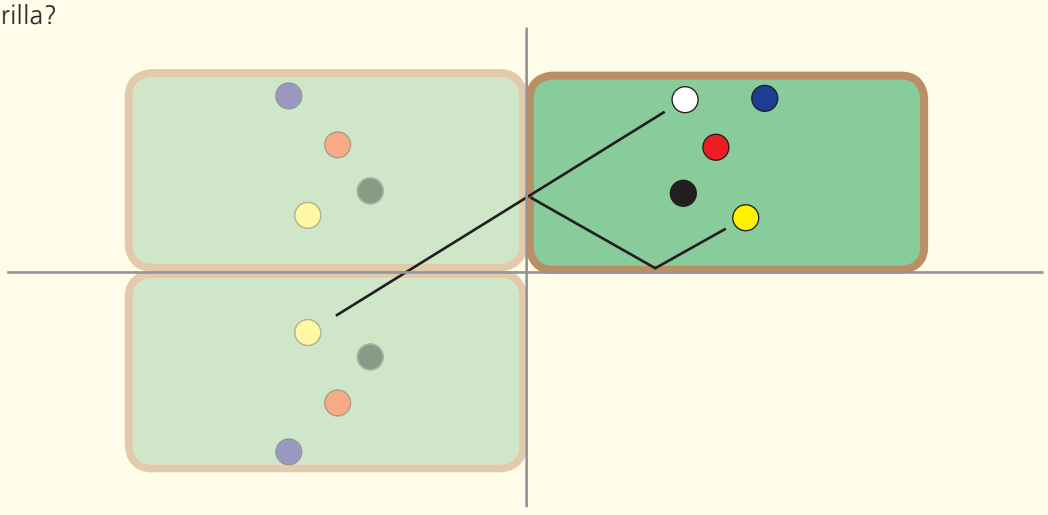
18 En el juego del Pool, cuando una bola golpea la banda, el ángulo con el cual golpea es el mismo con el cual sale la bola.



Supón que tienes que golpear la bola amarilla con la bola blanca, pero la bola negra y azul te impiden hacerlo directamente. Por lo tanto tienes que lanzar la bola a una o dos bandas para que luego golpee a la bola amarilla.



¿En que puntos de la banda debes golpear la bola blanca para que en el rebote golpee a la amarilla?

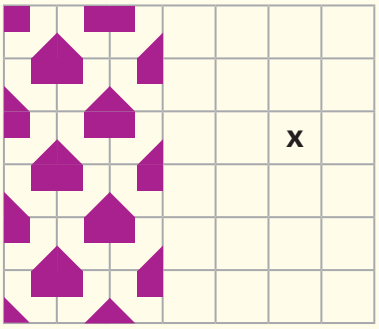


autoevaluación

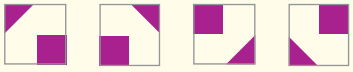
1 **(Timss, 2003 modificado)**. Los puntos **A**(2,3) y **B**(4,7) son los vértices de un cuadrado **ABCD** que tiene todos sus vértices en un solo cuadrante. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices **C** y **D**?

a) **C**(–1,8) y **D**(–2,4)
b) **C**(8,5) y **D**(6,1)
c) **C**(1,–1) y **D**(–3,1)
d) **C**(1,0) y **D**(2,7)

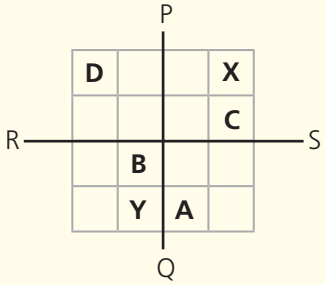
2 **(Timss, 2003)** Si el patrón de teselación continua cubriendo la malla de abajo, ¿cuál es la pieza que debería ir en **X**?



3 **(Problema modificado de Prueba Timss 2003)** Dadas las siguientes baldosas:



Si en el cuadriculado $\overline{\mathbf{PQ}}$ y $\overline{\mathbf{RS}}$ son ejes de simetría, ¿cuál baldosa debería ir en el lugar de **X** e **Y** respectivamente?

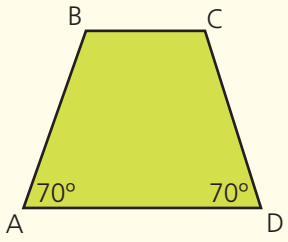


a) **C** y **B**
b) **B** y **C**
c) **C** y **D**
d) **A** y **D**
e) **C** y **A**

4 Si al segmento $\overline{\mathbf{AB}}$ de coordenadas **A**(–1,0) y **B**(–2,3) se le aplica la composición **R**((–3,–1),90°) ∘ **T**(1,1), las coordenadas de la imagen **B'** es:

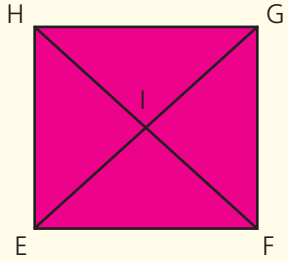
a) **B'**(–1,4)
b) **B'**(2,–3)
c) **B'**(–1,–4)
d) **B'**(1,–4)

5 **(Prueba TIMSS 2003)** **ABCD** es un trapecio. Otro trapecio, **GHIJ** (no se muestra), es congruente con **ABCD**. El ángulo cuyo vértice es **G** y el ángulo cuyo vértice es **J** miden 70° cada uno. ¿Cuál de estas afirmaciones podría ser verdadera?



a) $\overline{\mathbf{GH}} = \overline{\mathbf{AB}}$.
b) El ángulo cuyo vértice es **H** es un ángulo recto.
c) Todos los lados de **GHIJ** tienen la misma longitud.
d) El perímetro de **GIHJ** es tres veces el perímetro de **ABCD**.
e) El área de **GHIJ** es menor que el área de **ABCD**.

6 **(Prueba TIMSS 2003)** En el cuadrado **EFGH**, ¿cuál de estas afirmaciones es FALSA?



a) △**EIF** y △**EIH** son congruentes.
b) △**GHI** y △**GHF** son congruentes.
c) △**EFH** y △**EGH** son congruentes.
d) △**EIF** y △**GIH** son congruentes.
e) △**EGF** y △**FGH** son congruentes.

Datos y azar

Al finalizar esta Unidad serás capaz de:

Temas que estudiaremos en esta Unidad:

- Interpretar información de contextos diversos presentadas en gráficos cuyos datos están agrupados en intervalos.
- Utilizar información presente en histogramas y polígonos de frecuencia para producir información en diversos contextos.
- Graficar histogramas y polígonos de frecuencias a partir de información datos agrupados en intervalos.
- Utilizar un programa computacional para análisis estadístico y graficar información

→ **Histogramas, polígonos de frecuencia y de frecuencias acumuladas**, construidas manualmente y con herramientas tecnológicas.

- Calcular las medidas de tendencia central y de posición, e interpretarlas para obtener información pertinente respecto al conjunto de datos de donde fueron obtenidas.
- Caracterizar conjunto de datos provenientes de diversos contextos, aplicando medidas de tendencia central y de posición.

→ **Medidas de tendencia tentral:** media, moda y mediana. **Medidas de posición:** quintil, cuartil y percentil.

- Conocer distintos tipos de muestra aleatoria y el concepto de error muestral.

→ Muestra aleatoria y error muestral.

- Reconocer el tipo de sesgo en la representación gráfica de una muestra. Reconocer la dispersión de una muestra.
- Medir la variabilidad de una muestra a través del rango.
- Representar gráficamente la variabilidad de una muestra a través de un gráfico de caja.

→ **Medidas de variabilidad y dispersión de una muestra.**

Gráfico de Caja.

- Conocer empíricamente la Ley de los Grandes Números y relacionar la frecuencia relativa con la probabilidad de un suceso.

→ **Ley de los Grandes Números Frecuencia relativa - probabilidad de un suceso.**

- Utilizar la fórmula de Laplace para resolver problemas en contextos de incerteza, aplicando medidas de tendencia central y de posición.

→ **Fórmula de Laplace.**

El volcán Chaitén es un volcán chileno del tipo caldera ubicado a 10 km al noreste de la ciudad de Chaitén, capital de la provincia de Palena, en la Región de Los Lagos. El 2 de mayo del año 2008, a las 12:30 AM, un gran estruendo junto con una fuerte sacudida despertó a los habitantes de Chaitén y alrededores, quienes en la oscuridad vieron y sintieron un volcán entrar en erupción, en un principio creyeron que era el volcán Michinmahuida ubicado a 35 km al noreste de Chaitén, pero al llegar el amanecer y al despejarse un poco la nube volcánica, notaron que en realidad era "el Chaitén", un volcán que se creía extinto. La nube de ceniza tomó dirección este, siendo observada en un radio de 180 km, afectando incluso localidades de Argentina de la provincia de Chubut como Esquel. Algunas de esas localidades cerraron colegios, aeropuertos y otros centros para prevenir problemas respiratorios.

¿Por qué se creyó que el volcán estaba extinto? Porque el volcán no había presentado actividad sísmica en mucho tiempo. Uno de los propósitos fundamentales para el estudio de la sismología volcánica es el de conocer los patrones de actividad sísmica que permitan establecer oportunamente la probabilidad de una erupción. La actividad sísmica en volcanes suele presentarse con meses o años de anticipación a cualquier manifestación observable en el exterior, por ejemplo la emisión de vapor, gases o cenizas o bien el calentamiento del agua de la laguna que puede formarse en el cráter. Es por ello que la sismología volcánica es considerada como una de las herramientas más útiles en el conocimiento del fenómeno volcánico y determinante, en consecuencia, para la protección de las poblaciones cercanas.

En el siguiente gráfico de frecuencia se puede observar que unos días antes de la erupción la zona presentó una seguidilla de movimientos sísmicos y posteriores a éste también como se puede observar.

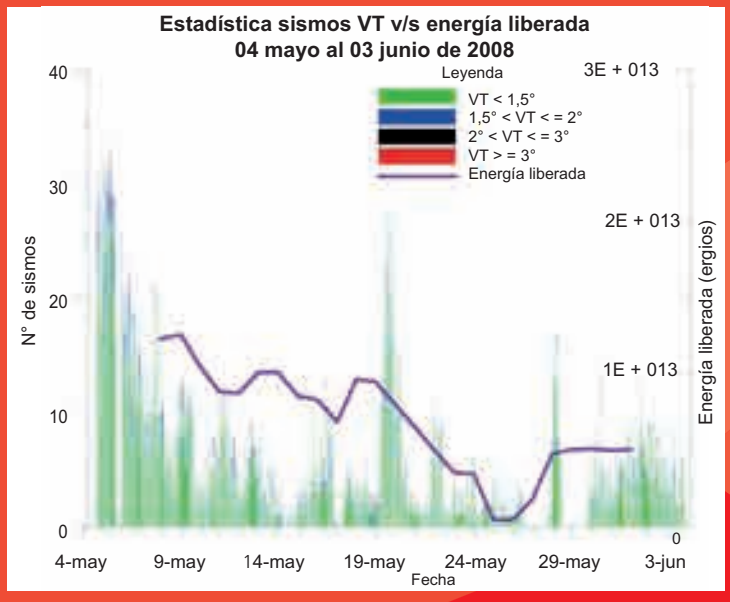
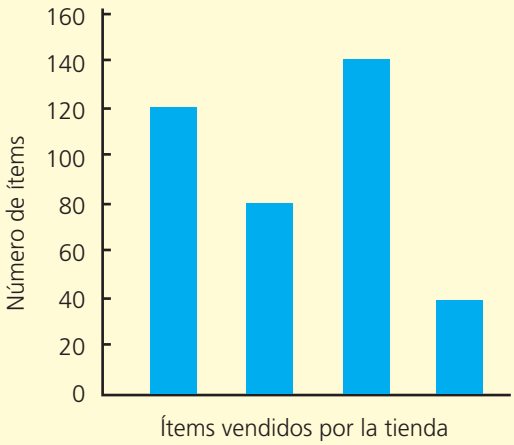


Figura 1: Gráfico que muestra la estadística de sismos tipo VT (sismo de origen volcano-tectónico) registrados desde el 04 de mayo al 03 de junio de 2008. Se puede apreciar la continua disminución tanto del número de sismos como de la energía sísmica liberada (curva violeta).

para recordar

1 **Pregunta prueba TIMSS**. El gráfico muestra el número de lápices de pasta, lápices de mina, reglas y gomas vendidas por una tienda en una semana:



Los nombres de los artículos fueron borrados. Sin embargo, se sabe que los lápices de pasta fueron los artículo más vendidos, y los menos vendidos fueron las gomas. Como dato se tiene que se vendieron más lápices de mina que reglas. ¿Cuántos lápices de mina se vendieron?

a) 40 **b)** 80 **c)** 120 **d)** 140

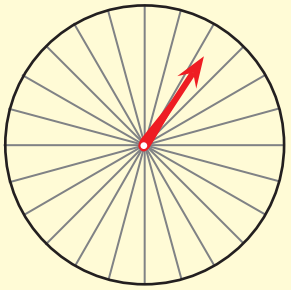
2 Un gimnasio recogió información de las personas que acuden a visitarlo, para saber el número de horas semanales que sus servicios son utilizados. Los resultados al entrevistar a 60 personas fueron los siguientes: 2, 8, 5, 6, 1, 3, 2, 8, 5, 3, 2, 4, 1, 3, 4, 4, 3, 5, 2, 6, 1, 7, 6, 2, 5, 3, 8, 4, 6, 2, 8, 7, 6, 4, 3, 2, 6, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 7, 6, 2, 1, 3, 4, 5, 8, 2, 2, 6, 5, 3, 2, 3, 4 y 3.

a) Determina el campo de variación de la variable que se estudia.

b) Construye la tabla estadística correspondiente con datos sin agrupar, y representa el diagrama de barras indicando la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa. Además determina la media y moda de la muestra.

c) Realiza la representación numérica mediante una tabla estadística con datos agrupados en intervalos de amplitud 3 (abiertos a la izquierda y cerrados a la derecha).

3 **[TIMSS]** La figura muestra un círculo dividido en 24 sectores del mismo tamaño. Al centro del círculo se clava una flecha que se puede hacer girar, de forma tal que al detenerse la flecha, ésta puede marcar cualquiera de los sectores circulares con igual probabilidad.



Si $\frac{1}{8}$ de los sectores se pinta azul, $\frac{1}{24}$ se pinta morado, $\frac{1}{2}$ se pinta anaranjado y $\frac{1}{3}$ no se pinta. Al girar la flecha, ¿en un sector de qué color es MENOS probable que se detenga?

1 ¿Qué dice?

Como ya sabemos la actividad sísmica volcánica es la que permite obtener información del estado del volcán y con ello poder tomar decisiones que protejan a las poblaciones. Así existen dos medidas principales para determinar el "tamaño" de un sismo: la **intensidad** y la **magnitud**, ambas expresadas en grados. Aunque a menudo son confundidas, expresan propiedades muy diferentes.

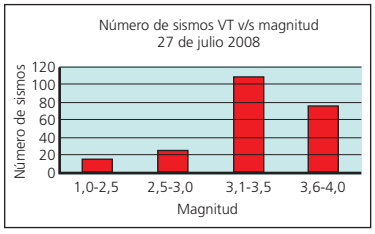
La **intensidad** es una medida de los efectos causados por un sismo en un lugar determinado de la superficie terrestre. La escala más común en América es la escala modificada de Mercalli que data de 1931. Esta, va del grado I (detectado sólo con instrumentos) hasta el grado XII (destrucción total), y corresponde a daños leves hasta el grado V.

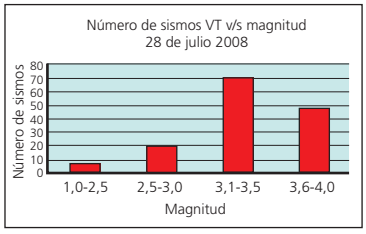
Por otra parte, la magnitud permite conocer la cantidad de energía liberada en el hipocentro o foco, que es aquella zona del interior de la Tierra donde se inicia la fractura o ruptura de las rocas, la que se propaga a través de ondas sísmicas. Esta medida se calcula mediante una expresión logarítmica (expresión que ya conocerás), cuyos datos se obtienen del análisis de los registros instrumentales. Es una medida mucho más precisa que la intensidad, la que se mide usando la escala Mercalli y está basada sólo en observaciones subjetivas de la destrucción en cada lugar. La magnitud de un sismo se expresa usando la escala de Richter, que arbitrariamente asigna grado cero a los límites bajos de detección, y no tiene un límite superior. Cada grado de la escala representa, respecto al grado que le precede, un incremento en la amplitud de onda por un factor de 10.

nota

El **hipocentro** es el punto al interior de la Tierra, donde se inició el movimiento sísmico.

Observemos las siguientes representaciones gráficas de las magnitudes de los sismos el 27 y 28 de julio del 2008:





Fuente: Información extraída de los informes realizados por el Servicio Nacional de Geología y Minería.

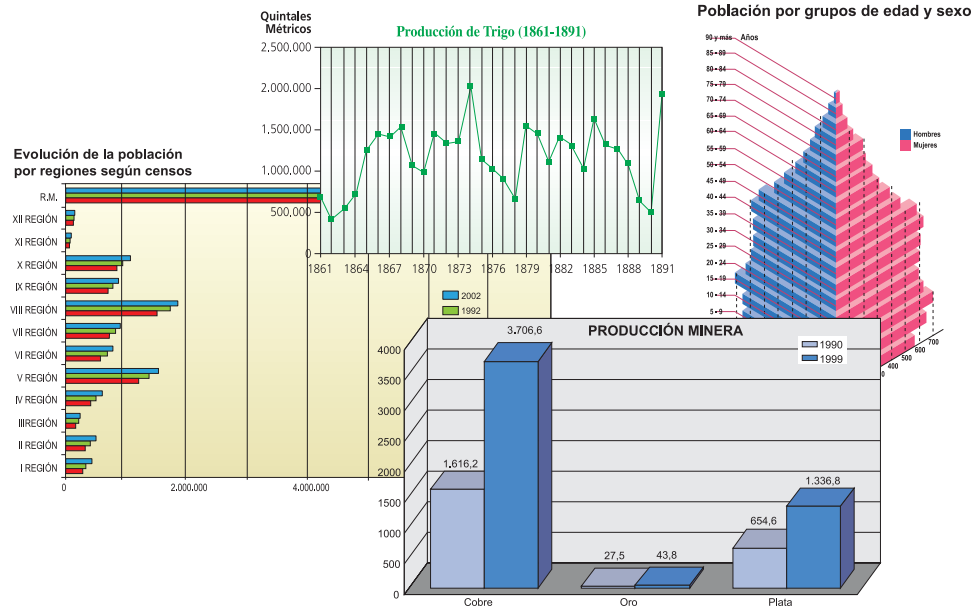
¿Qué información puedes obtener de los gráficos anteriores? ¿De qué magnitud son la mayoría de los sismos presentados en los dos días? ¿Puedes calcular la cantidad total de sismos el día 27 de julio? ¿Qué magnitud es la que mayor frecuencia presenta el día 28 de julio? ¿Se pueden responder estas interrogantes sólo observando el gráfico?

Los gráficos nos muestran la frecuencia de los sismos de una determinada magnitud, la cual está dada en intervalos, como por ejemplo de 3,1 a 3,5 en la escala de Richter, y tienen una frecuencia de 70 sismos el día 28 de julio del 2008.

actividades

1. Observando los gráficos anteriores, ¿cuál de los días hubo más actividad sísmica?
2. ¿Podrías estimar la cantidad sismos que están por sobre los 3,5 grados en los dos días?

Los gráficos de la página anterior representan una tabla de frecuencia de datos agrupados en intervalos o recorridos, a estos gráficos les denominamos histogramas. Los **histogramas** son la representación más común de distribuciones de una variable cuantitativa como se puede apreciar en los informes económicos, políticos, sociales y muchos más.



nota

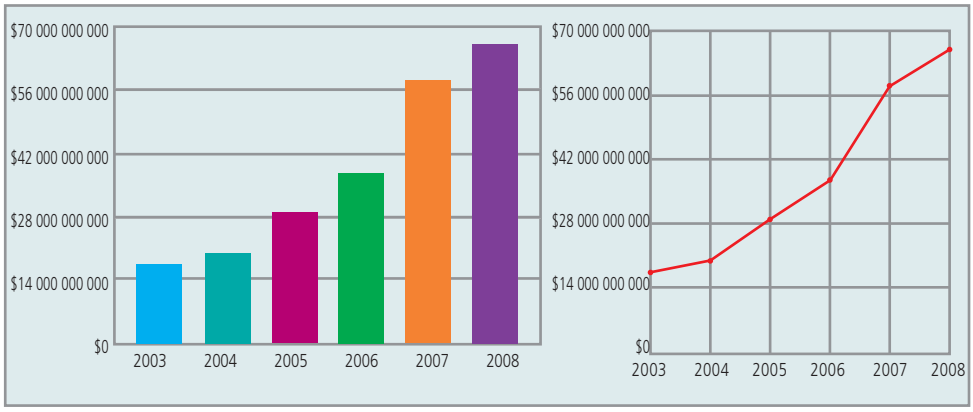
La palabra **histograma** es griega:
histos = trama o textura,
grama = escritura.

Básicamente, un histograma no es más que un conjunto de rectángulos representativos, cada uno de ellos, de un intervalo de agrupación o clase. Las bases de dichos rectángulos son equivalentes a la amplitud del intervalo y la altura se calcula de manera que su área sea proporcional a la frecuencia de cada clase.

recuerda

En lugar de utilizar frecuencias absolutas, los histogramas también se pueden contruir considerando frecuencias relativas o porcentajes.

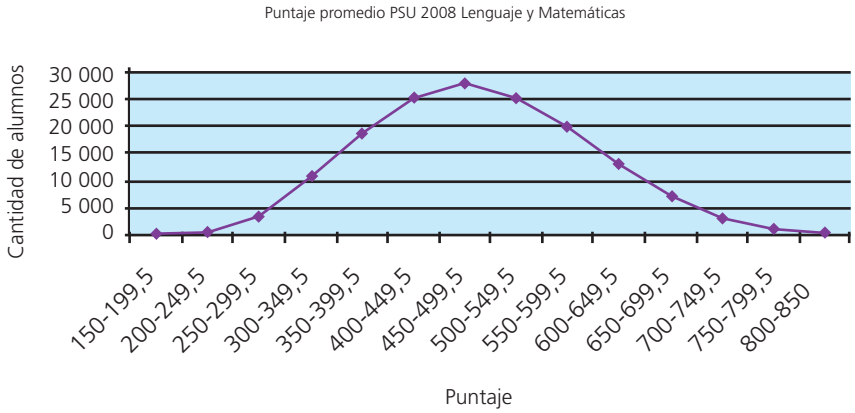
Como puedes observar en algunos histogramas se muestra una línea poligonal abierta la cual une los centros de clases de los rectángulos de frecuencia. La siguiente gráfica muestra las exportaciones chilenas en los últimos 8 años en miles de millones, ¿qué información nos entrega la línea poligonal del gráfico derecho?



Como podemos ver en los dos gráficos el comportamiento de las exportaciones de Chile ha aumentado considerablemente. Así la línea poligonal del gráfico derecho nos facilita observar el comportamiento de las exportaciones, por ejemplo:

observamos que el mayor incremento en las exportaciones se presentó entre los años 2006 y 2007, ya que el segmento que los une presenta una mayor pendiente positiva.

La línea poligonal abierta del gráfico anterior recibe el nombre de **polígono de frecuencia** y se utiliza para observar el comportamiento más "suave" de una distribución de frecuencias. Así por ejemplo en el siguiente polígono de frecuencia podemos ver que los promedios de puntajes de Lenguaje y Matemáticas PSU del 2008 tuvieron el siguiente comportamiento. ¿Cuál fue el puntaje más obtenido?



nota

Las **marcas de clase**, son los puntos medios de los periodos o intervalos de clase.

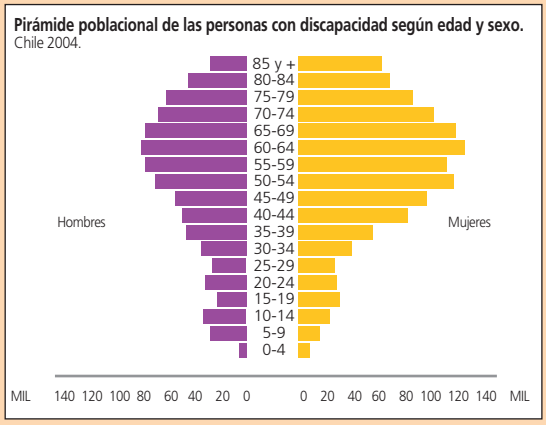
actividades

1. Observa el gráfico de la derecha y responde:

a) ¿Cuáles son las diferencias entre los gráficos de los hombres y las mujeres?

b) ¿En qué periodo de edad existe mayor cantidad de personas con discapacidad?

c) ¿Quiénes son más proclives a tener algún tipo de discapacidad?



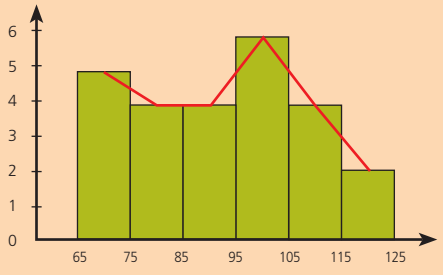
2. Observa el gráfico de la derecha y determina:

a) Los vértices del polígono de frecuencia, los cuales son determinados por las marcas de clase de cada intervalo y la frecuencia dada por la altura del rectángulo.

b) El área de cada rectángulo y súmalos.

c) El área debajo del polígono de frecuencia.

d) ¿Las áreas son iguales?



Tramo	Ingreso familiar en $
1	Menos de 144 000
2	144 001 a 288 000
3	288 001 a 432 000
4	432 001 a 576 000
5	576 001 a 720 000
6	720 001 a 864 000
7	864 001 a 1 008 000
8	1 008 001 a 1 152 000
9	1 152 001 a 1 296 000
10	1 296 001 a 1 440 000
11	1 440 001 a 1 584 000
12	1 584 001 ó más

Acumulando

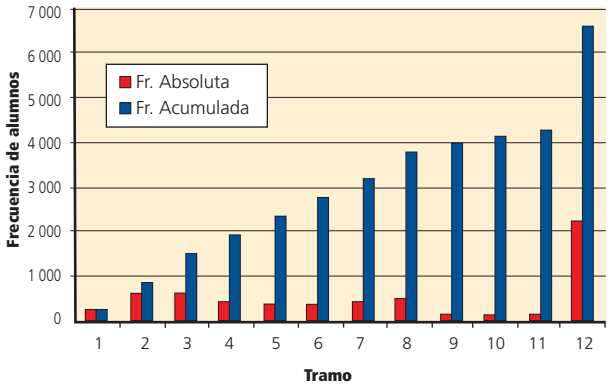
La siguiente tabla muestra la distribución de los resultados de los alumnos en la PSU, proceso de admisión 2009, promedio lenguaje y matemáticas considerando el ingreso familiar. Este monto se ha clasificados en 12 tramos, como lo detalla la tabla de la izquierda.

PUNTAJE	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	SI	TOTAL
Menos de 450	29 041	30 346	10 282	3 892	1 863	1 009	733	330	139	109	99	423	42	78 308
450 - 600	26 997	41 545	21 060	10 298	6 606	3 733	3 656	2 215	813	745	735	3 724	27	122 154
601 - 700	3 336	6 925	5 124	3 409	2 719	2 027	2 246	2 078	634	636	668	5 252	5	35 059
Más de 700	263	635	617	450	421	388	453	575	170	158	196	2 271	0	6 597
TOTAL	59 637	79 451	37 083	18 049	11 609	7 157	7 088	5 198	1 756	1 648	1 698	11 670	74	242 118

Fuente: DEMRE.

Si nos centramos en los alumnos que obtuvieron más de 700 puntos, ¿qué cantidad de alumnos tiene un ingreso familiar mayor a $720 000? o mejor aún, ¿cuál es el tramo donde se encuentra la mitad de los alumnos con puntajes ,

Tramo	Fr. Absoluta	Fr. Acumulada
1	263	263
2	635	898
3	617	1 515
4	450	1 965
5	421	2 386
6	388	2 774
7	453	3 227
8	575	3 802
9	170	3 972
10	158	4 130
11	196	4 326
12	2 271	6 597



importante

Al polígono de frecuencia acumulado se le denomina **ojiva**.

actividades

1. En el gráfico de polígonos de frecuencia, ¿cuál es el mayor incremento que sufre el polígono de frecuencia de un vértice a otro?
2. En los alumnos que tuvieron puntajes entre 601 y 700 en la PSU. ¿Cuántas familias tienen un ingreso bruto menor a $ 432 001? Desarrolla las tablas de frecuencia y grafica los polígonos de frecuencia acumulada.

3 Si tengo información, ¿cómo la presento?

Lautaro realizó una encuesta a sus compañeros sobre las horas de estudio que habían realizado la semana anterior, obteniendo los siguientes datos: 18, 60, 72, 58, 20, 15, 12, 26, 16, 29, 26, 41, 45, 25, 32, 24, 22, 55, 30, 31, 55, 39, 29, 44, 29,14, 40, 31, 45, 62, 36, 52, 47, 38, 36, 23, 33, 44, 17 y 24.

¿Cómo podrá Lautaro presentar estos datos a sus compañeros de curso? Vamos a usar el histograma, el polígono de frecuencia y frecuencia acumulada para ayudar a Lautaro. Primeramente debemos crear una tabla de distribución de frecuencia.

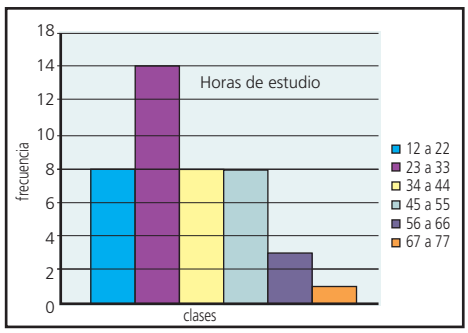
Si contamos los datos, nos podemos dar cuenta que hay 40 datos, los cuales varían de un mínimo de 12 horas a un máximo de 72 horas de estudio. Debemos determinar en cuántas clases queremos distribuir los datos. Tenemos 40 datos, por lo tanto tenemos que el número más cercano a $\sqrt{40}$ se aproxima al número entero 6, luego restamos el dato mayor que es 72 al dato menor 12 y lo dividimos por 6.

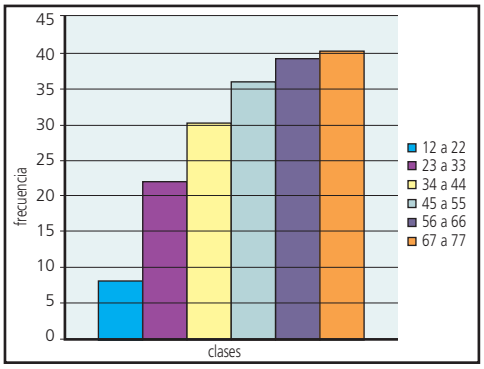
$$\frac{X_{max} - X_{min}}{k} = \frac{72-12}{6} = 10$$

Siendo 10 la amplitud de las clases. Ahora tenemos que la primera clase está dada por el intervalo [12-22], luego como las clases deben ser excluyentes tenemos que la segunda clase va de 23 a 33 y así sucesivamente, obteniendo la siguiente tabla:

Clase	Frecuencia	Fr. acumuladas
12 a 22	8	8
23 a 33	14	22
34 a 44	8	30
45 a 55	6	36
56 a 66	3	39
67 a 77	1	40

Ya habíamos visto cómo se obtenía la frecuencia acumulada. Para generar el histograma debemos generar un gráfico donde el eje horizontal representa las clases y el eje vertical representa la frecuencia de cada clase. Como observamos los datos son enteros, por lo tanto es bueno que los ejes tomen valores enteros. Así obtenemos el siguiente histograma:

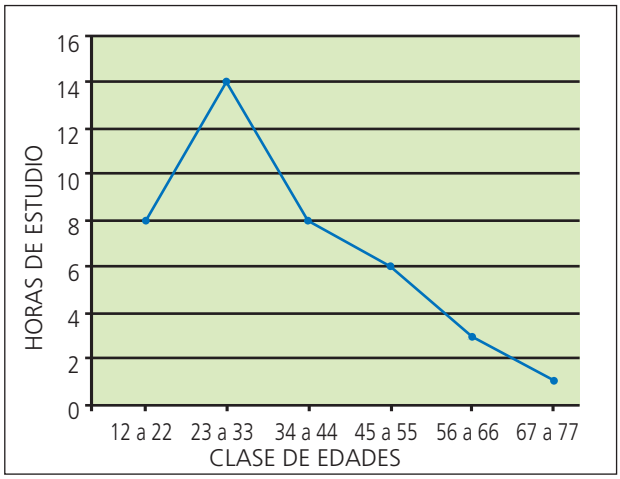


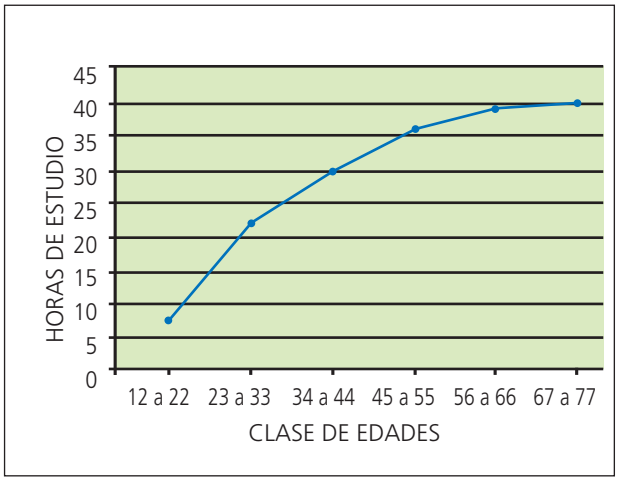


Ahora para obtener los polígonos de frecuencia y frecuencia acumulada debemos determinar las marcas de clase. Como recordamos, las marcas de clase son el punto medio entre los extremos de los intervalos de las clases. Así tenemos que la marca de clase para el primer intervalo es

$$\frac{12+22}{2}=17$$

Siendo 17 la marca de clase del primer intervalo. Luego considerando las mismas frecuencias de los rectángulos, obtenemos los siguientes gráficos de polígonos de frecuencia y frecuencia acumulada.





¿Qué información me entregan tanto los histogramas como los polígonos de frecuencia con respecto a las horas de estudio?

actividades

1. Las siguientes son las distancias que 30 estudiantes elegidos al azar de una escuela recorren diariamente de ida y vuelta para ir a la escuela (en cuadras).

12	30	10	11	18	26	34	18	8	12
26	14	5	22	4	25	9	10	6	21
18	18	9	16	44	23	4	13	36	8

a) Elabora la tabla de distribución de frecuencia y frecuencia acumulada.

b) Elabora un histograma.

c) Elabora el polígono de frecuencia y frecuencia acumulada.

2. Observa la tabla de distribución de frecuencia de la derecha.

a) Desarrolla el histograma y el polígono de frecuencia.

b) Determina la columna de frecuencia acumulada y la de marcas de clase. Luego grafica el polígono de frecuencia acumulada asociado.

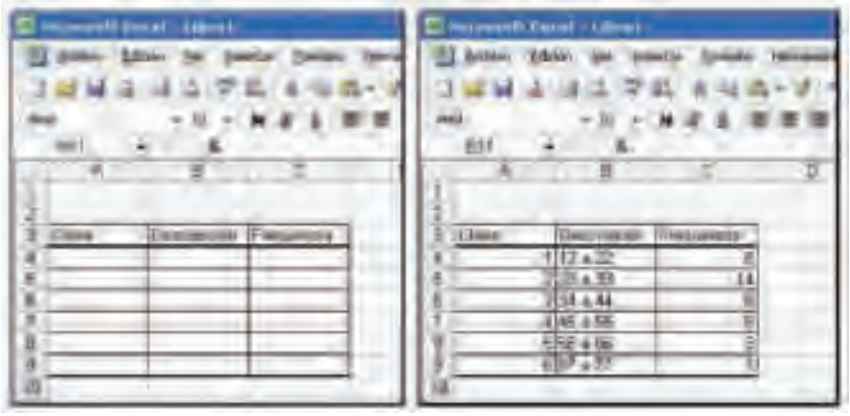
Puntaje estándar	Total
150-199,5	13
200-249,5	521
250-299,5	3 485
300-349,5	12 008
350-399,5	21 841
400-449,5	32 317
450-499,5	38 905
500-549,5	38 568
550-599,5	31 342
600-649,5	20 874
650-699,5	11 074
700-749,5	4 348
750-799,5	1 348
800-850	248
Total	216 892

4 ¿Se puede con Excel?

Excel es un software que viene incluido en los programas de Microsoft Office. Excel permite desarrollar los histogramas y polígonos de frecuencia de manera más fácil y rápida.

Recordemos los datos de la encuesta de Lautaro, los cuales ordenamos en la tabla. Desarrollemos estas tablas de frecuencia en Excel.

Lo primero que debemos hacer es colocar los nombres a las columnas de la tabla de frecuencia: el número de la clase, descripción de la clase y la frecuencia, para luego completar la tabla.

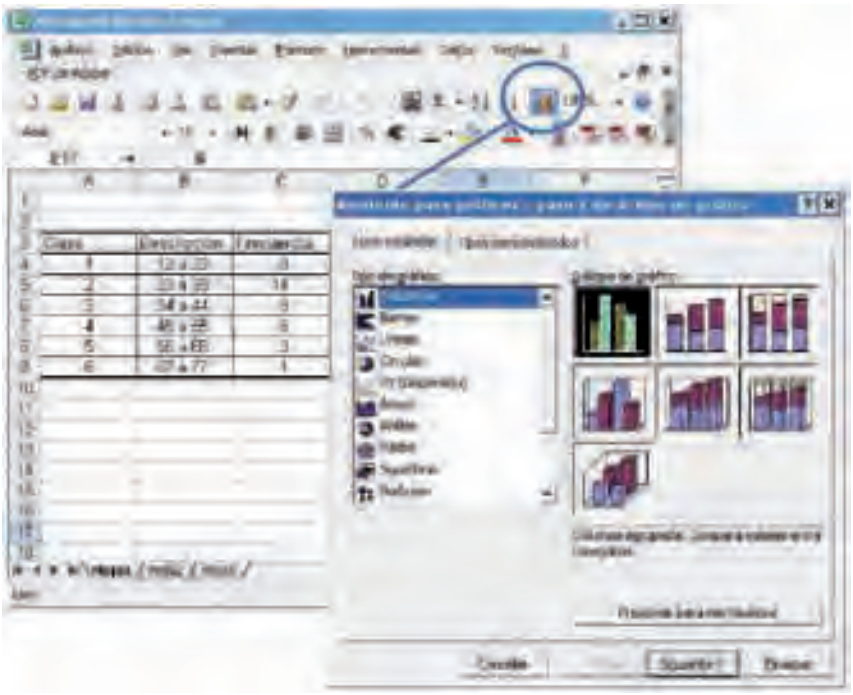


Luego de completar la tabla nos dirigimos al asistente para gráficos, donde nos aparecerá un cuadro como el que se muestra en la página siguiente.

El asistente nos ofrece una gran cantidad de tipos de gráficos para desarrollar, pero sólo vamos a realizar un gráfico de columna agrupada, el primero que se muestra en el asistente.

importante

Un modelo matemático ampliamente utilizado para representar distribuciones de frecuencias es el de la llamada "Curva de Gauss". Para visualizar dicha curva, en el área de matemática del Museo de Ciencia y Tecnología de París (Francia) se dispone de la "Plancha de Galton". La plancha de Galton es un tablero vertical con una serie de clavos distribuidos en forma triangular. Al dejar caer una bolita por el tablero esta choca con los clavos. En cada clavo, la mitad de las veces la bola se desviará a la derecha y la otra mitad a la izquierda. Cuando se lanzan varias bolitas por el tablero, la mayoría de las bolitas se concentran al medio, tal y como muestra la siguiente imagen.

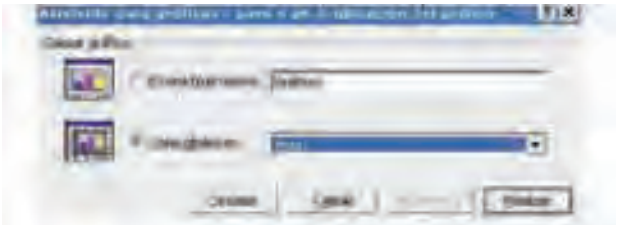


Como puedes observar el recuadro de asistente para gráfico destaca el que vamos a usar. Seleccionamos siguiente y aparecerá otro recuadro el que pide los rangos de los datos y los rótulos o nombres de las columnas, en este caso la descripción de las clases y la frecuencia de cada clase.

Además en el segundo paso se debe cambiar el nombre de las series, las cuales, como ya sabes, son la descripción de cada clase. Así seleccionamos la segunda hoja del recuadro y seleccionamos la serie 1 y luego vamos donde se encuentra el nombre de la serie 1, en nuestro caso columna B y fila 4. También podemos agregar el nombre del eje, que en nuestro caso es clases. Luego se continúa con las demás series.

Ahora en el tercer paso podemos colocar el nombre a los ejes, tanto horizontal como vertical. También podemos colocar el título del gráfico. Hay otras posibilidades para el gráfico, pero te dejamos que investigues tú solo.

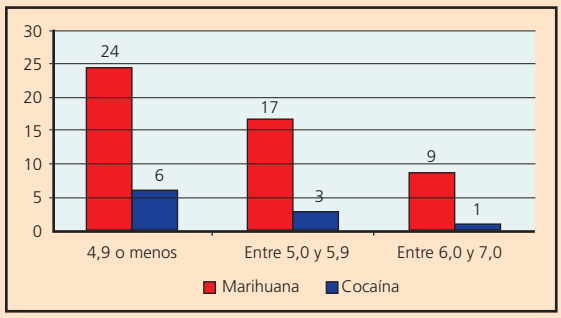
El cuarto paso nos pide que le digamos dónde queremos el gráfico, en la hoja 1, en la que estamos trabajando o en otra.



Para el polígono de frecuencia, debemos elegir el gráfico tipo líneas y para observar mejor los marcadores de cada clase, seleccionamos el gráfico de líneas con marcadores en cada valor de datos. Los pasos 3 y 4 son exactamente los mismos que para un histograma.

aplicando lo aprendido

1 El gráfico presenta la prevalencia de último año de consumo de marihuana y cocaína según rendimiento escolar, en porcentajes.



Fuente CONACE

a) ¿Existe alguna relación entre el porcentaje de consumo y las calificaciones?

b) ¿Cuál es la razón entre los porcentajes de alumnos que obtuvieron calificaciones entre 6,0 y 7,0 y los que obtuvieron calificaciones entre 4,9 y menos?

c) ¿Qué conclusiones sacas tú de esta información?

2 Los siguientes datos corresponden a las precipitaciones de la Isla de Juan Fernández en un año en milímetros cúbicos.

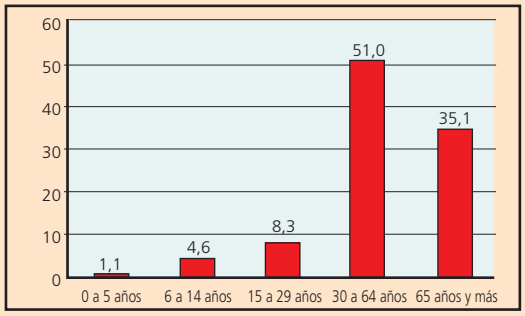
23,3	23,8	60,0	36,3
243,2	299,3	168,1	194,8
57,2	100,4	38,6	39,2

a) Elabora la tabla de distribución de frecuencia con datos agrupados en clases, indicando la frecuencia absoluta, frecuencia relativa, frecuencia acumulada y por último la marca de clase.

b) Elabora un histograma y el polígono de frecuencia.

c) Elabora el polígono de frecuencia acumulada.

3 La siguiente tabla muestra el porcentaje de chilenos con discapacidad por rango etáreo.

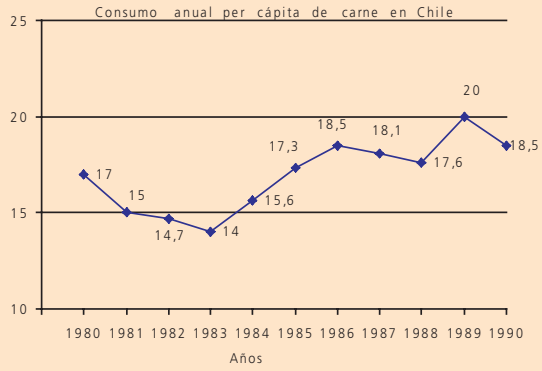


Fuente INE

a) Sabiendo que la población total de discapacitados es de 2 068 072 personas. Determina la tabla de distribución de frecuencia que dio origen al gráfico.

b) Luego determina la frecuencia acumulada y elabora el polígono de frecuencia acumulada.

4 El siguiente cuadro representa el consumo de carne de Chile en el periodo 1980-1990.



a) ¿Cuáles fueron los periodos de baja en el consumo per cápita de carne que hubo entre1980-1990?

b) ¿En qué periodos se encuentran las variaciones con mayor alza de consumo?

c) ¿En qué año se produjo el menor consumo y el mayor consumo de carne?

5 ¿Quién debe representar a los datos?

Amaru obtuvo las siguientes calificaciones en matemáticas.

1 4 7 5 4 6 4

¿Cuál debería ser la calificación final en matemática para Amaru? ¿Qué calificación representa mejor a todas las calificaciones de Amaru? ¿Qué podemos hacer? Lo que necesitamos es una calificación, tal que las demás calificaciones estén a su alrededor, es decir, estén cerca de ese valor. Necesitamos un número intermedio, necesitamos una **medida de tendencia central**.

Cuando los profesores obtienen los promedios de las notas, usan una medida de tendencia central, es decir están obteniendo una calificación que represente a las calificaciones obtenidas en la asignatura. Esta medida de tendencia central recibe el nombre de **media**.

La **media** de n datos $x_1, x_2, \ldots, , x_n$, se calcula por medio de la fórmula

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

En el caso de Amaru la media se obtiene

$$\frac{1+4+7+5+4+6+4}{7} \approx 4{,}4$$

¿Crees que la calificación final representa a las calificaciones de Amaru? ¿Amaru debió tener mayor o menor calificación final del curso? ¿Qué crees tú?

Lautaro opina que Amaru debió haber tenido la nota que más se sacó en la asignatura, es decir, un 4, ¿qué piensas tú al respecto? Lautaro está usando otra medida de tendencia central, esta medida recibe el nombre de **moda**. Es cierto, al parecer ya habíamos escuchado esta palabra en el mundo comercial, cuando una prenda de ropa o anteojos es muy usado se dice que esta de moda. En nuestro caso la calificación 4 es la más reiterada, por lo cual corresponde a la calificación con mayor frecuencia.

La moda de un conjunto de datos, es el valor que aparece con mayor frecuencia.

nota

La realización de los censos originó la necesidad de mejorar los métodos de recolección y análisis de datos, apoyándose en herramientas matemáticas y en el cálculo de probabilidades. Mediante el uso de cuadros, tablas y gráficos se organizaron y redujeron datos. La **Estadística Descriptiva** se ocupa de organizar, reducir los datos y calcular los principales descriptores estadísticos, tales como: las medidas de tendencia central, dispersión, asimetría y kurtosis.

importante

$\bar{x}$ se lee **x** barra.

actividades

1. Si las calificaciones de Amaru fueran: 1, 1, 7, 7. ¿Qué medida de tendencia central escogerías para representar al conjunto de calificaciones?
2. Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 58 Kg. y el de los hombres de 72. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor?
3. La media en fluidez verbal de una clase de un colegio es de 400. Si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la puntuación de los 4 primeros es de 380, 420, 600, 400. ¿Cuál sería aproximadamente la puntuación esperada para el quinto estudiante?

Lautaro es un alumno que siempre al final de los cursos se esfuerza para cambiar y elevar la media de la calificación final. Las primeras 4 calificaciones de Lautaro son las siguientes:

3 4 3 4

En la última prueba Lautaro obtuvo una calificación 7 y estaba feliz, pero el profesor viendo que Lautaro podía esforzarse más durante el año, no usó la media para estimar su calificación final. El profesor ordenó las calificaciones de menor a mayor

3 3 4 4 7

Observó que tendría dificultad al aplicar la moda a las calificaciones, así que escogió la nota que estaba al medio de las calificaciones, es decir, escogió el 4 como calificación.

¿Qué medida de tendencia central uso el profesor? El profesor uso la medida de tendencia central llamada **mediana**. Como puedes observar la mediana no se ve afectada por los valores de los datos extremos.

Para determinar la mediana de un grupo de datos debemos:

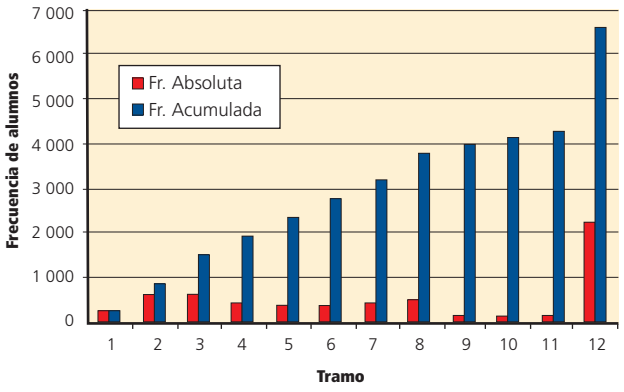
1. Distribuir los datos en orden numérico (del más pequeño al más grande o del más grande al más pequeño).
2. Si el número de datos es impar, la mediana es el dato que se encuentra a mitad de la lista.
3. Si el número de datos es par, la mediana es la media de los dos datos que se encuentran a la mitad de la lista.

nota

Estimar la media en datos agrupados, puede que no resulte muy confiable, ya que usamos sólo un representante de cada clase, la marca de clase.

En la siguiente tabla de distribución, ¿cómo obtendrías los valores de la media, moda y mediana?

Tramo	Descripción	Fr. Absoluta	Fr. Acumulada
1	Menos de 144.000	263	263
2	144.001 a 288.000	635	898
3	288.001 a 432.000	617	1 515
4	432.001 a 576.000	450	1 965
5	576.001 a 720.000	421	2 386
6	720.001 a 864.000	388	2 774
7	864.001 a 1.008.000	453	3 227
8	1.008.001 a 1.152.000	575	3 802
9	1.152.001 a 1.296.000	170	3 972
10	1.296.001 a 1.440.000	158	4 130
11	1.440.001 a 1.584.000	196	4 326
12	1.584.001 o más	2 271	6 597



Para datos agrupados en clases, la media se estima con la siguiente expresión:

$$\bar{x} = \frac{m_1 n_1 + m_2 n_2 + \ldots + m_k n_k}{n}$$

donde $m_1, m_2, \ldots, m_k$ son las marcas de clase y $n_1, n_2, \ldots, n_k$ son las frecuencias de cada clase y el n del denominador indica la cantidad de datos.

Para datos agrupados, la mediana se estima determinando primeramente la posición de ésta en el conjunto de datos ordenados. Entonces para n datos tenemos que la posición de la mediana (Me) esta dada por la expresión

$$Me = L_{\text{inf}} + A \cdot \frac{nF}{2N_I}$$

Luego de determinar la posición determinamos el intervalo cuya frecuencia absoluta acumulada supera inmediatamente a la posición de la mediana $pos(me)$. Así tenemos la siguiente expresión:

$$Me = L_{\text{inf}} + A \cdot \frac{nF}{2N_I}$$

donde L_{inf} es el límite inferior del intervalo, F es la frecuencia acumulada del intervalo de clase, n_I es la frecuencia absoluta del intervalo mediano y por último A es la amplitud del intervalo mediano.

Para datos agrupados, la moda (Mo) se determina primero identificando la clase con la mayor frecuencia. Luego aplicamos la siguiente expresión:

$$Mo = L_{inf} + \frac{F_s}{F_a + F_s}$$

donde L_{inf} es el límite inferior del intervalo modal, F_s es la frecuencia absoluta siguiente a la modal y F_a es la frecuencia absoluta anterior a la modal.

actividades

1. Si las calificaciones de Ayinko son las siguientes: 4 5 6 7 5 6 3.

a) Determina todas las medidas de tendencia central de las calificaciones de Ayinko.

b) Decide cuál de las medidas de tendencia central, le conviene a Ayinko para la calificación final.

2. Determina las medidas de tendencia central de la tabla de distribución de la página anterior.

3. La tabla de la derecha, muestra la cantidad de empleos por región en miles de personas.

a) ¿Cuál es el promedio de empleos que se ofrece a nivel nacional?

b) ¿Qué región tiene la mayor cantidad de empleos? ¿A qué medida de tendencia central corresponde este valor?

c) ¿Cuál es la mediana en la cantidad de empleos?

4. ¿Cómo sería el histograma, si la media, moda y mediana coinciden en un mismo valor? ¿Y si la moda va primero, la mediana después y por último la media? ¿Y si la media va primero, la mediana después y por último la moda?

Región	Total
Total	6 740,4
Tarapacá	132,0
Antofagasta	220,0
Atacama	113,9
Coquimbo	251,5
Valparaíso	663,1
O'Higgins	331,4
Maule	381,8
Bío-Bío	705,7
Araucanía	355,2
Los Lagos	323,6
Aysén	47,0
Magallanes	62,6
Metropolitana	2 930,9
Los Ríos	141,1
Arica Parinacota	80,3

6 Medidas de posición

Observa la siguiente tabla:

Total de ciudades capitales
Hogares, personas, gastos e ingreso mensual por hogar, según grupo de quintil de hogares
EPF noviembre 2006 - octubre 2007

Grupo de quintiles de hogares	Hogares		Nº de personas por hogar	Personas		Gasto mensual (Pesos abril 2007)		Ingreso mensual (Pesos abril 2007)		Participación en el ingreso total
	Número	Porcentaje		Número	Porcentaje	Por hogar	Per cápita	Por hogar	Per cápita	
Total	2 650 757	100,00	3,56	9 433 750	100,00	652 967	191 905	659 050	185 184	100,00
1	530 151	20,00	4,24	2 245 306	23,80	304 042	71 789	177 103	41 817	5,38
2	530 151	20,00	3,88	2 058 416	21,82	404 702	104 232	312 497	80 485	9,48
3	530 151	20,00	3,68	1 949 335	20,66	515 934	140 316	453 217	123 259	13,75
4	530 151	20,00	3,26	1 725 660	18,29	697 700	214 345	670 936	206 123	20,36
5	530 151	20,00	2,74	1 455 033	15,42	1 492 456	543 787	1 681 500	612 666	51,03

Hogares ordenados de acuerdo al ingreso Per Cápita. Ingreso, excluye arriendo imputado por vivienda propia o cedida gratuitamente. Deflactado por IPC General.

La tabla muestra los gastos e ingresos mensuales de hogares de ciudades capitales de Chile, según grupo de quintil de hogares.

¿Qué significado tiene la palabra quintil? Un **quintil** corresponde a la quinta parte del grupo total. Como puedes observar, el número total de hogares del estudio es de 2 650 757, al número total de hogares lo dividieron en 5 partes iguales, así podemos ver que hay 5 grupos de 530 151 hogares cada uno.

Para el primer quintil, ¿cuál es el gasto mensual? ¿Cuál es la cantidad de personas promedio que hay en los hogares pertenecientes al primer quintil?

El quintil es una medida de posición, pero también se les conoce como medidas de distribución, ya que indica la cantidad de datos que se encuentra bajo o sobre cierto porcentaje, por ejemplo en los hogares pertenecientes al primer quintil, ellas representan al 20% del total de hogares.

importante

El percentil **k**, se denota y calcula de la siguiente forma $\mathbf{Pk} = (\mathbf{n}+1)\frac{\mathbf{k}}{100}$

Así como la mediana, divide al total de los datos en dos partes equivalentes y el quintil divide en 5 partes equivalentes existen otras medidas de posición, como por ejemplo, el cuartil y el percentil. ¿En cuántas partes divide el cuartil al total de datos? ¿Y el percentil?

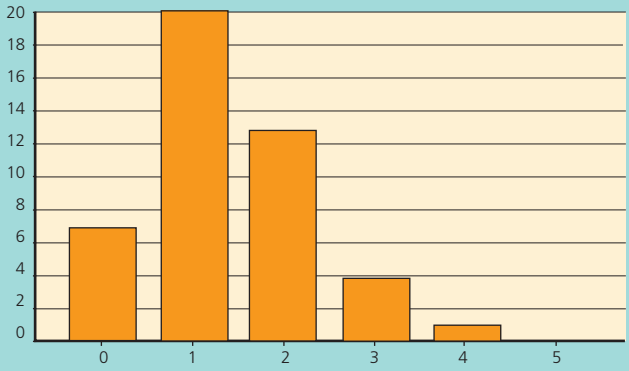
El cuartil particiona a una distribución de frecuencias en 4 partes mediante los puntos Q_1, Q_2 y Q_3 llamados primer cuartil, segundo cuartil y tercer cuartil respectivamente, tal que el primer cuartil corresponde al 25% inferior de la distribución de frecuencia, el segundo cuartil corresponde al 50% inferior de la distribución de frecuencia y el tercer cuartil corresponde al 75% inferior de la distribución de frecuencia.

El percentil particiona a una distribución de frecuencia en 100 partes, mediante los puntos P_1, P_2,…, P_{99}, llamados primer percentil, segundo percentil y así sucesivamente hasta el 99^{avo} percentil. Así tenemos que P_1 concentra al 1% inferior de la distribución de frecuencia, así con los demás percentiles.

¿Con qué percentil coincide la mediana? ¿Con qué percentil coincide el tercer cuartil?

problema resuelto

En este diagrama de barras se ha representado el número de hermanos que tienen los alumnos y alumnas del Primero medio de un colegio.
A partir del gráfico determina la tabla de distribución de frecuencia y determina la moda, mediana y media del número de hermanos del curso. Además determina cuál es el número de hermanos tal que el 75% de alumnos del curso tenga un número igual o inferior.



Solución

Para realizar la tabla de distribución primero debemos determinar el nombre de cada clase o rango. Las clases están dadas por el número de hermanos.

Como observamos hay 45 alumnos en el curso. Para determinar la media de hermanos del curso debemos dividir la suma de los hermanos en el curso por la cantidad de alumnos, es decir

$$\frac{0\times 7+1\times 20+2\times 13+3\times 4+4\times 1+5\times 0}{45}\approx 1{,}38$$

Como no puede haber 1,38 hermanos, ya que las unidades son enteros, tenemos que la media de hermanos es de 1, ya que es el valor que más se le acerca. La moda de hermanos, como lo puedes observar es 1.

Clase	Frecuencia	Fr. Acumulada
0	7	7
1	20	27
2	13	40
3	4	44
4	1	45
5	0	45

Como recordarás la mediana es el valor que se encuentra en la mitad de los datos ordenados. Para determinar la mediana lo primero que debemos determinar es su posición al interior de los datos, y como son 45 datos tenemos que la **pos(me)** = $\frac{45+1}{2}$. Entonces observando la tabla tenemos que el valor que se encuentra en esa posición es el número 1, ya que esta en la frecuencia acumulada de 1 hermano, hacia abajo.

Para determinar el percentil 75 $\mathbf{P_{75}}$ o tercer cuartil $\mathbf{Q_3}$ debemos determinar su posición al interior de los datos ordenados. Para ello usamos la regla $\mathbf{P_{75}} = (45+1)\frac{75}{100} = 46\frac{3}{4} = 34{,}5 \approx 35$, así la posición es la 35, luego observando la tabla tenemos que el numero de hermanos es 2, tal que el 75% de alumnos del curso tienen igual o menor número de hermanos.

aplicando lo aprendido

1 Los siguientes datos son los pesos de los alumnos de un curso:

Hombres					
55	64	70	74	75	70
64	93	60	62	70	80
61	60	62	68	65	65
66	68	70	72	72	71
56	56	56	53	60	65

Mujeres					
60	45	46	50	47	55
49	52	50	46	50	52
52	48	52	63	53	54
54	54	53	55	57	44
67	61	68	55	64	60

a) Determina la media, moda y mediana de los pesos de los alumnos.

b) Elabora una tabla de distribución de frecuencia.

c) Elabora el histograma y polígono de frecuencia.

d) Determina cuál es el valor del peso tal que el 80% de alumnos tenga igual peso o inferior.

e) Determina cuál es el valor del peso tal que el 45% de los alumnos tenga un peso mayor al determinado.

f) Determina el tercer cuartil.

2 La edad media de los 175 alumnos de una escuela es de 8 años, y la de los 12 adultos (profesores y personal) es de 40 años. ¿Cuál es la edad media de todas las personas de esa escuela?

3 Si se conoce que el salario medio mensual de 5 hermanos, es de $120 000, y la mediana es de $100 000.

a) ¿Cuánto dinero llevan mensualmente a la casa los cinco hermanos?

b) Si Juan, el mejor pagado de los cinco hermanos recibe un aumento de $10 000, ¿cuál es la nueva media y cuál es la nueva mediana?

4 En un banco comercial se desea estudiar el tiempo de atención necesario para que un cliente realice una transacción entre las 12:00 horas y las 14:00 horas. Durante una semana se tomaron los tiempos de atención de 10 clientes diariamente, obteniéndose los siguientes datos tabulados:

Tiempo de atención en minutos	Cantidad de clientes
0,25 - 1,65	17
1,65 - 3,05	11
3,05 - 4,45	7
4,45 - 5,85	7
5,85 - 7,25	4
7,25 - 8,65	2
8,65 - 10,65	2
TOTAL	**50**

a) Determina qué porcentaje de clientes demoraron a lo más 3 minutos en su atención.

b) Determina cuántos minutos a lo más demorará en su transacción el 84%.

c) Construya un gráfico adecuado que permita mostrar (aproximadamente) la ubicación de la mediana y el percentil de orden 0,75.

5 Un alumno registra el tiempo de espera de pasajeros del transporte, obteniendo los siguientes resultados en minutos:

14 12 10 5 55

a) Calcula todas las medidas de tendencia central.

b) Si el alumno se equivocó al anotar 55, el debió anotar 5,5, ¿qué medida se vio más afectada?

7 ¿Se cumple para toda la población?

Cuando Lautaro encuestó a sus compañeros de curso sobre las horas de estudio que había realizado la semana anterior, obtuvo que el promedio de horas de estudio de su curso era 34,8 horas. Ya que la encuesta la había hecho en un solo curso del colegio, ¿pudo Lautaro haber dicho que los alumnos del colegio tenían un promedio de estudio 34,8 horas? ¿Qué piensas tú?

Un estudio dice que por cada 10 personas una de ellas es zurda. ¿Este estudio se cumple en tu curso? ¿Cómo podemos saber si este estudio se cumple para todo el colegio? ¿Cómo podemos saber si se cumple para toda la población chilena? Si dices que el 50% de los alumnos de tu colegio son fanáticos de un equipo de fútbol y el otro 50% es de otro equipo. ¿Cómo podrías probar esto? Y aun más, si afirmas que el 50% de la población chilena es hincha del primer equipo, ¿cómo lo podrías probar?, ¿realizando una encuesta a todos los chilenos?

Realizar estudios que representen a toda la población es muy difícil, ya que por diferentes razones a veces es muy complejo acceder a toda la población:

a) Establecer contacto con toda la población requeriría mucho tiempo, en el caso de Lautaro sería preguntarle a toda la escuela.

b) El costo de estudiar todos los elementos de una población resultaría fuera de nuestro alcance económico. Por ejemplo, como preguntarles a todos los chilenos, ¿cuál es su equipo favorito?

c) Acceder físicamente a toda la población pudiera ser imposible. Por ejemplo, ir a preguntarles a los chilenos que se encuentran en la Antártica, a los chilenos que están embarcados, etc.

actividades

1. Un estudio dice que nueve de cada 10 adolescentes tiene sus dientes con caries, ¿se cumple este estudio en tu curso? ¿Se refleja este estudio en todo el colegio? ¿Cómo se interpreta el estudio para 1 000 adolescentes?

2. ¿Qué tipo de estudio conoces que sea realmente representativo de toda la población?

3. ¿Con qué inconvenientes te puedes encontrar si quisieras realizar un estudio en tu escuela? ¿Podrías sugerir alguna solución?

4. ¿Te parece que las encuestas que entregan la gran mayoría de los medios de información son reales y confiables?

Estos motivos nos hacen pensar en cómo elegir una muestra de la población tal que esta reúna todas las características que son propias de la población, es decir que la muestra resulte ser representativa de la población total, para lo propósitos del estudio.

Por lo anterior se debe tener en cuenta los siguientes aspectos para seleccionar una muestra de una población:

1. El método de selección de los individuos de la población (tipo de muestreo que se va a utilizar).
2. El tamaño de la muestra.
3. El grado de fiabilidad de las conclusiones que vamos a presentar, es decir, una estimación del error que vamos a cometer (en términos de probabilidad).

Método de selección de la muestra

Existen dos tipos de muestreo: el probabilístico y el no probabilístico.

Con el **muestreo probabilístico**, todos los sujetos tienen la misma probabilidad de entrar a formar parte del estudio. La elección se hace al azar.
El no probabilístico es aquel en el que no todos los sujetos tienen la misma probabilidad de formar parte de la muestra de estudio.

Los tipos de muestreo probabilísticos más utilizados son: aleatorio simple, aleatorio sistemático, aleatorio estratificado y aleatorio por conglomerados.

Muestreo aleatorio simple: Muestra seleccionada de manera que cada elemento o individuo de la población tenga las mismas posibilidades de que se incluya. Por ejemplo, los números del cartón de los juegos de azar es una muestra aleatoria simple ya que todos los números tienen igual probabilidad de salir.

Muestreo aleatorio sistemático: Se selecciona un punto aleatorio de inicio y posteriormente se elige cada k-ésimo miembro de la población. El k se calcula dividiendo el total de la población por la muestra necesaria: $k = \frac{N}{n}$. Si se tiene una población de 8 000 individuos y el tamaño de la muestra necesario es de 400, se seleccionará uno de cada 20, que será la fracción de muestreo (8 000/400). Para decidir por cuál se ha de comenzar, se selecciona aleatoriamente, o por sorteo, un número del 1 al 20, y a partir de dicho número se va seleccionando a un sujeto de cada 20.

Muestreo aleatorio estratificado: Una población se divide en subgrupos según alguna característica, se forman los denominados estratos y se selecciona al azar una muestra de cada estrato. La estratificación se suele hacer en función de diferentes variables o características de interés: género, edad, situación laboral, etc. Por ejemplo, si se desea efectuar una estratificación por género y se sabe que en la población la distribución es de 55 mujeres y 45 hombres, por tanto, si el tamaño de la muestra es de 400, se elegirán aleatoriamente 220 mujeres y 180 hombres.

Muestra por conglomerados: Una población se divide en conglomerados a partir de los límites naturales geográficos o de otra clase. A continuación se seleccionan los conglomerados al azar y se toma una muestra de forma aleatoria con elementos de cada grupo. Por ejemplo, al tomar una muestra de una región la dividimos en las comunas y luego seleccionamos al azar cada una de ellas.

Los tipos de **muestreo no probabilístico** más utilizados son: accidental, de conveniencia:

Muestreo accidental: Este tipo de muestreo se denomina también consecutivo, ya que la selección de los sujetos de estudio se hace en función de su presencia o no en un lugar y un momento determinados. Es el caso, por ejemplo, de la inclusión de las mujeres a medida que van acudiendo al hospital, o el de un encuestador que, en la calle, entrevista a las personas que pasan en ese momento por allí. Aunque puede parecer similar al muestreo probabilístico, es evidente que no todas las personas tienen la misma probabilidad de estar en el momento y el lugar donde se selecciona a los sujetos.

Muestreo de conveniencia: Los investigadores deciden, según sus criterios de interés y basándose en los conocimientos que tienen sobre la población, qué elementos entrarán a formar parte de la muestra de estudio. En este muestreo (no probabilístico) es muy importante definir con claridad los criterios de inclusión y exclusión, y cumplirlos rigurosamente.

actividades

1. Si quisieras averiguar el deporte preferido de los alumnos de tu colegio, ¿qué tipo de muestreo realizarías?
2. Si quisieras averiguar el equipo favorito de tu comuna, ¿qué tipo de muestro realizarías?
3. En la siguiente imagen puedes observar la selección de una muestra de aliens. ¿Qué tipo de muestreo se realizó para determinar la muestra?

El error muestral y el tamaño de la muestra

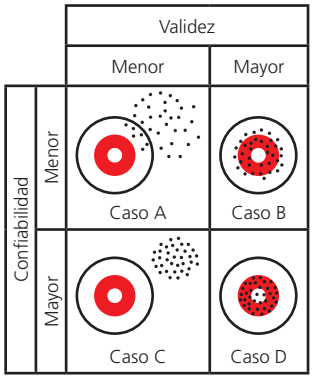
Lautaro infirió que el promedio de las calificaciones de la escuela es de 5,9, ya que al realizar un estudio en su curso la media que le dio fue de 5,9. Pero el promedio de la escuela es de 5,4. El error que cometió Lautaro, se conoce como error muestral, ya que existe una **diferencia** entre el estadístico (moda, media, mediana y otros que se puedan determinar) de una muestra y el parámetro de la población. Podemos identificar dos tipos de errores muestrales:

El **error aleatorio** es el derivado de trabajar con muestras, se puede cuantificar y está relacionado con la precisión. A medida que se aumenta el tamaño de la muestra, este error disminuye, hasta el punto de que si se estudia a toda la población el error aleatorio desaparece.

El **error sistemático** o **sesgo** está relacionado con la representatividad de la población; si la muestra estudiada reúne características diferentes a las que se producen en la población, aunque se aumente el tamaño de la muestra, este error se mantiene y se obtendrán valores diferentes en la muestra a los que realmente se dan en la población. Este error está relacionado con la validez.

¿Qué es la validez? ¿Cómo podemos tener confianza que la muestra es representativa de la población para no cometer errores?

Observemos la imagen de la izquierda que representa el lanzamiento de un dardo a un blanco.



Podemos apreciar que en el **caso A** los impactos están dispersos (baja confiabilidad) y alejados de la diana (baja validez). En el **caso B** los impactos siguen dispersos (baja confiabilidad) pero ahora circundan la diana (alta validez). En el **caso C** los impactos están concentrados (alta confiabilidad) pero alejados de la diana (baja validez). Y finalmente en el **caso D** los impactos se presentan concentrados en torno a la diana (alta confiabilidad y alta validez).

Un procedimiento de medición del tamaño de la muestra que sea confiable proporciona datos con poca variación. Por ello hay que tener presente que si se estudia a más sujetos de los que en realidad son necesarios, se estarán derrochando recursos, tanto materiales como humanos. Si, por el contrario, se estudia a pocos sujetos, no se tendrá la potencia o seguridad suficiente sobre lo que se está haciendo, y puede darse el caso de que no se encuentren diferencias entre dos grupos, por ejemplo, cuando en realidad sí las hay.

El tamaño de la muestra necesaria estará condicionado por los objetivos del estudio, que determinarán el diseño, las variables que deben considerarse y todo el método planteado para dar respuesta a dichos objetivos.

Existen procedimientos estadísticos que permiten determinar el tamaño de las muestras, asegurando confiabilidad y validez de los datos de la muestra, pero esos procedimientos se escapan del tema de nuestro estudio.

9 Simetría y dispersión de los datos

Cuando se analizó qué calificación debía representar la notas de Amaru y Lautaro, se tomó un factor, la distribución de las notas y a la vez su variabilidad.

Observa los histogramas de calificaciones de tres cursos que realizaron la misma prueba de matemáticas.

Gráfico 1

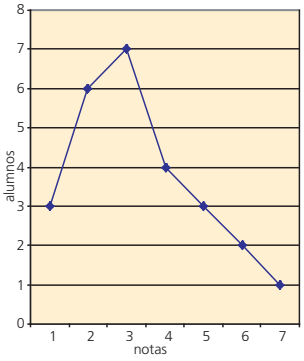


Gráfico 2

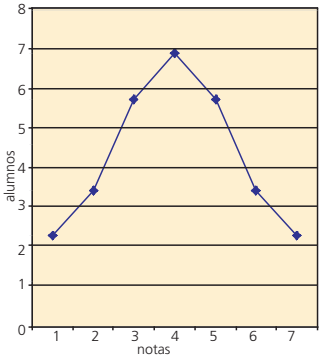
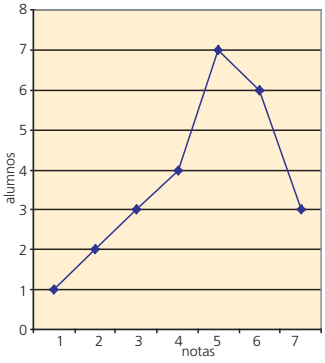


Gráfico 3



¿Qué puedes decir de las medidas de tendencia central en los tres gráficos? Como puedes observar en el gráfico 2 tenemos que la moda, mediana y media son iguales, esto nos indica que los datos se distribuyen simétricamente con respecto a las medidas de tendencia central. En el primer gráfico la media es menor a la moda y mediana, caracterizando al gráfico con una tendencia hacia la izquierda, cuando esto sucede, se dice que los datos tienen un sesgo positivo. En el tercer gráfico observamos lo contrario que en el primer, tenemos que la media es mayor a la moda y mediana, y la gráfica tiene una tendencia hacia la derecha, cuando esto sucede, se dice que los datos tienen un sesgo negativo.

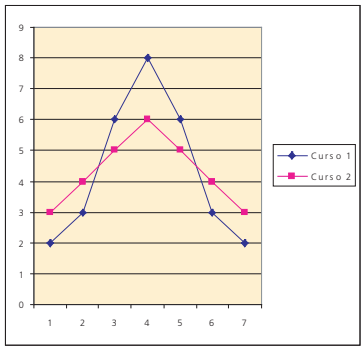
importante

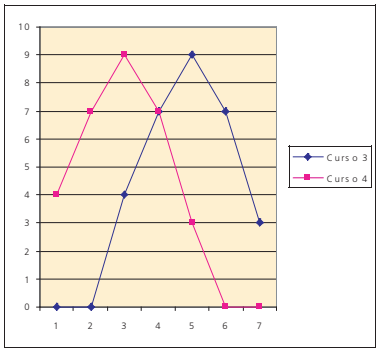
Una distribución se considera poco dispersa si los datos presentan poca variabilidad, es decir si sus valores difieren poco entre si y se concentran en entornos próximos al valor medio.

Dispersión de los datos

Observa los siguientes gráficos de calificaciones de 4 cursos.

Se puede observar que los dos primeros cursos tienen sus calificaciones simétricas, pero en el curso 1 hay mayor dispersión, ya que hubo más personas con calificación 4, en cambio en el curso 2 no hubo tanta distancia entre la personas que obtuvieron 4 y 5 o 4 y 3. Estadísticamente el curso 1 tuvo mayor dispersión que el curso 2, ya que en el curso 2 hay más homogeneidad de los datos.





Los cursos 3 y 4 difieren con respecto a las medidas de tendencia central, pero con respecto a su variabilidad se puede observar que es la misma.

10 Variabilidad en los gráficos

Ya sabes que la variabilidad en las muestras puede dar información de la representatividad de tal muestra de la población, uno de los métodos más sencillos para medir la variabilidad de un conjunto de datos es el rango, ésta es la diferencia entre el máximo y el mínimo valor del conjunto de datos, que denominaremos **Rango** (R).

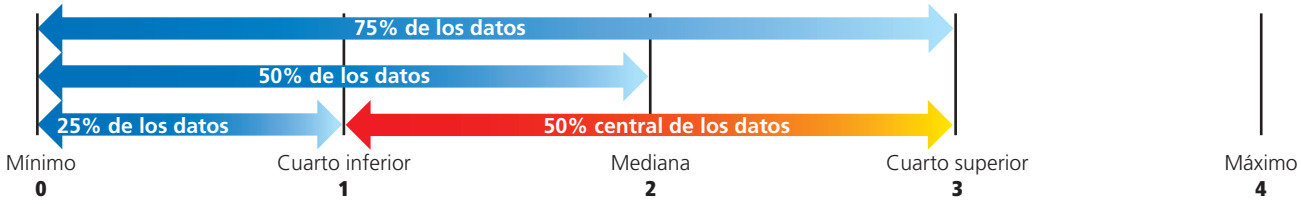
En ocasiones esta medida resulta útil, pero cuando los extremos del lote de datos son valores muy lejanos (**valores "atípicos"**) R pierde valor como **medida de dispersión**. Una mejor forma de proceder en estas situaciones es calcular el rango del 50% central del conjunto de datos. La delimitación del 50% central de este conjunto se logra determinando dos valores que denominamos **cuarto inferior** (Ci) y **cuarto superior** (Cs). Es decir los cuartiles 1 y 3, los cuales actúan como medianas de mitades.

2	1	2	2
2	3	0	1
2	2	1	2
3	2	3	1
1	0	4	3

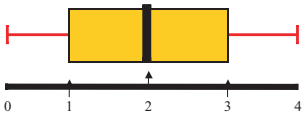
Por ejemplo, si preguntamos el número de personas que trabajan en 20 familias obtenemos la tabla de la izquierda.

Podemos observar que el primer cuartil o Ci y tercer cuartil o Cs son respectivamente.

$$Q_1 = C_i = \frac{n_5 + n_6}{(2)} = \frac{1+1}{2} = 1 \qquad Q_3 = C_s = \frac{n_{15} + n_{16}}{(2)} = \frac{2+3}{2} = 2,5 \approx 3$$



¿Qué nos dice este resumen numérico? Esto nos dice que en la mitad de las familias no había más de dos personas que trabajaran y que la otra mitad de las familias tiene al menos dos personas que trabajan. Además nos dice que el 50% de las familias tiene entre 1 y 2,5 personas que trabajan, pero como no se puede decir 2,5 personas esto equivale a 3.



Este gráfico se conoce como gráfico de caja (ver gráfico de la izquierda), el cual permite visualizar la variabilidad de los datos.

actividades

Cuando una abuela vive con la familia de sus hijos, probablemente se involucrará en las actividades paternales. Supón que los siguientes datos representan en número de órdenes dadas a 25 niños por abuelas:

5, 4, 3, 3, 6, 5, 3, 2, 4, 7, 6, 6, 2, 3, 4, 8, 7, 5, 6, 4, 2, 1, 5, 7, 3

a) Compila los datos en una tabla de distribución de frecuencias con columnas para la frecuencia, la frecuencia acumulada, la frecuencia porcentual y la frecuencia de porcentajes acumulados.

b) Determina el gráfico de caja, de los datos. ¿Qué puedes decir acerca de la variabilidad de los datos?

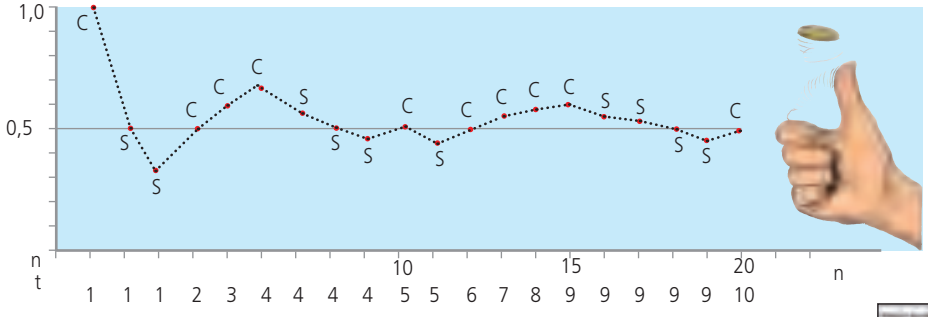
c) ¿Entre qué datos se encuentra el 50% de ellos?

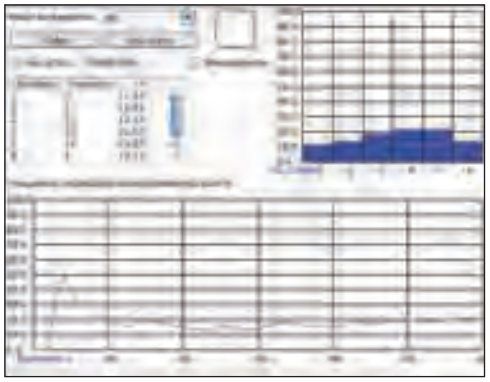
11 ¿Cuál es la probabilidad de la frecuencia?

Es común observar que las personas lancen una moneda al aire para decidir alguna situación, como por ejemplo, qué equipo parte en un partido de fútbol o tenis, o bien quien decidir si se va a un lugar o a otro.

¿Por qué las personas realizan esto para decidir?
La moneda tiene una cara y un sello por lo cual solo existe la posibilidad que salga una de las dos, pero, ¿cuál de las dos tiene mayor probabilidad de salir?

Como recordarás cuando los hechos tienen la misma probabilidad de suceder se les denomina "sucesos equiprobables". Entonces, ¿lanzar una moneda es un hecho equiprobable? ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara o sello?, observa el polígono de frecuencia relativa de abajo el cual muestra el lanzamiento de una moneda 20 veces.





Como observas, la probabilidad dada por la frecuencia relativa de que salga cara al lanzar una moneda es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la probabilidad de que salga sello? ¿Cuál será la probabilidad de que al lanzar un dado, salga un 6? ¿Cuál es la probabilidad de que salga 1? La siguiente dirección de Internet http://www.xtec.cat/~jlagares/matematiques/probabilitat/daus/DausCastellano.html muestra un simulador del lanzamiento de un dado, el cual nos puede ayudar a responder la pregunta. La página te mostrará el cuadro de diálogo de la derecha.

En el cuadro aparece el número de experiencia, es decir, la cantidad de veces que se lanzará el dado, una tabla de frecuencia, un histograma con la frecuencia relativa porcentual y un gráfico de polígono de frecuencia relativa porcentual. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 6 000 veces un dado salga 6? ¿y al lanzar 60 veces? Como puedes observar a mayor número de lanzamientos la frecuencia relativa adopta el valor de la probabilidad del evento.

Lo anteriormente enunciado se conoce como la Primera Ley de los Grandes Números, la cual dice que:

> Si efectuamos un número grande de ensayos de cierto experimento es poco probable que la frecuencia relativa de un acontecimiento se separe mucho de su probabilidad.

Si jugamos con un dado bien hecho, sabemos que la probabilidad de que salga alguno de los números es $\frac{1}{6}$, ya que por medio de los experimentos realizados en los simuladores y aplicando la ley de los grandes números se prueba que ésa es la probabilidad.

investiga

¿Cómo puedes saber si un dado está cargado?

Pero, ¿podríamos haber dicho esto sin hacer los experimentos? Claro que sí, por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado el número resultante sea par? Los números que pueden surgir al lanzar un dado son 1, 2, 3, 4, 5 y 6, por cual tenemos 3 resultados favorables, dentro de los 6, de que al lanzar un dado salga un número par, es decir la probabilidad es $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Este cálculo de probabilidad surge del hecho que todos los resultados posibles son igualmente probables, y recibe el nombre de **probabilidad clásica** o **teórica**.

$$\text{Probabilidad Teórica} = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número total de posibles resultados}}$$

Personas con discapacidad según le ofrecen ayuda en la calle. Distribución porcentual.

	Nº	%
Si	479 407	23,18%
No	1 294 167	62,58%
A veces	138 015	6,67%
No sale	156 483	7,57%
Total	2 068 072	100%

Según la tabla del lado izquierdo, una persona con discapacidad, ¿qué probabilidad tiene de recibir ayuda? ¿Qué probabilidad tiene de no recibir ayuda? ¿Cómo calculas las probabilidades? En este caso usaremos la probabilidad dada por la frecuencia relativa. A este tipo de probabilidad se le denomina **probabilidad empírica** y se determina teniendo en cuenta la frecuencia del evento y el número total de observaciones.

$$\text{Probabilidad empírica} = \frac{\text{Número de veces que el evento ocurre}}{\text{Número total de observaciones}}$$

actividades

1. ¿Cuál es la diferencia entre probabilidad empírica y teórica?

2. En Antofagasta, antes de las elecciones municipales, se aplicó una encuesta a 5 000 personas y se obtuvo que 1 150 piensan votar en blanco. Si votan 28 589 electores, ¿cuántos votos en blanco se podrían esperar en esa elección?

3. La tabla de la derecha muestra los ocupados según rama de actividad.

¿Cuál es la probabilidad de que al sacar un ocupado en el trimestre abril/junio pertenezca a la rama de comercio?

Tarapacá: ocupados según rama de actividad
(en miles de personas)

Rama de actividad	2008			
	Ene/Mar	Abr/Jun	Jul/Sep	Oct/Dic
Total	119,9	121,4	131,5	132,0
Agricultura, caza y pesca	7,7	9,9	8,3	7,5
Minas y canteras	5,0	10,6	11,0	10,5
Industria manufacturera	12,0	12,6	13,7	11,6
Electricidad, gas y agua	0,8	0,5	0,6	1,2
Construcción	9,8	9,4	10,9	10,9
Comercio	35,8	31,1	31,6	34,3
Transporte, almacenaje y comunicaciones	13,6	10,5	14,0	14,0
Servicios financieros	8,7	9,0	10,5	12,4
Servicios comunales, sociales y personales	26,5	27,8	30,9	29,7

Fuente INE, encuesta nacional de empleos

12 Problemas complementarios con las probabilidades

Cuando lanzamos un dado tenemos 6 posibles resultados, lo cual como ya sabes, se denomina espacio muestral.

Entonces la probabilidad del suceso A "obtener un 3 al lanzar un dado" es $P(A)= \frac{1}{6}$. De esto se entiende que la probabilidad de no obtener un 3 al lanzar un dado es:

$$P(\text{no } A) = \frac{5}{6}$$

Cuando dijimos no obtener un 3, es pedir que el evento A "obtener un 3 al lanzar un dado" no cumpla si no que su complemento. Por lo tanto tenemos que la probabilidad complementaria $P(A^C)$ de un evento es:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

Así tenemos que el complemento del suceso A "obtener un 3 al lanzar un dado" se obtiene

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Otro ejemplo de la probabilidad complementaria es cuando se dice "al menos" o "a lo más", las cuales determinan cotas mínimas y máximas respectivamente, por ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un sello, al lanzar dos monedas? Para dar respuesta observa la siguiente tabla, en la cual se observa el espacio muestral del experimento "Lanzar dos monedas"

	Cara	Sello
Cara	Cara, Cara	Cara, Sello
Sello	Sello, Cara	Sello, Sello

Así podemos ver que la probabilidad del suceso "obtener al menos un sello" es $P(A) = \frac{3}{4}$, que es lo mismo que calcular la probabilidad complementaria del suceso B "no obtener ningún sello", $P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

actividades

1. ¿Cuánto suma la probabilidad de un suceso más el complemento del mismo?
2. Si se lanzan 2 dados cual es la probabilidad que al menos en uno de los dos dados se obtenga un 6.
3. ¿Qué es más probable, sacar al menos un 6 lanzando el dado 6 veces o sacar al menos dos 6 lanzando el dado 12 veces o sacar al menos tres 6 lanzando el dado 18 veces?

13 Árbol de las probabilidades

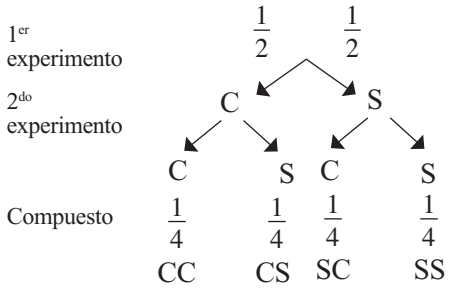
Como sabes, en la probabilidad clásica o teórica, el total de resultados posibles recibe el nombre de espacio muestral y cada uno de los resultados recibe el nombre de suceso elemental.

Cuando se lanzan dos monedas tenemos dos sucesos:
Suceso A: "lanzar la moneda de $10".
Suceso B: "lanzar la moneda de $50".

Si preguntamos por un posible resultado tenemos el siguiente cuadro, el cual representa a todo el espacio muestral.

	Cara de $10	Sello de $10
Cara de $50	Cara, Cara	Cara, Sello
Sello de $50	Sello, Cara	Sello, Sello

Lo que también se puede representar de la siguiente forma:



Ahora si preguntamos por la probabilidad de obtener una cara en el primer lanzamiento y sello en el segundo podemos observar que la probabilidad es $\frac{1}{4}$, lo que podemos explicar observando el árbol. Puesto que la mitad de las veces obtenemos cara en el primer experimento y de esta mitad, la mitad de las veces obtenemos cara en el segundo, la probabilidad de obtener dos caras es la mitad de un medio, esto es un cuarto.

actividades

Desarrolla el árbol de probabilidad del experimento de lanzar 3 monedas y determina:

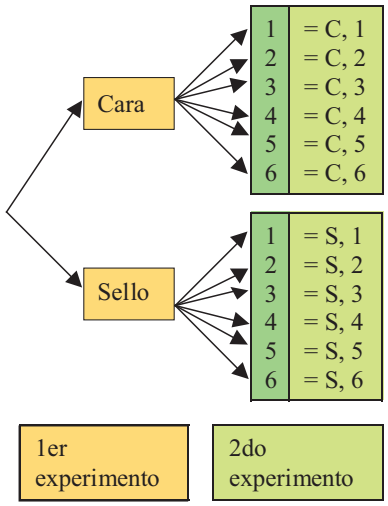
a) La probabilidad del suceso "CSC", en el orden establecido.
b) La probabilidad del suceso "CSC", sin importar el orden.
c) La probabilidad que salga una cara.
d) La probabilidad que salgan dos sellos.
e) La probabilidad de que salga al menos una cara.
f) Determina la probabilidad de que salga a los más una cara.
g) Determina el complemento de probabilidad de "SCS".
h) Determina el complemento de probabilidad de "CCC".
i) Determina la probabilidad de que no salga una cara.
j) Determina la probabilidad de que no salga un sello.

14 Contando las probabilidades

Se lanzan una moneda y un dado, ¿cuál es el espacio muestral de este experimento? Observa la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6
Cara	Cara, 1	Cara, 2	Cara, 3	Cara, 4	Cara, 5	Cara, 6
Sello	Sello, 1	Sello, 2	Sello, 3	Sello, 4	Sello, 5	Sello, 6

Como puedes observar, hay 12 posibles pares de combinaciones posibles al lanzar una moneda y un dado. Ahora observa el árbol.



¿Cuántos posibles resultados hay al lanzar la moneda? ¿Cuántos posibles resultados hay al lanzar el dado? Son 2 resultados en la moneda y 6 en el dado. Por lo cual podemos observar:

Moneda	Dado	Resultado total
2	6	12

Donde podemos concluir que para determinar el total de posibles resultados se deben multiplicar los resultados de la moneda y el dado.

Lo anterior se conoce como **principio de la multiplicación** el cual dice que si hay que disponer elementos en dos posiciones y si se dispone de n-elementos para la primera posición y m-elementos para la segunda posición, entonces el total de parejas posibles que se pueden formar es $n \cdot m$.

¿En qué ayuda el principio de la multiplicación a la determinación de la probabilidad? Nos ayuda a determinar la cantidad de resultados que hay en el espacio muestral, por ejemplo si se lanzan dos monedas y 2 dados, ¿cuál es la probabilidad del suceso A "se obtenga cara en las dos monedas y seis en los dos dados"? Para poder resolverlo sin saber el principio de multiplicación, debemos realizar dos tablas, pero ya no es necesario, ya que si observamos tenemos:

	Moneda I	Moneda II	Dado I	Dado II	TOTAL
Resultados posibles	2	2	6	6	144

Luego la probabilidad del suceso es $P(A) = \frac{1}{144}$

actividades

Se lanza un dado de forma dodecaedra, el cual tiene la serie numérica de 1 a 12 sobre sus caras, además se lanza un dado común y una moneda.

a) Determina cuántos resultados posibles hay en el espacio muestral.

b) Desarrolla el árbol de probabilidades.

c) Determina la probabilidad del suceso B "obtener 7 y 3 en los dados y sello en la moneda".

d) Determina la probabilidad de obtener al menos 13 en la suma de los dados.

un poco de historia

LA ESTADÍSTICA

La estadística es una ciencia con base matemática referente a la recolección, análisis e interpretación de datos, que busca explicar condiciones regulares en fenómenos de tipo aleatorio. Es transversal a una amplia variedad de disciplinas, desde la física hasta las ciencias sociales, desde las ciencias de la salud hasta el control de calidad, y es usada, para la toma de decisiones en áreas de negocios e instituciones gubernamentales.
En la historia la Estadística:

Antes del siglo XVI Está asociada a la práctica del conteo y mediciones, tal como lo practicaban los astrónomos persas y los agrimensores egipcios. Referencias de esto se encuentran en la obra *Los Estados de Aristóteles*.

Siglo XVI Se considera la estadística como la descripción de los Estados. Se utiliza la información de datos geográficos y económicos para tomar decisiones de Estado.

Papiro Rhind
Representa la mejor fuente de información sobre matemática egipcia que se conoce. Fue escrito por el escriba Ahmes aproximadamente en el año 1650 a.C a partir de escritos de 200 años de antigüedad.

Ars Conjectandi
(Artes de las conjeturas)
Se publicó de manera póstuma en 1713, (Jackob Bernoulli murió en 1705). Se encargó de la edición su sobrino Nicolás I.

Siglo XVII En Alemania, Italia e Inglaterra se considera como la ciencia del Estado. En Francia surge el cálculo de probabilidades. En Inglaterra nace la corriente de los aritméticos políticos y comienzan a realizarse los censos con periodicidad decenal.

Siglo XVIII Se mejoran los procesos de recopilación de datos. Se amplían los usos estadísticos del concepto de probabilidad y su cálculo. Jacobo Bernoulli publica su obra *Ars Conjectandi*, en la que formula la Ley de los Grandes Números.

Siglo XIX Friedrich Gauss desarrolla la "Teoría de errores" basada en la curva normal. Se establecen oficinas de estadística en Alemania y otros países. Simón D. Poisson generaliza la Ley de los Grandes Números.

Simón D. Poisson
(1781-1840)
Poisson dedicó su vida a la investigación y enseñanza de las matemáticas. De su mano surgieron numerosa memorias (sus biógrafos las cifran entre 300 y 400) con aportaciones originales en muchos campos. Y una serie de tratados con los que pretendió formar una gran obra de física matemática que no llegó a concluir.

Siglo XX El avance computacional acelera el desarrollo del análisis de datos para afrontar el problema con muestras de cualquier tamaño y múltiples factores. La probabilidad borrosa alcanza gran auge.

un poco de historia

PROBABILIDAD EN LA HISTORIA

Desde hace muchos siglos el ser humano ha venido reflexionando acerca de las experiencias cuyos resultados son inciertos. Se habla de azar (palabra de origen árabe al-zahr, que significa dados para jugar), fortuna que se asocia a la suerte, *chance* (que en francés significa oportunidad) y probabilidad.

Tucidides

Antes del siglo XVI Tucídides, historiador griego (ca. 465-395 a.C.), señalaba: "Es imposible calcular con precisión los hechos que son fruto del azar". Para el filósofo griego Aristóteles (384-322 a.C.) la probabilidad de un "acontecimiento" se manifiesta en "la frecuencia relativa del acontecimiento ...".

Siglo XVI La motivación para estudiar la probabilidad estaba vinculada estrechamente al éxito o al fracaso en los juegos de azar. El matemático Girolamo Cardano (Pavia, 1501-1576), fue pionero en el cálculo de probabilidades de juegos de azar, como lo demuestra su pequeño manual del jugador llamado el "Liber de Ludo Alae". En su época Cardano exhibía una extraordinaria perspicacia para los problemas fundamentales de la probabilidad vinculados a los juegos de dados.

Girolamo Cardano

Aristóteles

Siglo XVII En este siglo se encuentra el acta de nacimiento del concepto de probabilidad en la correspondencia que se cruzan Blaise Pascal (francés, 1623-1662) y Pierre Fermat (francés, 1601-1665). Por primera vez Fermat plantea la noción de probabilidad formulada un siglo más tarde por Laplace, en los términos de número de casos favorables entre el número de casos posibles.

Siglo XVIII En este siglo, considerado de oro de numerosas disciplinas, se producen avances que conducen a un tratamiento mas formal de la probabilidad. Jacques Bernoulli (suizo 1654- 1705) destacó la importancia del enfoque probabilístico en lo social y demostró el llamado teorema de Bernoulli. Abraham De Moivre (francés 1667-1754) dió una formulación matemática de probabilidad.

Abraham De Moivre

Siglo XIX En este siglo se introdujeron importantes trabajos acerca de la probabilidad subjetiva y el teorema de Bayes. Pierre Simón, marqués de Laplace (francés, 1749-1827), conjuntamente con Karl Friedrich Gauss (1777-1856), demostraron el valor práctico de la curva normal (curva de Gauss) como forma típica de distribuciones de frecuencia.

Siglo XX En este siglo destacan muchos probabilistas de los que sólo mencionaremos a Émile Borel (francés, 1871-1956), Richard Von Misses (austríaco, 1883-1953), Harold Jeffreys (inglés 1891-1989) y Andreï Kolmogorov (ruso, 1903-1987). Mención especial merece William Feller (croata, 1906-1970) autor del reputado texto "Introduction to Probability Theory and its Applications". También se continuaron los estudios sobre probabilidad subjetiva y el teorema de Bayes, especialmente por parte de los estadísticos y probabilistas Bruno de Finetti (austríaco, 1906-1985) y Leonard Savage (norteamericano, 1917-1971), entre otros. El desarrollo computacional acelera el avance en el campo probabilístico.

Richard Von Misses

aplicando lo aprendido

1 El Departamento de Transporte urbano del Ministerio ha elegido a la comuna de Santiago para recabar información sobre accidentes de tránsito ocurridos al virar hacia la izquierda en intersecciones. La recolección de los datos se realizará durante un período de dos años. Entre otros aspectos, se quiere comparar el promedio de accidentes en intersecciones con y sin pista central para el viraje a la izquierda, a fin de decidir sobre la posible instalación de dichas pistas en las principales ciudades del país.

a) Identifica la población de interés.

b) Identifica el muestreo a usar para determinar la muestra.

c) Menciona a lo menos dos variables observables en los elementos de la población que sean relevantes en la comparación señalada. Indique para cada variable si es cualitativa o cuantitativa.

2 Para responder la pregunta: ¿Cuáles son los tres problemas a los que debería dedicar el mayor esfuerzo en solucionar el Gobierno?

¿Qué tipo de muestreo se debería desarrollar para obtener una representatividad del país? ¿Se podría realizar un muestreo conveniente para dar respuesta a la pregunta?
Si te dicen que para dar respuesta a esta pregunta entrevistaron a 1 505 personas a nivel nacional, ¿estarías confiado de la posible respuesta? Pero si agregaran que la muestra consistió en 1 505 personas que fueron entrevistadas en sus hogares, en 153 comunas del país. Y que el método de muestreo fue estratificado (por región y zona urbana/rural), aleatorio y probabilística en cada una de sus tres etapas (manzana-hogar-entrevistado), ¿tu confianza cambiaría al saber esto último?

3 Las edades de un grupo de personas son las siguientes:

16	18	18	20	21
22	22	23	25	26
32	30	28	30	32
36	40	44	48	50

a) Calcula las medidas de tendencia central.

b) Determina la tabla de distribución con 5 intervalos de clase.

c) Haz el histograma.

d) Calcula el primer cuartil.

e) Calcula el tercer cuartil.

f) Haz un diagrama de caja de las edades de las personas.

g) ¿Entre qué edades se encuentra el 50% de las personas?

h) ¿Qué puedes decir de la variabilidad y dispersión de las edades de las personas?

4 Los alumnos que se presentaron al examen de matemática en la convocatoria de diciembre obtuvieron las siguientes calificaciones:

7	3	2	4	5	1	8	6	1	5
3	2	4	9	8	1	0	2	4	1
2	5	6	5	4	7	1	3	0	5
8	6	3	4	0	10	2	5	7	4
0	2	1	5	6	4	3	5	2	3
9	7	3	4	3	5	7	4	6	5
6	1	0	5	7	8	5	2	3	10
4	6	2	1	1	2	6	7	4	5
4	7	3	6	5	0	2	8	2	7
8	5	2	7	1	4	6	3	5	6

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar a un alumno del grupo que se presentó al examen de matemática, hubiera tenido una calificación 6?

b) ¿Cuál es la probabilidad que al sacar a un alumno hubiera tenido una calificación entre 8 y 10?

5 En una clase de 27 alumnos y alumnas, por cada 5 niñas hay 4 niños. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera persona que salga al recreo, tras el profesor, sea una niña?

6 Se extrae una carta de un naipe español. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) Extraer un 7.
b) Extraer un oro.
c) Extraer un as.
d) Extraer una carta menor que 4.
e) Extraer una copa o espada.

7 Se extrae una carta de un naipe inglés (sin jockers). Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) Extraer una jota.
b) Extraer una carta menor que 5.
c) Extraer una carta mayor que 5.
d) Extraer una carta que sea múltiplo de 3.
e) Extraer una carta que no sea múltiplo de 3.

8 Se extrae una bola de una bolsa que contiene 4 bolas blancas, 5 bolas rojas y 3 bolas azules. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) Extraer una bola roja.
b) Extraer una bola blanca.
c) Extraer una bola azul.
d) Extraer una bola no blanca.
e) Extraer una bola no azul.
f) Extraer una bola no roja.

9 Se lanzan dos dados y se suman los puntos obtenidos. Completa la siguiente tabla con las sumas.

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Calcula la probabilidad que la suma de los puntos:

a) Sea igual a 9.
b) Sea igual a 3.
c) Sea igual a 12.
d) Sea menor a 7.
e) Sea a lo más 6.
f) Sea por lo menos 4.
g) ¿Cuál es la suma que tiene menor probabilidad de salir? ¿Cuál es la probabilidad?
h) ¿Cuál es la suma que tiene mayor posibilidad de salir? ¿Cuál es la probabilidad?

10 Se lanzan dos monedas y un dado. Calcula la probabilidad de que salga.

a) Cara en ambas monedas y 6 en el dado.
b) Sello en ambas monedas y número par en el dado.
c) Al menos una cara y un número menor a 6.
d) Al menos un sello y un número mayor o igual a 3.

información en los medios

TERREMOTOS

Aunque, estrictamente hablando, sismo, temblor o terremoto corresponden a un mismo fenómeno, la costumbre arraigada en Chile y en muchos países latinoamericanos tiende a llamar sismo o temblor a aquel movimiento telúrico que causa daños menores y escasas víctimas, y terremoto al que tiene una dimensión mayor en ambos sentidos.

La mayoría de los sismos aquí presentados no han sido medidos científicamente por instrumentos confiables, ya sea porque aún no existían o, como ocurrió muchas veces, porque los sismógrafos colapsaron con el movimiento, debiendo recurrirse a estimaciones según las crónicas (que no pocas veces suelen exagerar los hechos) o a registros realizados en lugares alejados de los epicentros. En algunos casos, incluso, la magnitud o intensidad ha sido asignada por servicios sismológicos extranjeros, generalmente de EE.UU.

En la presente relación el nombre de sismo, temblor o terremoto ha sido asignado en base a como han quedado registrados en los registros históricos revisados y no tienen involucrado ningún otro sentido en cuanto a magnitud o intensidad.

Según el servicio sismológico de la Universidad de Chile, los sismos más importantes y/o destructivos del siglo XX en Chile son los siguientes:

Fecha	Magnitud
16/08/1906	7,9
08/06/1909	7,6
04/10/1910	7,3
15/09/1911	7,3
29/01/1914	8,2
14/02/1917	7
20/05/1918	7,9
04/12/1918	8,2
01/03/1919	7,2
02/03/1919	7,3
10/12/1920	7,4
07/11/1922	7
10/11/1922	8,39
04/05/1923	7
15/05/1925	7,1
28/04/1926	7
21/11/1927	7,1
20/11/1928	7,1
01/12/1928	8,3

Fecha	Magnitud
19/10/1929	7,5
18/03/1931	7,1
23/02/1933	7,6
01/03/1936	7,1
13/07/1936	7,3
25/01/1939	8,3
18/04/1939	7,4
11/10/1940	7
08/07/1942	7
14/03/1943	7,2
06/04/1943	8,3
01/12/1943	7
13/07/1945	7,1
02/08/1946	7,9
19/04/1946	7,3
25/04/1949	7,3
29/05/1949	7
17/12/1949	7,8
17/12/1949	7,8

Fecha	Magnitud
29/01/1950	7
09/12/1950	8,3
06/05/1953	7,6
06/12/1953	7,4
08/02/1954	7,7
19/04/1955	7,1
08/01/1956	7,1
17/12/1956	7
29/07/1957	7
13/06/1959	7,5
21/05/1960	7,3
22/05/1960	7,3
22/05/1960	8,5
19/06/1960	7,3
01/11/1960	7,4
13/07/1961	7
14/02/1962	7,3
03/08/1962	7,1
23/02/1965	7

Fecha	Magnitud
28/03/1965	7,4
28/12/1966	7,8
13/03/1967	7,3
21/12/1967	7,5
17/06/1971	7
08/07/1971	7,5
18/08/1974	7,1
10/05/1975	7,7
29/11/1976	7,3
03/08/1979	7
16/10/1981	7,5
04/10/1983	7,3
03/03/1985	7,8
08/04/1985	7,5
05/03/1987	7,3
08/08/1987	7,1
30/07/1995	7,3
13/06/2005	7,8

Fuente: Lista completa en http://ssn.dgf.uchile.cl/home/terrem.html

Como se puede observar en la tabla la magnitud de los sismos supera los 7 grados en la escala de Richter. La escala de Richter es una escala "abierta", de modo que no hay un límite máximo teórico, salvo el dado por la energía total acumulada en cada placa, lo que sería una limitación de la Tierra y no de la Escala.

Magnitud y efectos visibles del terremoto

Magnitud en Escala Richter	Efectos del terremoto
Menos de 3,5	Generalmente no se siente, pero es registrado.
3,5 - 5,4	A menudo se siente, pero sólo causa daños menores.
5,5 - 6,0	Ocasiona daños ligeros a edificios.
6,1 - 6,9	Puede ocasionar daños severos en áreas muy pobladas.
7,0 - 7,9	Terremoto mayor. Causa graves daños demográficos.
8 o mayor	Gran terremoto. Destrucción total a comunidades cercanas.

Si volvemos a analizar la información de la tabla de la página anterior tenemos que los terremotos que se registran han causado graves daños demográficos en nuestro país.

Si aislamos la información tenemos que existen más sismos en mayo y diciembre. Existen menos terremotos en los meses de julio, agosto y septiembre.

Fuente: http://www.angelfire.com/nt/terremotos/chilehistoria.html

CHARLES FRANCIS RICHTER
(1900-1985)

El gran mérito del Dr. Charles F. Richter (del California Institute for Technology, 1935) consiste en asociar la magnitud del terremoto con la "amplitud" de la onda sísmica, lo que redunda en propagación del movimiento en un área determinada. El análisis de esta onda (llamada "S") en un tiempo de 20 segundos en un registro sismográfico, sirvió como referencia de "calibración" de la escala. Teóricamente en esta escala pueden darse sismos de magnitud negativa, lo que corresponderá a leves movimientos de baja liberación de energía.

Apliquemos

En la tabla se observan ocho terremotos de grado mayor a 8, lo cual indica que han causado un desastre total. Junto a tus compañeros averigua el epicentro de tales terremotos.

a) ¿En qué intervalo de días del mes hay más terremotos?

b) ¿Cuál es el promedio de magnitudes de terremotos del siglo XX?

c) ¿Cuál es la moda entre las magnitudes de los terremotos? Interpreta el valor.

actividades finales

1 Las siguientes medidas corresponden a las alturas en metros de 50 niños y niñas:

1,56	1,59	1,63	1,62	1,65
1,61	1,59	1,51	1,62	1,62
1,53	1,49	1,57	1,54	1,53
1,59	1,58	1,57	1,47	1,64
1,55	1,59	1,53	1,56	1,53
1,47	1,57	1,60	1,54	1,56
1,50	1,62	1,59	1,62	1,54
1,68	1,52	1,62	1,59	1,49
1,65	1,53	1,59	1,56	1,54
1,58	1,52	1,63	1,56	1,62

a) Construye una distribución de frecuencias absolutas y relativas.

b) Obtén las correspondientes distribuciones de frecuencias acumuladas.

c) Representa las distribuciones anteriores mediante histogramas.

d) Dibuja los correspondientes polígonos de frecuencias.

e) Encuentra, a partir del polígono de frecuencias acumuladas, la proporción de observaciones entre 1,57 m y 1,66 m ambas inclusive.

f) ¿Qué conclusiones puedes obtener de lo anterior?

2 En una ciudad existen 3 grandes plantas de fabricación de automóviles que llamaremos A, B y C. La primera emplea a 542 personas y su salario medio es de 1 500 euros. En la segunda trabajan 843 empleados y su ingreso medio es de 1 200 euros. Finalmente, la paga media de los 1 538 trabajadores de C es de 1 000 euros. ¿Cuál es el salario medio de los empleados en la industria del automóvil de dicha ciudad?

3 Analiza el siguiente comentario: "La mejor medida de tendencia central es la media aritmética, por eso la utilizaremos siempre salvo que no se conozcan los valores extremos de la variable".

4 La siguiente tabla de frecuencia resume los datos de las precipitaciones, anuales en m^3 , de agua lluvia caída, por año, en los primeros cincuenta años del siglo pasado (1901-1950) sobre la ciudad de Valparaíso.

a) Completa la siguiente tabla:

Precipitación m^3	Marca de clase	Número de años	Porcentaje de años	Número acumulado de años	Porcentaje acumulado de años
67.75 -		6			
-460.95			48		
					84
				45	
		1			
Total					

b) Determina la media, moda y mediana de las precipitaciones.

5 Un grupo de 80 estudiantes tiene 35 hombres. En un test, el puntaje medio de las mujeres fue de 70 puntos y del grupo completo fue 66,5 puntos.

a) Determina el puntaje medio de los hombres.

b) Si se cambia la escala de puntajes mediante la transformación $\mathbf{Y_i} = 2\mathbf{X_i} - 5$ ($\mathbf{X_i}$: puntaje antiguo, $\mathbf{Y_i}$ puntaje nuevo), determina el nuevo puntaje medio de hombres, mujeres y el grupo completo.

c) Comprueba que si se aplica la transformación al puntaje medio del grupo total (66,5) se obtiene el mismo resultado que si se calcula el puntaje medio del grupo total transformado, como promedio ponderado de los puntajes transformados de hombres y mujeres (trata de comprobar esta propiedad en forma general).

6 Se desea estudiar la composición del agua de un lago para lo cual el lago se divide en dos zonas: Costa y Centro del lago. El lago se cuadricula en 2 800 cuadrículas de igual tamaño de las cuales se escogen aleatoriamente 80 en la zona Costa y 60 en la zona Centro. En cada una de las cuadrículas escogidas se mide el contenido de cierta sustancia tóxica (en ppm), el contenido de oxígeno (en mL/100mL) y el número de larvas de peces. Además se anota el color y calidad de transparencia del agua en la cuadrícula.

a) Indica cuál es la población en estudio y cuáles y cuántos son los elementos de esta población.

b) ¿Qué tipo de muestreo se usó?

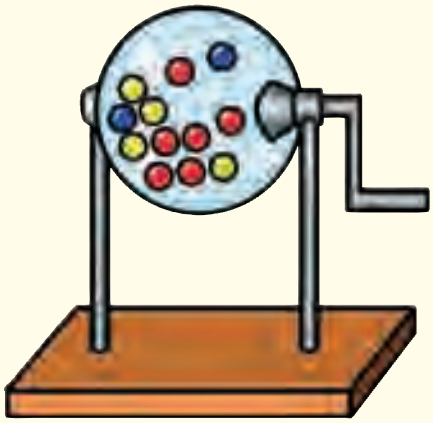
7 En un programa de mejoramiento continuo, que se ha implementado en una empresa, se ha diseñado un plan para controlar el proceso de fabricación de un horno de microondas de alta fidelidad. Desde la línea de despacho, donde los productos egresan uno a uno, se selecciona cada dos horas una muestra aleatoria de diez equipos los cuales son enviados a distintas áreas donde son calificados, entre otras características, el estado de las bisagras de las puertas, las dimensiones del eje del plato de montaje al interior del horno, el voltaje de salida, la temperatura al interior del equipo después de dos minutos de trabajo, la radiación emitida, tanto con la puerta abierta como con la puerta cerrada y el color del horno. Entonces:

a) Determina la población y la unidad estadística correspondiente.

b) Indica el plan de muestreo utilizado. Justifica brevemente tu respuesta.

8 Abel y Rosa juegan tirando un dado. Si sale un 5 gana Abel y si sale menos de 3 gana Rosa. Aproximadamente, ¿cuántas veces habrá ganado cada uno, después de tirar el dado 30 veces?

9 Observa la siguiente tómbola:



a) Determina la probabilidad de sacar una bola roja.

b) Determina la probabilidad de sacar una bola azul.

c) Determina la probabilidad de sacar una bola que no sea amarilla.

d) Determina la probabilidad de sacar una bola que no sea blanca.

10 Se toma un número comprendido entre 0 y 999.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea múltiplo de 5?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la cifra central sea mayor que las otras dos?

11 Se lanza una moneda tres veces seguidas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 caras?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener más caras que cruces?

12 Carmen y Daniel han inventado un juego de dados con las siguientes reglas:

- Lanzan dos dados simultáneamente y calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor.
- Si resulta una diferencia de 0, 1 ó 2 entonces Carmen gana 1 ficha.
- Si resulta 3, 4, ó 5 es Daniel quien gana una ficha.
- Comienzan con un total de 20 fichas y el juego termina cuando no quedan más.

¿Te parece que este juego es equitativo? Si tuvieras que jugar, ¿cuál jugador preferirías ser? ¿Cuántas fichas debería ganar cada jugador para que el juego sea equitativo sin cambiar el resto de las reglas?

13 Las siguientes son calificaciones de 5 cursos:

N1	N2	N3	N4	N5
45	49	67	60	67
54	54	57	62	67
40	51	70	64	65
54	55	67	66	65
68	70	70	70	67
53	62	58	60	69
64	50	65	63	70
57	51	62	62	67
46	63	65	68	65
45	38	60	55	50
55	50	56	56	57
60	62	62	55	70
52	53	65	66	67
51	60	65	59	70
49	65	65	70	62
70	62	67	68	70
70	70	50	68	70
23	61	62	64	70
61	55	62	59	70
55	38	58	63	70
60	60	70	55	70

a) Determina las medidas de tendencia central de cada curso.

b) Haz una tabla de distribución para cada curso, ayúdate con Excel.

c) Determina los polígonos de frecuencia de cada curso.

d) Haz los gráficos de caja de cada curso.

e) ¿En qué curso hay mayor variabilidad y dispersión?

f) ¿En qué curso hay mayor homogeneidad en las calificaciones?

g) Si se extrae un alumno del curso N1, ¿cuál es la probabilidad que el alumno que se extraiga tenga una calificación entre 4 y 5?

14 Se selecciona una carta al azar entre 50 cartas enumeradas (1 al 50)

a) Encuentra la probabilidad de que el número de la carta sea divisible por 5.

b) Encuentra la probabilidad de que el número de la carta sea un número primo.

c) Encuentra la probabilidad de que el número de la carta termine en 2.

d) Encuentra la probabilidad de que el número de la carta sea menor que 15.

e) Encuentra la probabilidad de que el número de la carta sea el 50.

15 De los 10 niños de una clase, 3 tienen ojos azules. Si se escoge dos niños al azar, ¿cuál es la probabilidad de que:

a) Los 2 niños tengan los ojos azules.

b) Ninguno tenga ojos azules.

c) Por lo menos 1 tenga ojos azules.

16 De un total de 14 números 6 de ellos son positivos y el resto es negativo, se eligen 4 números al azar y se multiplican entre ellos calcula:

a) Cuál es la probabilidad de que el producto sea un número positivo.

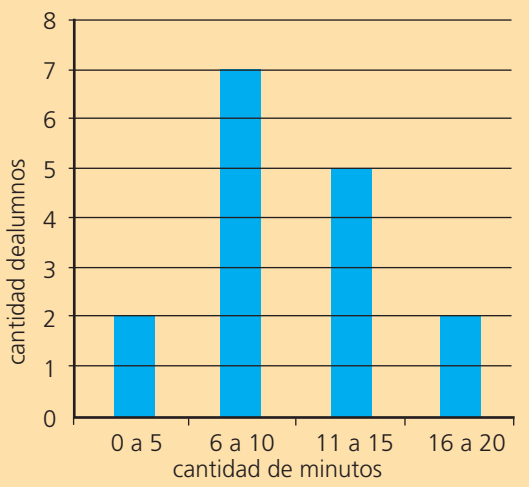
b) Cuál es la probabilidad de que el producto sea un número negativo.

c) Considera el evento A: Que solo se extraen 3 números, cuál es la probabilidad de que el producto sea un número positivo.

d) Considera el evento B: Que solo se extraen 2 números, cuál es la probabilidad de que el producto sea un número negativo.

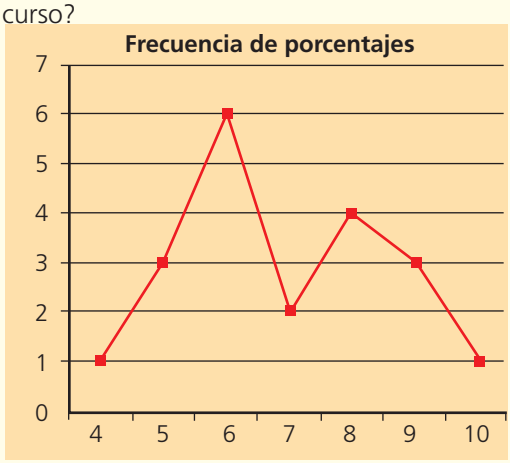
autoevaluación

1 El gráfico muestra el tiempo que demoran los alumnos en trasladarse de la casa a la escuela. ¿Cuántos niños se demoran más de 10 minutos?



a) 2
b) 5
c) 7
d) 8
e) 15

2 **[TIMSS]** El siguiente polígono de frecuencia muestra los puntajes obtenidos en un test por un curso. ¿Cuál es la media de puntajes del curso?



a) 6
b) 8
c) 6,2
d) 6,9
e) 5

3 **[TIMSS]** En un curso hay 30 alumnos. La probabilidad de seleccionar a un alumno del curso y que sea menor a 13 años es de $\frac{1}{5}$. ¿Cuántos estudiantes en la clase son menores a 13 años?

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

4 **[TIMSS]** En una escuela hay entre niños y niñas 1 200 estudiantes. Se obtiene una muestra de 100 estudiantes representativa de la población. Si 45 de los alumnos de la muestra son niños. ¿Cuál sería la cantidad total de niños en la escuela?

a) 450
b) 500
c) 540
d) 600
e) 660

5 **[TIMSS]** En una bolsa se ponen 11 fichas, las cuales tienen marcadas los números 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 18, y 20. Si Amaru saca una ficha de la bolsa sin mirar. ¿Cuál es la probabilidad que Amaru saque una ficha con un número que sea múltiplo de tres?

a) $\frac{1}{11}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{4}{11}$
d) $\frac{4}{7}$
e) 1

1er Año Medio

MATEMÁTICA

Texto para el Estudiante

Andrés Ortiz Jiménez
Profesor de Matemática.
Licenciado en Educación.
Magister en Enseñanza de las Ciencias.
Facultad de Educación, Universidad de Concepción.

Cristián Reyes Reyes
Doctor en Matemática.
Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile.

Marisol Valenzuela Chandía
Profesora de Matemática.
Facultad de Filosofía y Humanidades.
Licenciada en Matemática.
Facultad de Ciencias, Universidad de Chile.
Coordinadora de Ciencias y Matemáticas EDUCAUC.

Eugenio Chandía Muñoz
Magíster en Educación.
Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile.

McGraw-Hill Interamericana

SANTIAGO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID
MÉXICO • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SÂO PAULO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TORONTO

Matemática 1° Año Medio
Texto para el Estudiante

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro ni su tratamiento informático ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, tal sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otro método sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

DERECHOS RESERVADOS © 2012.

McGRAW-HILL / INTERAMERICANA DE CHILE LTDA.
Evaristo Lillo 112 - Piso 7, Las Condes.
Tel: 562- 661 3000
Santiago de Chile.

Autores
Andrés Ortiz Jiménez.
Cristián Reyes Reyes.
Marisol Valenzuela Chandía.
Eugenio Chandía Muñoz.

Editora
Paola González M.

Correción de estilo
Patricia Romero M.

Coordinadora de arte
Pamela Madrid F.

Portada
Pamela Madrid F.

Ilustraciones
Felipe Tapia R.
Cristián "Chamán" González & Carlos "Vieje" Carrasco (Invasor Studio)

Archivo gráfico
Banco de fotografía McGraw-Hill.

La materialidad y fabricación de este texto está certificada por el IDIEM – Universidad de Chile.

ISBN: 978-956-278-222-7
N° de Inscripción: 186.066

Impreso en Chile por: RR Donnelley Chile.
Se terminó de imprimir esta reimpresión de la primera edición de 250.000 ejemplares,
en el mes de noviembre de 2012.

Estimado alumno, alumna

Este libro pretende ayudarte a abrir las puertas al conocimiento matemático, pero la llaves de esas puertas las tienes tú y son el trabajo, la reflexión, la investigación y la falta de temor a hacerse todas las preguntas por absurdas que parezcan en primera instancia. Preguntas como: ¿es el cero un número par?, ¿puedo llenar con baldosas hexagonales todo el plano? Parecen triviales, pero sin duda te llevarán a definiciones precisas y propiedades que al tenerlas claras podrás resolver las dudas.

Las matemáticas poseen verdad. Si los triángulos rectángulos los entendemos como hoy lo hacemos, entonces el teorema de Pitágoras es cierto; hoy y para siempre. Si tú demuestras un resultado matemático, por ejemplo, que la suma de dos números pares es un número par, nadie puede decirte que ese resultado es falso, y si tu demostración alguien la entiende, no puede decirte no te creo, no es un asunto de fe, es matemática. Esta es una razón para hacer o conocer las demostraciones, para dejar por sentada la veracidad de un resultado. Además, las demostraciones te permiten desarrollar habilidades de razonamiento matemático referidas a la argumentación, para ello es necesario que tu comunicación sea clara. En este texto encontrarás varias invitaciones y pistas para hacer y seguir demostraciones. También te entregamos diferentes estrategias para enfrentar estas pruebas.

La matemática además nos permite aproximarnos a la realidad y así lograr una mayor comprensión de la misma. Mediante modelos matemáticos podemos inferir conclusiones referentes a procesos de la realidad, de las ciencias sociales y naturales, además podemos anticipar resultados que nos ayuden a tomar decisiones con mayor certeza. En este libro encontrarás problemas que te invitan a presentar un modelo algebraico, reconociendo variables y sus relaciones que te ayudan a comprender el problema real.

Las actividades de este libro están dirigidas a lograr un conocimiento profundo de las ideas matemáticas que desarrollarás en él. Estas actividades están enmarcadas en contextos reales, informaciones obtenidas de diferentes medios: periódicos, Internet, artículos de organizaciones de salud, medioambientales, etc.

En definitiva, este texto lo hicimos pensando en ti, pensando en que logres un conocimiento significativo de las matemáticas, para que descubras su belleza y utilidad. Motivados por el respeto y cariño al conocimiento es que queremos que con esta obra descubras, a tu ritmo, los conocimientos y desarrolles las habilidades necesarias para hacer de ti un ciudadano crítico, investigador, "preguntón", y que, por sobre todo, intentes dar tus propias respuestas y argumentos. Esperamos que te sea útil y que con la ayuda de tu profesor, uses la llave para abrir la puerta del conocimiento matemático, lo aprecies y lo utilices en diversas situaciones.

Los autores.

Este libro pertenece a:

Nombre: _____

Curso: _____

Colegio: _____

Te lo ha hecho llegar gratuitamente el Ministerio de Educación a través del establecimiento educacional en el que estudias.
Es para tu uso personal tanto en tu colegio como en tu casa; cuídalo para que te sirva durante todo el año.
Si te cambias de colegio lo debes llevar contigo y al finalizar el año, guardarlo en tu casa.

• INDICE DE CONTENIDOS •

Unidad 1

NÚMEROS 8

Para recordar 10
1. Potencias de base positiva y exponente entero. 11
2. Propiedades de las potencias 13

Problema resuelto 15

Aplicando lo aprendido 17
3. Notación decimal 18
4. Notación científica 19

Información en los medios 22

Aplicando lo aprendido 23
5. Número racionales v/s números irracionales 24
Suma y productos de números racionales 25
Un número no racional 27
Notación decimal de los números racionales 29

Aplicando lo aprendido 30
Transformación de notación decimal a fraccionaria 32

Aplicando lo aprendido 36

Un poco de historia:
Los números irracionales 37

Aplicando lo aprendido 39
6. Aproximaciones 42
7. Regularidades numéricas 44

Aplicando lo aprendido 49

Actividades finales 50

Autoevaluación 53

Unidad 2

ÁLGEBRA 54

Para recordar 56
1. Variables 57

Aplicando lo aprendido 61
2. Términos semejantes 62

Aplicando lo aprendido 63
3. Potencias en álgebra 64

Aplicando lo aprendido 68
4. Igualdades y ecuaciones 69

Problema resuelto 71

Problema resuelto 72

Información en los medios 73

Aplicando lo aprendido 75
5. Generalidades numéricas 77

Aplicando lo aprendido 82
6. Patrones 84

Problema resuelto 86

Aplicando lo aprendido 87

Un poco de historia: Los polinomios 88
7. Producto de polinomios 89

Aplicando lo aprendido 92
8. Factorización: primera parte 93
9. Sigamos distribuyendo 95

Aplicando lo aprendido 96
10. Productos notables: el cuadrado del binomio . . . 97
11. La suma por la diferencia 98

Aplicando lo aprendido 99
12. Factorización: segunda parte 100
13. El cuadrado es lo máximo 101
14. Demostración del Teorema de Pitágoras 103

Información en los medios 105
15. Función lineal y función afín 106

Aplicando lo aprendido 109
16. Función 110

Aplicando lo aprendido 113
17. Gráfico de una función afín 114
18. Interpretación de gráficos 118

Actividades finales 120

Autoevaluación 125

Unidad 3

GEOMETRÍA 126

Para recordar 128
1. Ubiquémonos en un sistema de referencia 129
2. Figuras en el Plano Cartesiano 131
3. Visualización del Plano Cartesiano con Geogebra 132

Aplicando lo aprendido 133
4. Mingaco de traslado 134
Composición de traslaciones 137

Aplicando lo aprendido 139
5. Reflexiones 140
6. Figuras simétricas 142

Aplicado lo aprendido 143
7. Rotaciones 144
8. ¿Cómo rotar un punto? 146
9. Composición de isometrías 147
10. ¿Qué pasa con la composición de reflexiones? 149

Aplicando lo aprendido 150
11. Teselaciones regulares 154
12. Vitral 157

Aplicado lo aprendido 158
13. Congruencias 159

Aplicado lo aprendido 163
14. Triángulos congruentes 164

Aplicado lo aprendido 167
15. Aplicaciones geométricas 168

Problema resuelto 170
16. Programas computacionales 171
17. Puzles geométricos 172

Aplicando lo aprendido 173

Un poco de historia:
Euclides y sus elementos 174

Información en los medios 176

Actividades finales 178

Autoevaluación 181

Unidad 4

DATOS Y AZAR 182

Para recordar 184
1. ¿Qué dice? 185
2. Acumulado 188
3. Si tengo información, ¿cómo la presento? 189
4. ¿Qué se puede hacer con Excel? 191

Aplicando lo aprendido 194
5. ¿Quién debe representar a los datos? 195
6. Medida de posición 198

Problema resuelto 199

Aplicando lo aprendido 200
7. ¿Se cumple para toda la población? 201
Método de selección de la muestra 202
8. El error muestral y el tamaño de la muestra . . . 204
9. Simetría y dispersión de datos 205
10. Variabilidad en los gráficos 206
11. ¿Cuál es la probabilidad de la frecuencia? 207
12. Problemas complementarios con las probabilidades 209
13. Árbol de probabilidades 210
14. Contando las probabilidades 211

Un poco de historia:
La estadística 212

Un poco de historia:
Probabilidad en la historia 213

Aplicando lo aprendido 214

Información en los medios 216

Actividades finales 218

Autoevaluación 221

Solucionario 222

• ESTRUCTURA GRÁFICA •

Inicio de Unidad

Nombre de la Unidad.

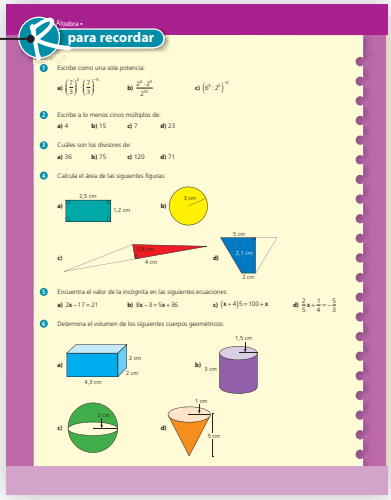
Número de la Unidad.

Esquema representativo de la relación entre los contenidos de la unidad y las metas de tu aprendizaje.

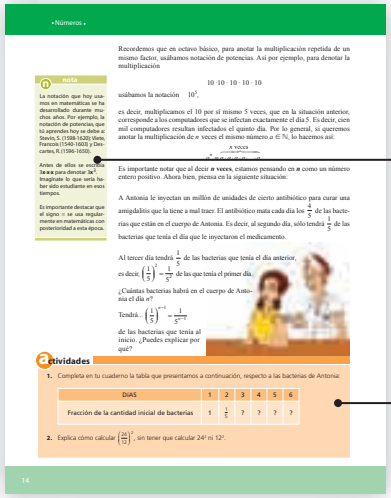
Texto introductorio a los contenidos de la unidad.

Desarrollo de contenidos

Para recordar
Desarrollando estos ejercicios activarás tus conocimientos previos.

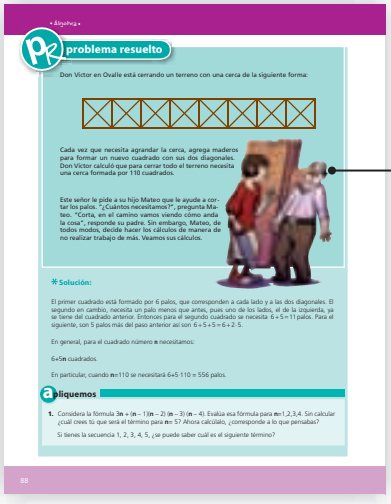


Nota
Destaca ciertos conceptos que debes tomar en cuenta para una mejor comprensión.



Actividades
Propuesta de desarrollo de habilidades página a página. **Encontrarás algunas marcadas con asterisco (*), que representarán un desafío para tí.**

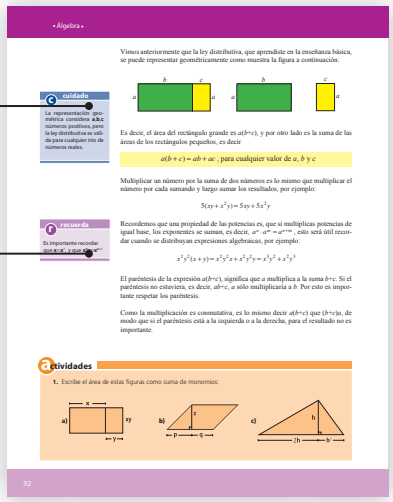
Información en los medios
Extractada de diversos medios de comunicación, la que podrás comprender con la ayuda de la matemática.

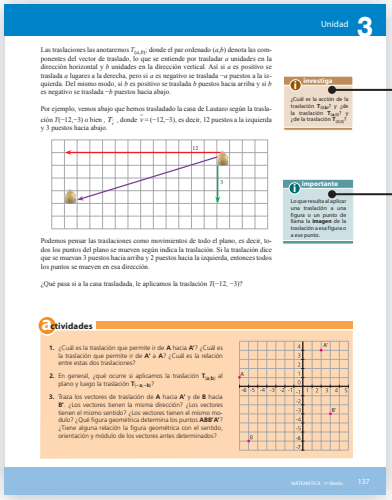


Problema resuelto
Es un ejemplo de solución de problemas propuestos, que entrega un método de resolución.

Cuidado
Alerta sobre posibles errores o ambivalencias respecto de un concepto.

Recuerda
Sección que te ayuda a recordar lo que has visto en años anteriores.

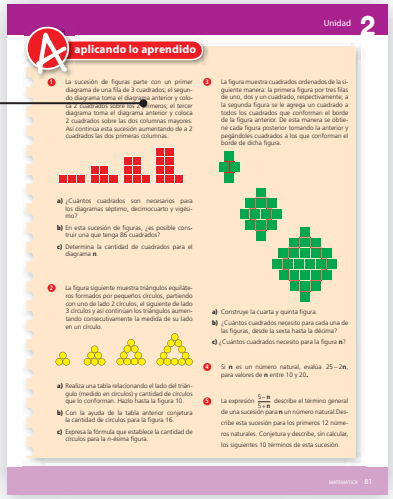


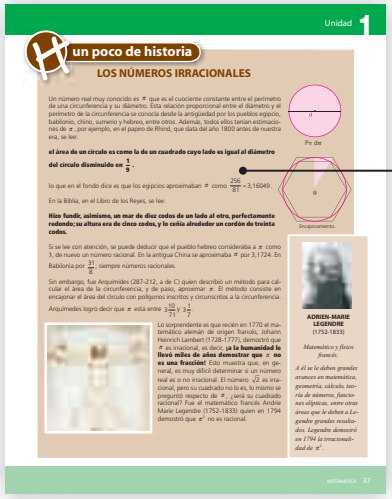


Investiga
Te invita a indagar sobre diversos temas.

Importante
Sección que enfatiza algún concepto importante tratado en la página.

Aplicando lo aprendido
Profundiza, apoya y confirma tus conocimientos por medio de la aplicación práctica de los contenidos. Encontrarás ejercicios marcados con asterisco (*), que representarán un desafío para tí.





Un poco de historia
Sección que te entrega una visión histórica de cómo se ha formado la matemática.

Cierre de Unidad

Actividades finales
Ejercicios graduados de transferencias de aprendizajes. **Encontrarás algunos marcados con asterisco (*), que representarán un desafío para tí.**

Autoevaluación
Propuesta de evaluación de tus conocimientos de la Unidad.