



Cuaderno de ejercicios

# MATEMÁTICA

Jaqueline Vallejos Pinochet • Margarita Cortés Toledo  
Marta Díaz Díaz • Verónica Muñoz Correa



EDICIÓN ESPECIAL PARA EL  
MINISTERIO DE EDUCACIÓN  
PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN



Cuaderno de ejercicios

# MATEMÁTICA



**Jaqueline Vallejos Pinochet**  
Licenciada en Educación Matemática  
Universidad Metropolitana de Ciencias de  
la Educación

**Margarita Cortés Toledo**  
Profesora de Matemática y Estadística  
Universidad Central de Chile

**Marta Díaz Díaz**  
Profesora de Matemática  
Universidad Católica Cardenal Raúl Silva Henríquez

**Verónica Muñoz Correa**  
Profesora de Matemática  
Pontificia Universidad Católica de Chile

El **Cuaderno de ejercicios Matemática 2.º medio**, es una creación del Departamento de Estudios pedagógicos de Ediciones SM, Chile.

**Dirección editorial**

Arlette Sandoval Espinoza

**Coordinación editorial**

María José Martínez Cornejo

**Coordinación área Matemática**

Carla Frigerio Cortés

**Edición**

Verónica Muñoz Correa

**Autoría**

Jaqueline Vallejos Pinochet

Margarita Cortés Toledo

Marta Díaz Díaz

Verónica Muñoz Correa

**Corrección de estilo y prueba**

Víctor Navas Flores

**Desarrollo de solucionario**

José Antonio Romante Flores

Sergio Muñoz Venegas

**Coordinación de diseño**

Gabriela de la Fuente Garfías

**Diseño de portada**

Estudio SM

**Diseño y diagramación**

Madelaine Inostroza Vargas

**Ilustración de portada**

Estevan Silveira

**Fotografías**

Shutterstock

**Jefatura de producción**

Andrea Carrasco Zavala

Este cuaderno corresponde al Segundo año de Enseñanza Media y ha sido elaborado conforme al Decreto Supremo N° 614/2013, del Ministerio de Educación de Chile.

©2017 – Ediciones SM Chile S.A. – Coyancura 2283 piso 2 – Providencia  
ISBN: 978-956-363-295-8 / Depósito legal: 280417

Se terminó de imprimir esta edición de 217.197 ejemplares en el mes de enero del año 2018.  
Impreso por A Impresores

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del "Copyright", bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución en ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo público.

# ÍNDICE

## UNIDAD 1

- **Números** ..... 4
- Lección 1 - Números reales ..... 5
  - ¿Existen números que no sean racionales? ..... 6
  - ¿Cómo se ordenan y aproximan los números irracionales? ..... 8
  - ¿Cómo se puede calcular con números reales? ..... 10
- ¿Cómo voy? Evaluación de proceso ..... 12
- Lección 2 - Raíces enésimas y logaritmos ..... 14
  - ¿Cuáles son las raíces enésimas? ..... 15
  - ¿Qué representan las potencias de exponente fraccionario? ..... 17
  - ¿Qué son los logaritmos? ..... 19
- Herramientas tecnológicas:
  - Uso de hoja de cálculo ..... 21
  - ¿Cuáles son las propiedades de los logaritmos? ..... 23
- Taller de habilidades ..... 25
- ¿Cómo voy? Evaluación de proceso ..... 26
- Matemática en acción ..... 28
- Sintetizo mis aprendizajes ..... 29
- ¿Qué aprendí? Evaluación final ..... 32

## UNIDAD 2

- **Álgebra y funciones** ..... 36
- Lección 3 - Cambio porcentual ..... 37
  - ¿Qué se entiende por cambio porcentual? ..... 38
  - ¿En qué se aplica el interés compuesto? ..... 40
- ¿Cómo voy? Evaluación de proceso ..... 42
- Lección 4 - Ecuaciones cuadráticas ..... 44
  - ¿Cuándo se dice que una ecuación es cuadrática? ..... 45
  - ¿En qué consiste la resolución por factorización? ..... 47
  - ¿Cuál es el algoritmo para completar el cuadrado? ..... 49
  - ¿Cómo se aplica la fórmula general? ..... 51
- ¿Cómo voy? Evaluación de proceso ..... 54
- Lección 5 - Funciones cuadráticas ..... 56
  - ¿Cuándo se dice que una función es cuadrática? ..... 57
  - ¿Cómo se interpretan los parámetros de la gráfica? ..... 59
- Herramientas tecnológicas: Uso de GeoGebra ..... 61
- ¿Cómo cambia la gráfica según cada parámetro? ..... 63
- ¿En qué se aplican las funciones cuadráticas? ..... 66
- ¿Cómo voy? Evaluación de proceso ..... 68
- Lección 6 - Función inversa ..... 70
  - ¿Cuándo una función tiene función inversa? ..... 71
- Taller de Habilidades ..... 73
  - ¿Cómo se relaciona la gráfica de una función y la de su inversa? ..... 74
  - ¿Cómo es la función inversa de funciones lineales y afines? ..... 76

## UNIDAD 3

- ¿Cuál es la función inversa de la función cuadrática? ..... 78
- ¿Cómo voy? Evaluación de proceso ..... 80
- Matemática en acción ..... 82
- Sintetizo mis aprendizajes ..... 83
- ¿Qué aprendí? Evaluación final ..... 86
- **Geometría** ..... 90
- Lección 7 - La esfera ..... 91
  - ¿Qué es una esfera? ..... 92
  - ¿Cómo se calcula el volumen de la esfera? ..... 94
  - ¿Cómo se calcula el área de la esfera? ..... 96
  - ¿Cómo voy? Evaluación de proceso ..... 98
- Lección 8 - Razones trigonométricas ..... 100
  - ¿Qué son las razones trigonométricas? ..... 101
- Taller de habilidades ..... 104
- Herramientas tecnológicas:
  - Uso de la calculadora ..... 105
  - ¿En qué se aplican las razones trigonométricas? ..... 107
  - ¿Cómo se determinan las componentes de un vector? ..... 109
- ¿Cómo voy? Evaluación de proceso ..... 112
- Matemática en acción ..... 114
- Sintetizo mis aprendizajes ..... 115
- ¿Qué aprendí? Evaluación final ..... 118

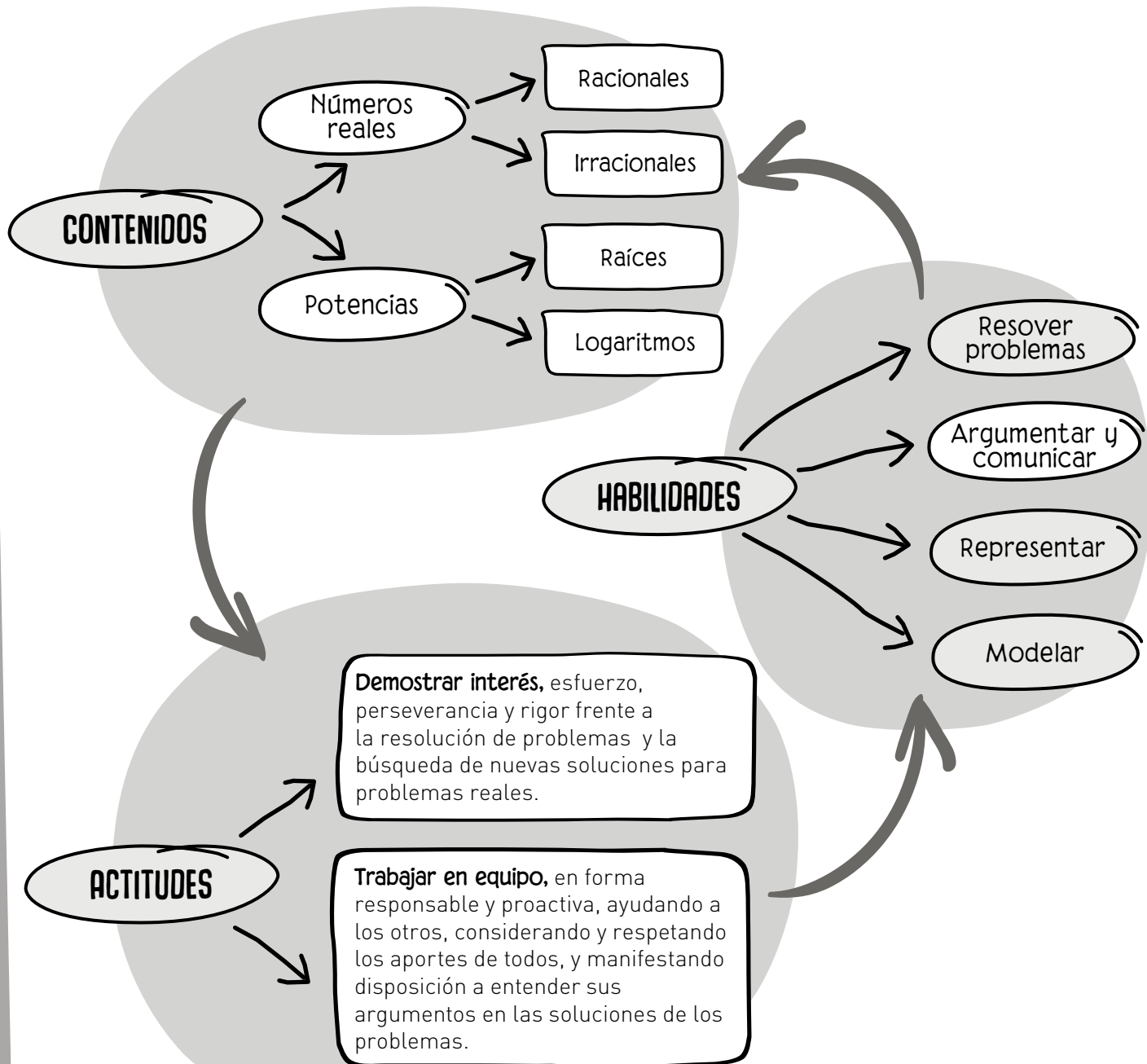
## UNIDAD 4

- **Probabilidad y estadística** ..... 122
- Lección 9 - Técnicas de conteo ..... 123
  - ¿Cuándo se aplica el principio multiplicativo? ..... 124
  - ¿Qué son las permutaciones y las combinaciones? ..... 126
  - ¿En qué se aplican las combinaciones? ..... 128
- ¿Cómo voy? Evaluación de proceso ..... 130
- Lección 10 - Variable aleatoria ..... 132
  - ¿Qué es una variable aleatoria? ..... 133
  - ¿Cuál es la probabilidad de una variable aleatoria? ..... 135
  - ¿Cómo se grafica la distribución de una variable aleatoria? ..... 137
- Herramientas tecnológicas:
  - Uso de hoja de cálculo ..... 140
- ¿Cómo voy? Evaluación de proceso ..... 142
- Lección 11 - Probabilidades ..... 144
  - ¿Cómo se aborda la probabilidad en los medios de comunicación? ..... 145
  - ¿Cómo se aplica la probabilidad en la toma de decisiones? ..... 147
  - ¿Cómo puede interpretarse la probabilidad? ..... 149
- Taller de habilidades ..... 151
- ¿Cómo voy? Evaluación de proceso ..... 152
- Matemática en acción ..... 154
- Sintetizo mis aprendizajes ..... 155
- ¿Qué aprendí? Evaluación final ..... 158
- Solucionario** ..... 162



# NÚMEROS

Antes de comenzar a trabajar, observa el siguiente esquema que muestra los principales conceptos que estudiarás en esta unidad, las habilidades que desarrollarás y las actitudes que deberás mantener para alcanzar tus metas.



## Números reales

Repasa algunos contenidos que utilizarás durante esta lección.

- 1 Completa la tabla con “ $\in$ ” (pertenece) o “ $\notin$ ” (no pertenece) según corresponda a cada número dado.

	N	Z	Q
100			
$\frac{1}{5}$			
-46			
-0,8			
7			
$0,6\bar{4}$			
0			

- 2 Resuelve los siguientes ejercicios respetando las reglas de la prioridad de las operaciones y paréntesis.

- $(-34 : 17) - (-16 : 6) + 7 =$  \_\_\_\_\_
- $12 - [8 - (5 - 7) : 5 + 2] =$  \_\_\_\_\_
- $8 - (3 - 6) + 3[5(4 - 6) + 12 : 6] =$  \_\_\_\_\_
- $[(-6 + 4) - 6 - (-4 - 10)] : -2 =$  \_\_\_\_\_
- $3 - [-2 + 3 - (4 - 57)] - 7 + [-6 - (56 - 1) + 3] =$  \_\_\_\_\_
- $-5 \cdot [12 - (-3) \cdot (15 - (12 : (-6)))] =$  \_\_\_\_\_
- $-3 \cdot ((-6) - 10) : (-2) \cdot ((-5) - (-3)) =$  \_\_\_\_\_

- 3 Completa los cuadrados mágicos de modo que la suma de cada fila, columna y diagonal sea siempre la misma.

a.

3	-10	
	-1	
		-5

b.

7		5
	8	
11		9

c.

0	6	-3
		2

- 4 Resuelve los siguientes ejercicios de operatoria de fracciones.

- $0,3 - \frac{3}{5} - \frac{5}{15} - (-0,5) =$
- $\frac{-6}{11} : -0,4\bar{5} + 3 =$
- $-0,6 \cdot \frac{1}{48} : \frac{-1}{64} \cdot 1,3 =$
- $(-\frac{2}{3} + -\frac{6}{8}) : 2,125 \cdot -0,25 =$
- $(0,75 : \frac{1}{5} - \frac{2}{5} : \frac{7}{6}) \cdot (\frac{2}{5} + 0,1) =$

Para agregar nuevos conjuntos numéricos es conveniente que recuerdes los que ya conoces.

Si quieres operar con números reales, recuerda cómo resolver ejercicios y problemas con números enteros.

Además repasa las operaciones con fracciones y decimales positivos y negativos.

➔ Tema 1 ¿Existen números que no sean racionales?

Practico

1 Expresa las siguientes fracciones propias como número decimal.

a.  $\frac{2}{15} =$  \_\_\_\_\_

b.  $\frac{1}{7} =$  \_\_\_\_\_

c.  $-\frac{3}{8} =$  \_\_\_\_\_

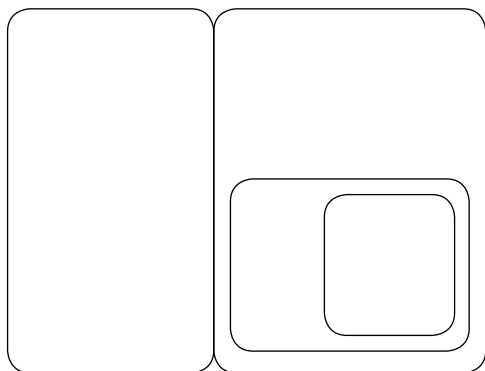
d.  $\frac{25}{73} =$  \_\_\_\_\_

e.  $\frac{16}{27} =$  \_\_\_\_\_

f.  $\frac{1}{47} =$  \_\_\_\_\_

g.  $\frac{3}{7} =$  \_\_\_\_\_

2 Escribe el nombre de cada conjunto numérico en el siguiente diagrama y ubica los números dados en el conjunto correspondiente.



a. 0,2385654...

b.  $\frac{1}{4}$

c. 5

d. -9

e.  $2,9\overline{8}$

f.  $\sqrt{6}$

g.  $0,8\overline{42}$

3 Une con una flecha cada expresión con el conjunto al que corresponde su valor.

a.  $1 + \sqrt{7}$

b.  $\sqrt{4}$

c.  $5\pi$

d. 5,98

e.  $0,3\overline{45}$

f. 7

g.  $3 + \pi$

Racionales

Irracionales

4 Analiza las siguientes expresiones, sabiendo que "a" es un número par positivo. Luego, marca con una X las que representan siempre un número irracional.

a.  $\frac{\sqrt{a}}{a}$  \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt{\frac{a}{2a}}$  \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$  \_\_\_\_\_

d.  $\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$  \_\_\_\_\_

e.  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{16}$  \_\_\_\_\_

f.  $2\sqrt{81a}$  \_\_\_\_\_

g.  $\sqrt{a} + \sqrt{a}$  \_\_\_\_\_

5 Analiza cada afirmación. Luego, escribe V o F según corresponda.

a. (\_\_\_\_) 0,34343434... es un irracional si se mantiene el patrón.

b. (\_\_\_\_) Todo número irracional es un entero.

c. (\_\_\_\_)  $\mathbb{Q} - \mathbb{I} = \emptyset$

d. (\_\_\_\_) Todo número entero es un racional.

e. (\_\_\_\_) Todo número natural es un irracional.

f. (\_\_\_\_)  $\frac{225}{15}$  es un número entero.

g. (\_\_\_\_)  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \emptyset$

## Me desafío

- 1** Analiza las siguientes situaciones y establece en cuál de ellas el resultado es un número irracional. Justifica tu respuesta dando un contra ejemplo cuando tu respuesta sea negativa.
- a. La suma de un número irracional y un número racional es un número racional.  
R: \_\_\_\_\_
- b. La resta de dos números irracionales siempre es un número irracional.  
R: \_\_\_\_\_
- c. El cociente de dos números irracionales es un número irracional.  
R: \_\_\_\_\_
- d. El producto de un número racional y un número irracional siempre es un número irracional.  
R: \_\_\_\_\_
- e. El cociente entre un número natural impar y un número irracional es siempre un número irracional.  
R: \_\_\_\_\_
- f. Si  $a$  y  $b$  son siempre números pares y  $b$  es mayor o igual a cero, la expresión  $a\sqrt{b}$  es siempre un número irracional.  
R: \_\_\_\_\_
- g. En el Partenón de Atenas la razón entre la medida de su altura y su ancho es igual al número  $\varphi$ , también conocido como el número de oro. Si las medidas de la altura y el ancho son aumentadas en 5 m de distancia, su razón sigue siendo igual a  $\varphi$ .  
Recuerda que  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .  
R: \_\_\_\_\_
- 2** Hipaso, un estudiante de Pitágoras, murió ahogado cuando fue tirado por la borda de un barco porque decía que la diagonal de un cuadrado de lado 1 era un número de expansión infinita (no periódica). Pitágoras no podía aceptar la existencia de números irracionales, porque creía que todos los números tienen valores perfectos. Calcula la diagonal del cuadrado de lado 1 y averigua quién tenía la razón.  
R: \_\_\_\_\_
- 3** Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado "a". ¿Esta medida es un número racional o irracional?  
R: \_\_\_\_\_
- 4** Si la arista de un cubo mide 20 cm, calcula la medida de su volumen y su diagonal. ¿Son estas medidas números irracionales?  
R: \_\_\_\_\_
- 5** El número  $\pi$  es número irracional que se obtiene de la razón entre la longitud de una circunferencia y su radio. ¿Cuál es la longitud de una circunferencia de radio igual a 1?  
R: \_\_\_\_\_
- 6** ¿Qué propiedades cumplen los números irracionales con la adición y multiplicación? Argumenta cada una con un ejemplo.
- Clausura  
Conmutatividad  
Asociatividad  
Elemento neutro  
Elemento inverso
- 7** Demuestra que  $\varphi^2 = \varphi + 1$ .  
R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_



→ Tema 2 ¿Cómo se aproximan y ordenan los números irracionales?

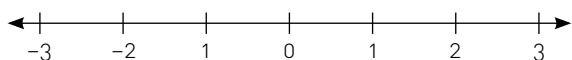
Practico

1 Calcula el valor aproximado de las siguientes raíces cuadradas. Luego, verifica tu resultado con una calculadora.

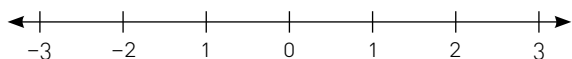
a.	$\sqrt{17}$		
b.	$-\sqrt{5}$		
c.	$\sqrt{8}$		
d.	$-\sqrt{3}$		
e.	$-\sqrt{63}$		
f.	$-\sqrt{34}$		
g.	$\sqrt{10}$		

2 Ubica en la recta numérica, utilizando regla y compás, las siguientes raíces cuadradas.

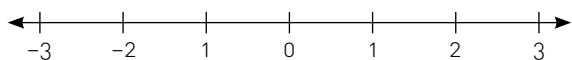
a.  $\sqrt{2}$



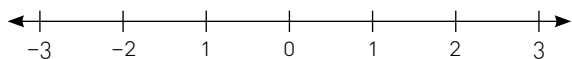
b.  $\sqrt{3}$



c.  $-\sqrt{4}$



d.  $-\sqrt{7}$



3 Escribe en orden de menor a mayor los siguientes números.

$$\sqrt{8}, \pi, -e, -\frac{\sqrt{13}}{5}, \sqrt{11}, -\sqrt{57}, \frac{\sqrt{5}}{6}$$

R: \_\_\_\_\_

4 Escribe los enteros más cercanos entre los cuales se encuentran los siguientes números.

a. \_\_\_\_\_  $\sqrt{6}$  \_\_\_\_\_

b. \_\_\_\_\_  $\sqrt{8}$  \_\_\_\_\_

c. \_\_\_\_\_  $\sqrt{17}$  \_\_\_\_\_

d. \_\_\_\_\_  $-\sqrt{63}$  \_\_\_\_\_

e. \_\_\_\_\_  $-\sqrt{21}$  \_\_\_\_\_

5 Determina en cada caso un número irracional que cumpla las siguientes condiciones .

a. Mayor que  $\sqrt{5}$  \_\_\_\_\_

b. Menor que  $\sqrt{2}$  \_\_\_\_\_

c. Se encuentre entre  $\varphi$  y  $\pi$  . \_\_\_\_\_

d. Mayor que  $1-\sqrt{7}$  y menor que  $1+\sqrt{7}$  \_\_\_\_\_

e. Se encuentre entre  $\sqrt{8}$  y  $\sqrt{9}$  \_\_\_\_\_.

6 Completa con  $<$ ,  $>$  o  $=$  según corresponda.

a.  $\sqrt{8}$  \_\_\_\_\_  $\sqrt{14}$

b.  $\pi$  \_\_\_\_\_  $\sqrt{7}$

c.  $\sqrt{17}$  \_\_\_\_\_  $e$

d.  $\sqrt{2}-4$  \_\_\_\_\_  $-\sqrt{3}$

e.  $\sqrt{3}-5$  \_\_\_\_\_  $\sqrt{2}-4$

f.  $\varphi$  \_\_\_\_\_  $\sqrt{8}$

g.  $\sqrt{82}$  \_\_\_\_\_  $\sqrt{5}+9$

7 Aproxima los siguientes números irracionales a dos cifras decimales.

a.  $\sqrt{14} \approx$  \_\_\_\_\_

b.  $2-\sqrt{11} \approx$  \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt{7}-\varphi \approx$  \_\_\_\_\_

d.  $-\sqrt{26}+3 \approx$  \_\_\_\_\_

e.  $\sqrt{3}-\pi \approx$  \_\_\_\_\_

8 Aproxima por exceso cada uno de los siguientes números irracionales.

a.  $\sqrt{6} \approx$  \_\_\_\_\_

b.  $-\sqrt{50} \approx$  \_\_\_\_\_

c.  $-\sqrt{27} \approx$  \_\_\_\_\_

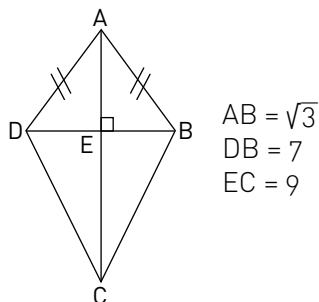
d.  $\sqrt{4}-\sqrt{3} \approx$  \_\_\_\_\_

e.  $\sqrt{21}-\sqrt{7} \approx$  \_\_\_\_\_

## Me desafío

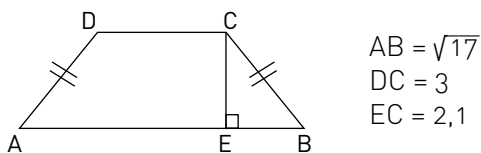
- 1 Calcula el perímetro de las siguientes figuras.

a.



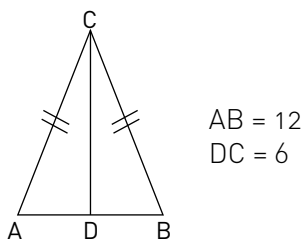
Perímetro: \_\_\_\_\_

b.



Perímetro: \_\_\_\_\_

c.



Perímetro: \_\_\_\_\_

- 2 Calcula el porcentaje de error que se comete al aproximar a la décima la longitud de la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide  $\frac{6\sqrt{7}}{2}$  cm.

R: \_\_\_\_\_

- 3 Si el área de un cuadrado es  $11 \text{ m}^2$ , ¿cuál es la medida del lado del cuadrado?

R: \_\_\_\_\_

- 4 ¿Cuánto mide el radio de una esfera inscrita en un cubo cuyas caras de área igual a  $8 \text{ cm}^2$ ?

R: \_\_\_\_\_

- 5 Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 12 cm.

R: \_\_\_\_\_

- 6 Se quiere pintar por fuera un silo para almacenar trigo que tiene forma cilíndrica y cuyas dimensiones son 12 m de altura y  $\sqrt{7}$  m de radio basal. Si cada litro de pintura rinde  $13 \text{ m}^2$ , ¿cuántos litros de pintura se necesitan?

R: \_\_\_\_\_

- 7 Calcula una expresión para la diagonal de las caras de un cubo que tiene igual superficie a un cilindro de radio basal mide  $\sqrt{5}$  cm y este es igual a su altura.

R: \_\_\_\_\_

- 8 Calcula el área de un prisma recto cuya base es un triángulo rectángulo, sabiendo que la hipotenusa de su base mide  $\sqrt{61}$  cm, uno de sus catetos 6 cm y la altura del prisma, 8 cm.

R: \_\_\_\_\_

- 9 Si la medida del lado de un cuadrado es 3 cm y es aumentada al triple. ¿Qué sucede con el área?

R: \_\_\_\_\_

- 10 Si la arista de un cubo mide 2 cm, ¿cuanto mide su diagonal mayor?

R: \_\_\_\_\_

- 11 Analiza cada problema de esta sección y responde: ¿es posible medir de manera exacta los valores encontrados en cada problema planteado?, ¿qué estrategia usarías para hacer las mediciones en este tipo de problema?

R: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Tema 3 ¿Cómo se puede calcular con números reales?

### Practico

1 Simplifica las siguientes raíces cuadradas.

a.  $\sqrt{54} =$  \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt{180} =$  \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt{245a^2} =$  \_\_\_\_\_

d.  $\sqrt{\frac{48}{162}} =$  \_\_\_\_\_

e.  $\sqrt{\frac{50b^2}{1250b^4}} =$  \_\_\_\_\_

2 Resuelve los siguientes productos de raíces cuadradas.

a.  $\sqrt{3,2} \cdot \sqrt{20} =$  \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt{4} \cdot \sqrt{31,25} =$  \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt{40} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} =$  \_\_\_\_\_

d.  $\sqrt{14a} \cdot \sqrt{2a} \cdot \sqrt{7a^2} =$  \_\_\_\_\_

e.  $5\sqrt{9x} \cdot \sqrt{4x} =$  \_\_\_\_\_

3 Desarrolla los siguientes cocientes de raíces cuadradas y calcula su valor cuando sea posible.

a.  $\sqrt{\frac{144}{25}} =$  \_\_\_\_\_

b.  $\frac{\sqrt{768}}{\sqrt{3}} =$  \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt{125} : \sqrt{5} =$  \_\_\_\_\_

d.  $\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{8}} =$  \_\_\_\_\_

e.  $87\sqrt{x} : 29\sqrt{x^3} =$  \_\_\_\_\_

4 Reduce las siguientes expresiones y expresa en una sola raíz.

a.  $\sqrt{32} + 2\sqrt{2} - \sqrt{8} =$  \_\_\_\_\_

b.  $(\sqrt{3} - \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{7}) =$  \_\_\_\_\_

c.  $\frac{\sqrt{225}}{35} - \frac{\sqrt{289}}{34} + \sqrt{32} =$  \_\_\_\_\_

d.  $\frac{\sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{48}}{3} =$  \_\_\_\_\_

e.  $\frac{2\sqrt{0,0625} - \sqrt{0,0009} - 3\sqrt{0,000064}}{2} =$  \_\_\_\_\_

f.  $(\sqrt{36a^2} - \sqrt{64b^4} - \sqrt{4a^2} - \sqrt{9b^4}) =$  \_\_\_\_\_

g.  $(-\sqrt{81x^4y^2} - \sqrt{4x^2y^4} - \sqrt{49x^4y^2}) =$  \_\_\_\_\_

5 Resuelve los siguientes ejercicios de operatoria combinada.

a.  $2\sqrt{5}(\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1) =$  \_\_\_\_\_

b.  $\frac{4}{\sqrt{6}} - \frac{6}{11} =$  \_\_\_\_\_

c.  $\frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{2}} =$  \_\_\_\_\_

d.  $\sqrt{2} \left( 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}} \right) =$  \_\_\_\_\_

e.  $(\sqrt{48} + \sqrt{192} - \sqrt{27}) : \sqrt{3} =$  \_\_\_\_\_

f.  $\left(\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 =$  \_\_\_\_\_

g.  $\frac{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{14}} \cdot \sqrt{\frac{28}{5}} \cdot \sqrt{\frac{2}{125}} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}}{\sqrt{\frac{6}{5}} \cdot \sqrt{\frac{15}{5}}} =$  \_\_\_\_\_

6 Resuelve las siguientes ecuaciones que involucran raíces cuadradas.

a.  $\sqrt{4x} = 2$        $x =$  \_\_\_\_\_

b.  $3\sqrt{x} - 5 = 2$        $x =$  \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt{x-5} = 7$        $x =$  \_\_\_\_\_

d.  $\frac{2\sqrt{3x-1}}{5} = \frac{1}{2}$        $x =$  \_\_\_\_\_

e.  $\sqrt{x+9} = 0$        $x =$  \_\_\_\_\_

f.  $\sqrt{2x+2} = \sqrt{x+2}$        $x =$  \_\_\_\_\_

7 Al realizar operaciones con números reales, ¿cambia alguna de las reglas de las operaciones de los otros conjuntos numéricos? Justifica tu respuesta.

R: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Me desafío

- 1 Simplifica las siguientes raíces dejando el resultado en función de a, b, c y d.

$$\sqrt{2} = a ; \sqrt{3} = b ; \sqrt{5} = c \text{ y } \sqrt{7} = d$$

- a.  $\sqrt{35} =$  \_\_\_\_\_
- b.  $\sqrt{9} + \sqrt{7} =$  \_\_\_\_\_
- c.  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{6} =$  \_\_\_\_\_
- d.  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + 8} =$  \_\_\_\_\_
- e.  $\frac{15 + \sqrt{28}}{\sqrt{50} - 3} =$  \_\_\_\_\_

- 2 Analiza las siguientes propiedades de las raíces. Luego, marca si se cumple o no dando un contraejemplo si la respuesta es negativa.

a.  $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$   
 Sí: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_

Contraejemplo: \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt{a - b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$   
 Sí: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_

Contraejemplo: \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt{a} \cdot b = \sqrt{a \cdot \sqrt{b}}$   
 Sí: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_

Contraejemplo: \_\_\_\_\_

d.  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$   
 Sí: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_

Contraejemplo: \_\_\_\_\_

e.  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - \sqrt{ab} + b$   
 Sí: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_

Contraejemplo: \_\_\_\_\_

- 3 Javier necesita pintar unos cubos de madera para restaurar un juego de su hermano. Si para pintar uno de ellos necesita el doble de pintura que para pintar el otro cuyo volumen es  $5 \text{ cm}^3$ . Estima el volumen del primer cubo.

R: \_\_\_\_\_

- 4 La longitud de un péndulo (L) medido en metros y su período (T) medido en segundos están relacionados por  $T = 2\sqrt{L}$ .

a. Si el período del péndulo es de  $\sqrt{3}$  m, ¿cuál es la longitud del péndulo?

R: \_\_\_\_\_

b. ¿Cuál es el período cuando la longitud del péndulo es igual a 5 m?

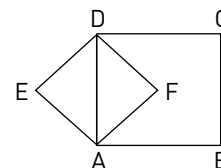
R: \_\_\_\_\_

- 5 Juan asegura que si se dan dos vueltas a la cancha, se recorre una mayor distancia que si se dan 4 vueltas a la mitad de la cancha dividiéndola en su diagonal. Manuela, por su parte, dice que ocurre lo contrario, es decir, que se recorre una menor distancia.

a. Si la cancha mide 75 m de ancho y 110 m de largo, ¿quién está en lo correcto?

R: \_\_\_\_\_

- 6 Calcula el perímetro del cuadrado AFDE, sabiendo que F es el punto de intersección de las diagonales del cuadrado ABCD y que el perímetro de este es 12 cm.



R: \_\_\_\_\_

- 7 Marcelo compró un terreno donde desea construir una casa, una piscina y plantar árboles frutales para generar recursos. El terreno mide 120 m de ancho por 210 m de largo.

a. ¿Qué dimensiones deben tener la casa y la piscina, si quiere que sean cuadradas y que la casa ocupe un sexto del total del terreno y la piscina un décimo del mismo?

R: \_\_\_\_\_

b. ¿Cuánta superficie le queda para plantar los árboles frutales?

R: \_\_\_\_\_

Reforzamiento

Según tus resultados en la evaluación de la lección, repasa los temas que consideres necesarios.

Recuerda que los números irracionales no pueden escribirse como cociente de números enteros.

Para ubicar raíces en la recta numérica, debes recordar el teorema de Pitágoras.

Si aproximas un número por defecto, el resultado será menor; si lo haces por exceso, será mayor. En caso de que uses redondeo el resultado será más exacto, pues se comete el menor error respecto al número original.

**1** Analiza los siguientes números, escríbelos como cociente de números enteros cuando sea posible e identifica si son racionales o irracionales.

a.  $\frac{\sqrt{9} + 6}{5} =$

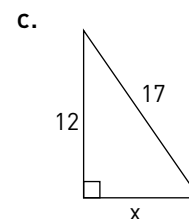
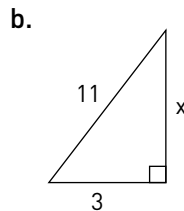
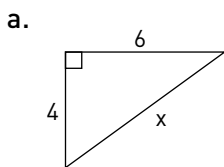
b.  $\sqrt{7} - 2 =$

c.  $5 \cdot 0,25 + 1 - \frac{1}{3} - \sqrt{6} =$

d.  $\sqrt{11 + \frac{4}{2}} =$

e.  $\frac{6\pi + \sqrt{4\pi^2}}{\pi} =$

**2** Calcula el valor que falta en los siguientes triángulos rectángulos.



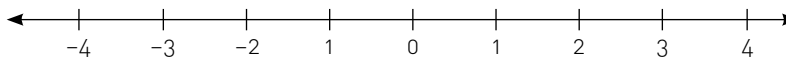
**3** Ubica en la recta numérica las siguientes raíces cuadradas.

a.  $\sqrt{11}$

b.  $-\sqrt{2}$

c.  $\sqrt{5} - 2$

d.  $4 - \sqrt{3}$



**4** Usando calculadora, aproxima por exceso, defecto y redondeo (con dos cifras decimales) los siguientes números:

Aproximación			
Número	Defecto	Exceso	Redondeo
$9 - \sqrt{21}$			
$\sqrt{8} + \sqrt{34}$			
$\frac{-\sqrt{3} - \sqrt{17}}{5}$			

## Profundización

- 1 Si la superficie de Mercurio corresponde a un 14,77% de la superficie de la Tierra, que es 501,1 km<sup>2</sup>: ¿cuál es la superficie de Mercurio?, ¿cuál es la razón entre las superficies de la Tierra y de Mercurio?

R: \_\_\_\_\_

- 2 Si una pared cuadrada tiene una superficie 23,04 m<sup>2</sup> y la pared adyacente es rectangular y con una superficie 30% mayor, calcula cuánta pintura se necesita para pintar ambas paredes si se sabe que el galón de pintura rinde 35 m<sup>2</sup> aproximadamente, considerando al menos dos manos de pintura.

R: \_\_\_\_\_

- 3 Si se sabe que la relación entre la distancia  $d$  (en metros) y el tiempo transcurrido  $t$  (en segundos) de la caída de un objeto partiendo de su estado de reposo, se expresa con la fórmula  $t^2 = \frac{d}{5}$ , ¿cuánto demoraría en caer un objeto desde la azotea de un edificio de 30 pisos (la altura de cada piso es de 2,5 m)? ¿y si el edificio tuviera 45 pisos?

R: \_\_\_\_\_

- 4 En un edificio  $\frac{2}{5}$  del dinero recaudado en los gastos comunes se utiliza en calefacción;  $\frac{1}{8}$  en electricidad;  $\frac{1}{12}$  en la mantención del jardín y  $\frac{1}{4}$  en las áreas comunes. Si el resto se utiliza en materiales de limpieza, ¿Qué fracción de los ingresos se emplea en limpieza?

R: \_\_\_\_\_

# Raíces enésimas y logaritmos

Repasa algunos contenidos que utilizarás durante esta lección.

**1** Escribe como potencia las siguientes multiplicaciones iteradas.

- $17 \cdot 17 \cdot 17 =$  \_\_\_\_\_
- $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$  \_\_\_\_\_
- $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$  \_\_\_\_\_
- $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$  \_\_\_\_\_
- $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$  \_\_\_\_\_
- $21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 =$  \_\_\_\_\_

**2** Calcula el valor de las siguientes potencias.

- $6^5 =$  \_\_\_\_\_
- $2^7 =$  \_\_\_\_\_
- $9^4 =$  \_\_\_\_\_
- $3^8 =$  \_\_\_\_\_
- $12^5 =$  \_\_\_\_\_
- $15^3 =$  \_\_\_\_\_

**3** Completa con el número que corresponda para que la igualdad se cumpla.

- $4^{( )} = 1024$
- $( )^3 = 216$
- $7^3 \cdot 7^{( )} = 7^8$
- $5,4^5 \cdot ( ) = 5,4^{-12}$

**4** Resuelve cada una de las siguientes expresiones aplicando las propiedades que correspondan.

- $7^8 \cdot 7^6 =$  \_\_\_\_\_
- $9 \cdot 81 \cdot 3^2 =$  \_\_\_\_\_
- $6^4 : 6^7 =$  \_\_\_\_\_
- $(-4)^{-2} =$  \_\_\_\_\_
- $((2^2)^{-1})^3 =$  \_\_\_\_\_
- $\left[\left(\frac{-1}{2}\right)^2\right]^{-3} =$  \_\_\_\_\_
- $\left[\left(\frac{(10^2)}{10^{-3}}\right)^2\right]^{-3} =$  \_\_\_\_\_

**5** Resuelve los siguientes problemas de aplicación de potencias.

- Una bacteria se reproduce cada 7 minutos en dos bacterias. Si se coloca una bacteria en un recipiente a las 16:30, ¿a qué hora habrá 256 bacterias?

R: \_\_\_\_\_

- ¿Cuántas personas pueden habitar un condominio que tiene 5 edificios de 5 pisos, con 5 departamentos por piso, si cada departamento está pensado para ser habitado por 5 personas?

R: \_\_\_\_\_

Recuerda el concepto de potencia para poder avanzar en esta lección.

Las propiedades de las potencias que estudiarás en esta lección serán las mismas que estudiaste con anterioridad.

Aplica las potencias y sus propiedades a diferentes situaciones para que las tengas presentes en el desarrollo de esta lección.

→ Tema 1 ¿Cuáles son las raíces enésimas?

Practico

1 Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a.  $\sqrt[5]{-243} =$

b.  $\sqrt[3]{729^2} =$

c.  $\sqrt{0,0625} =$

d.  $\sqrt[7]{128^3} =$

e.  $\sqrt[4]{\frac{81}{4096}} =$

f.  $\sqrt[6]{\frac{64}{15625}} =$

2 Analiza cada proposición. Luego, determina si es verdadera o falsa y justifica en ambos casos.

a. ( ) Si  $(-8)^2 = 64$ , entonces  $\sqrt{64} = -8$ .

R: \_\_\_\_\_

b. ( ) La raíz sexta de  $-64$  es  $-2$ .

R: \_\_\_\_\_

c. ( ) Si  $(-2)^3 = -8$ , entonces la raíz cúbica de  $8$  es  $-2$ .

R: \_\_\_\_\_

d. ( ) La raíz cúbica de  $-1000$  es  $10$ .

R: \_\_\_\_\_

e. ( )  $\sqrt[5]{3125} = 5$ .

R: \_\_\_\_\_

f. ( )  $\sqrt[3]{-125} = 5$

R: \_\_\_\_\_

3 Clasifica los números como racionales o irracionales.

a.  $\sqrt[3]{-27} \rightarrow$  \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt{15} \rightarrow$  \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt[4]{256} \rightarrow$  \_\_\_\_\_

d.  $\sqrt[5]{32} \rightarrow$  \_\_\_\_\_

e.  $\sqrt{0,09} \rightarrow$  \_\_\_\_\_

f.  $\sqrt[7]{-32} \rightarrow$  \_\_\_\_\_

4 Relaciona cada radical con una potencia según corresponda.

a.  $\sqrt[7]{-1}$   $(-2)^3$

b.  $(-4)^5$   $\sqrt[6]{729}$

c.  $\sqrt[3]{216}$   $(-1)^7$

d.  $2^6$   $\sqrt[4]{10000}$

e.  $\sqrt[3]{-729}$   $6^3$

f.  $3^6$   $\sqrt[6]{64}$

g.  $10^4$   $(-9)^3$

h.  $\sqrt[4]{625}$   $\sqrt[5]{-1024}$

i.  $\sqrt[3]{-8}$   $5^4$

5 Determina el valor de  $x$  en cada caso.

a.  $\sqrt[x]{36} = 6$   $x =$  \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt[3]{x} = -4$   $x =$  \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt[10]{1} = x$   $x =$  \_\_\_\_\_

d.  $\sqrt[x]{-3125} = -5$   $x =$  \_\_\_\_\_

e.  $\sqrt[4]{2401} = x$   $x =$  \_\_\_\_\_

f.  $\sqrt[4]{x} = 8$   $x =$  \_\_\_\_\_

g.  $\sqrt[5]{243} = x$   $x =$  \_\_\_\_\_

6 Aplica la propiedad de la multiplicación o de la división de radicales para calcular.

a.  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} =$  \_\_\_\_\_

b.  $\frac{\sqrt[3]{-16}}{\sqrt{2}} =$  \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt[5]{-9} \cdot \sqrt[5]{27} =$  \_\_\_\_\_

d.  $\frac{\sqrt[4]{2500}}{\sqrt[4]{4}} =$  \_\_\_\_\_

7 Expresa como un solo radical cada caso y calcula.

a.  $\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$  \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt{\sqrt{2401}} =$  \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt[3]{\frac{1}{729}} =$  \_\_\_\_\_



## Me desafío

- 1 El dueño de una parcela desea construir un estanque cúbico cuya capacidad sea de 30 000 litros. ¿Cuánto debería medir la altura del estanque?  
R: \_\_\_\_\_
- 2 La longitud del lado de un cuadrado es 7,5 cm. ¿Cuál es el área de su superficie?  
R: \_\_\_\_\_
- 3 El volumen de un cubo es 729 m<sup>3</sup>. ¿Cuál es la longitud de su arista?  
R: \_\_\_\_\_
- 4 Si el área de la superficie de un cubo es 54 cm<sup>2</sup>, ¿cuál es la longitud de su arista?  
R: \_\_\_\_\_
- 5 Si la arista de un cubo es 4,8 cm, ¿cuál es su volumen?  
R: \_\_\_\_\_
- 6 El área de la superficie de un cuadrado es 75 cm<sup>2</sup>. ¿Cuál es la longitud de su arista y de su perímetro?  
R: \_\_\_\_\_
- 7 La longitud de los lados de un rectángulo es  $(3\sqrt[3]{2} + 4)$  cm y  $7\sqrt[3]{2}$  cm. ¿Cuáles son su área y su perímetro?  
R: \_\_\_\_\_
- 8 ¿Cuál es la longitud de la diagonal de un rectángulo si sus lados miden  $\sqrt{30}$  cm y  $3\sqrt{5}$  cm?  
R: \_\_\_\_\_
- 9 Una empresa de productos en conserva debe etiquetar los tarros cilíndricos para un nuevo producto. Si la altura de los tarros es 13 cm y el radio de su base es 5 cm, ¿qué dimensiones tendrán las etiquetas si estas deben estar ubicadas a 0,3 cm de la base?  
R: \_\_\_\_\_

- 10 ¿Cuál es el menor número que debemos sumar a 9998 para que su raíz cuadrada entera tenga tres cifras?  
R: \_\_\_\_\_

- 11 Si el volumen (V) de una esfera es 864 cm<sup>3</sup> y  $\pi \approx 3$ , ¿cuál es la medida del radio (r) de la esfera? Recuerda que el volumen (V) de una esfera de radio (r) se puede calcular utilizando  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

R: \_\_\_\_\_

- 12 Los lados de un rectángulo miden  $3\sqrt{3}$  cm y  $4\sqrt{3}$  cm. ¿Cuánto mide su diagonal?

R: \_\_\_\_\_

- 13 Para aproximar raíces cúbicas, podemos utilizar la fórmula:

$$\sqrt[3]{n} \approx \frac{n + \left(\frac{n+x^3}{2x^2}\right)^3}{2\left(\frac{n+x^3}{2x^2}\right)^2}$$

Donde n es el número cuya raíz queremos calcular y x es la menor aproximación entera de ella. Verifica esta fórmula para los siguientes valores y comprueba con una calculadora los resultados obtenidos.

a.  $\sqrt[3]{15}$

R: \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt[3]{34}$

R: \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt[3]{18}$

R: \_\_\_\_\_

- 14 Un padre reparte entre sus dos hijos un terreno de la siguiente manera: al primero le entrega un terreno de forma rectangular de largo  $\sqrt{18}$  m y ancho es  $\sqrt{12}$  m, mientras que al segundo le regala un terreno cuyas dimensiones son  $\sqrt{15}$  m de largo y  $\sqrt{6}$  m de ancho. ¿Cuál es el área de cada uno de los terrenos que reciben sus hijos?

R: \_\_\_\_\_

→ Tema 2 ¿Qué representan las potencias de exponente fraccionario?

Practico

1 Escribe las siguientes potencias como raíz.

a.  $25^{\frac{2}{3}} =$  \_\_\_\_\_

b.  $45^{\frac{2}{5}} =$  \_\_\_\_\_

c.  $32^{\frac{4}{9}} =$  \_\_\_\_\_

d.  $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{7}} =$  \_\_\_\_\_

e.  $(65xy)^{\frac{4}{3}} =$  \_\_\_\_\_

f.  $(a + 8)^{\frac{6}{13}} =$  \_\_\_\_\_

g.  $(x + y)^{\frac{5}{4}} =$  \_\_\_\_\_

2 Escribe las raíces dadas en forma de potencia.

a.  $\sqrt[4]{2^5} =$  \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt{9^3} =$  \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt[5]{3^2} =$  \_\_\_\_\_

d.  $\sqrt[7]{(a - 1)^6} =$  \_\_\_\_\_

e.  $\sqrt[9]{(x + 8)^5} =$  \_\_\_\_\_

f.  $\sqrt[9]{(x - y)^b} =$  \_\_\_\_\_

g.  $\sqrt[p]{x^2 + 2xy + y^2} =$  \_\_\_\_\_

3 Simplifica las siguientes raíces.

a.  $\sqrt[15]{6^{45}} =$  \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt[32]{512^4} =$  \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt[5]{8^{20}} =$  \_\_\_\_\_

d.  $\sqrt[18]{27^6} =$  \_\_\_\_\_

e.  $\sqrt[56]{256^7} =$  \_\_\_\_\_

f.  $\sqrt[77]{15^{11}} =$  \_\_\_\_\_

g.  $\sqrt[12]{64} =$  \_\_\_\_\_

4 Resuelve las siguientes multiplicaciones de raíces de distinto índice.

a.  $\sqrt[3]{6^5} \cdot \sqrt{6} =$  \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt[5]{5^4} \cdot \sqrt[4]{5^3} =$  \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt[7]{\left(\frac{7}{9}\right)^8} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{7}{9}\right)^5} =$  \_\_\_\_\_

d.  $\sqrt[5]{a^6} \cdot \sqrt[6]{a^3} =$  \_\_\_\_\_

e.  $\sqrt[8]{a^2} \cdot \sqrt[12]{a^9} =$  \_\_\_\_\_

f.  $\sqrt[7]{\left(\frac{6}{15}\right)^3} \cdot \sqrt[10]{\left(\frac{6}{15}\right)^8} =$  \_\_\_\_\_

5 Resuelve las siguientes divisiones.

a.  $\frac{\sqrt[4]{54^9}}{\sqrt[3]{54^2}} =$  \_\_\_\_\_

b.  $\frac{\sqrt[6]{45^9}}{\sqrt[3]{45^5}} =$  \_\_\_\_\_

c.  $\frac{\sqrt[14]{10^3}}{\sqrt[5]{10^4}} =$  \_\_\_\_\_

d.  $\frac{\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[6]{x^4}} =$  \_\_\_\_\_

e.  $\frac{\sqrt[3]{(ab)^6}}{\sqrt[7]{(ab)^3}} =$  \_\_\_\_\_

f.  $\frac{\sqrt[8]{(x-5)^{15}}}{\sqrt[8]{(x-5)^{10}}} =$  \_\_\_\_\_

6 Determina si las siguientes equivalencias son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.

a. (\_\_\_\_\_)  $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$   
R: \_\_\_\_\_

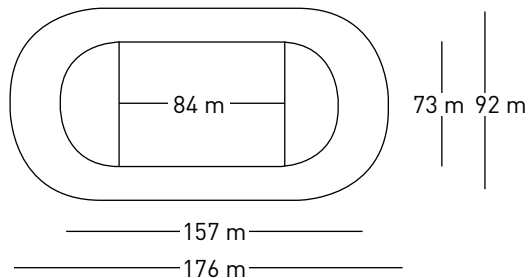
b. (\_\_\_\_\_)  $7\sqrt{3} = \sqrt{21}$   
R: \_\_\_\_\_

c. (\_\_\_\_\_)  $2\sqrt[3]{5} = \sqrt{30}$   
R: \_\_\_\_\_

d. (\_\_\_\_\_)  $\sqrt[5]{64} = 2\sqrt[5]{2}$   
R: \_\_\_\_\_

**Me desafío**

- 1 ¿Qué condición deben cumplir a y b para que el producto de sus raíces cuadradas sea un número entero?  
R: \_\_\_\_\_
- 2 Si a y b son múltiplos de 3, ¿el cociente de sus raíces cúbicas será siempre un número entero positivo? Justifica tu respuesta.  
R: \_\_\_\_\_
- 3 El cubo de un número más la quinta parte del mismo al cubo da como resultado 125. ¿Cuál es ese número?  
R: \_\_\_\_\_
- 4 La suma de un número a la quinta y el cuádruple del mismo número a la quinta es igual a la diferencia entre 128 y el número a la quinta. ¿Qué número es?  
R: \_\_\_\_\_
- 5 La diferencia entre un número a la cuarta y 15 es igual a la diferencia entre el doble del número a la cuarta y 96. Determina el número.  
R: \_\_\_\_\_
- 6 Si a un cubo cuyo volumen es  $13 \text{ cm}^3$  se le aumenta en 1 cm su arista, ¿cuántos centímetros cúbicos aumentará su volumen?  
R: \_\_\_\_\_
- 7 Se desea restaurar una vieja pista de carrera, para lo cual, entre otras cosas, es necesario pintarla. Si las dimensiones de la pista son las que se muestran en la imagen, ¿cuál es la superficie que se desea cubrir?



R: \_\_\_\_\_

- 8 La tercera ley de Kepler relaciona el período de traslación  $t$  de un planeta, en años terrestres, con su distancia  $d$  al Sol, medida en unidades astronómicas (ua) mediante la fórmula  $t = \sqrt{d^3}$ . ¿Cuál es el período de traslación de un planeta cuya distancia al Sol es de 10 ua?  
R: \_\_\_\_\_
- 9 Verifica si se cumple la siguiente afirmación. Justifica tu respuesta.  
 $6^{-5x-3} = {}^4\sqrt{216}$  para  $x = -0,75$   
R: \_\_\_\_\_
- 10 Una variedad de virus se triplica cada 2 horas. Si se tienen 100 de estos virus, la expresión  $V = 100 \cdot 3^{\frac{t}{2}}$  indica la cantidad de este patógeno que hay transcurridas  $t$  horas. Si en un instante hay 24300 de estos virus, ¿cuántas horas han transcurrido?  
R: \_\_\_\_\_
- 11 Un producto reduce su valor a un quinto cada año. Si se compró a \$15000 y la expresión que permite calcular su valor luego de  $t$  años transcurridos es  $P = 15000 \cdot 5^{-t}$ , ¿cuánto tiempo ha pasado si su valor ahora es de \$24?  
R: \_\_\_\_\_
- 12 La mitad de la cantidad de un elemento químico se desintegra cada 25 años. Si una muestra contiene 24 g, la expresión  $C = 24 \cdot 2^{\frac{-t}{25}}$  permite obtener la cantidad  $C$  del elemento luego de  $t$  años.
  - a. ¿Cuántos años tienen que transcurrir para que se tenga 1,5 g de este elemento?  
R: \_\_\_\_\_
  - b. ¿Puede llegar el momento en que el elemento desaparezca? Justifica tu respuesta.  
R: \_\_\_\_\_

## → Tema 3 ¿Qué son los logaritmos?

### Practico

1 Escribe las siguientes igualdades utilizando la notación de logaritmo.

a.  $2^3 = 8$  \_\_\_\_\_

b.  $7^4 = 2401$  \_\_\_\_\_

c.  $3^5 = 243$  \_\_\_\_\_

d.  $0,6^3 = 0,216$  \_\_\_\_\_

e.  $32^{0,2} = 2$  \_\_\_\_\_

f.  $343^{\frac{1}{3}} = 7$  \_\_\_\_\_

g.  $\left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{15625}{729}$  \_\_\_\_\_

h.  $\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$  \_\_\_\_\_

2 Escribe los siguientes logaritmos utilizando notación de potencia.

a.  $\log_5 25 = 2$  \_\_\_\_\_

b.  $\log_2 64 = 6$  \_\_\_\_\_

c.  $\log_7 16807 = 5$  \_\_\_\_\_

d.  $\log_{0,25} 0,0625 = 2$  \_\_\_\_\_

e.  $\log_{17} 1 = 0$  \_\_\_\_\_

f.  $\log_{125} 25 = \frac{2}{3}$  \_\_\_\_\_

g.  $\log_{\frac{3}{5}} \left(\frac{81}{625}\right) = 4$  \_\_\_\_\_

3 Explica si los logaritmos se pueden o no calcular. En caso de que se pueda, hazlo y luego escribe una conclusión para cada caso.

a.  $\log_5 1$   
R: \_\_\_\_\_

b.  $\log_1 7$   
R: \_\_\_\_\_

c.  $\log_8 (-64)$   
R: \_\_\_\_\_

d.  $\log_5 0$   
R: \_\_\_\_\_

4 Calcula el valor de los siguientes logaritmos.

a.  $\log_2 128 =$  \_\_\_\_\_

b.  $\log_3 81 =$  \_\_\_\_\_

c.  $\log_8 \frac{1}{512} =$  \_\_\_\_\_

d.  $\log_{0,0256} \frac{64}{15625} =$  \_\_\_\_\_

e.  $\log_{\frac{4}{5}} 0,512 =$  \_\_\_\_\_

f.  $\log_{5^{-1}} 0,008 =$  \_\_\_\_\_

5 Calcular el valor de x en las expresiones dadas.

a.  $\log_2 32 = x$        $x =$  \_\_\_\_\_

b.  $\log_{0,25} x = \frac{1}{2}$        $x =$  \_\_\_\_\_

c.  $\log_{27} 3 = \frac{1}{x}$        $x =$  \_\_\_\_\_

d.  $\log_{\frac{10}{3}} x = \frac{10000}{81}$        $x =$  \_\_\_\_\_

e.  $\log_x \frac{1}{4} = -1$        $x =$  \_\_\_\_\_

f.  $\log_{\frac{6}{5}} \left(\frac{625}{1296}\right) = x$        $x =$  \_\_\_\_\_

g.  $\log_x \frac{1}{512} = 3$        $x =$  \_\_\_\_\_

6 Determina el valor de las siguientes expresiones logarítmicas.

a.  $\log_2 8 - 2\log_3 81 + \log_5 125 =$  \_\_\_\_\_

b.  $3\log_{\frac{4}{3}} \frac{64}{27} + \log_2 0,5 - 4\log_3 9 =$  \_\_\_\_\_

c.  $-5\log_{64} 8 - 4\log_{\frac{1}{3}} 27 - 2\log_{\frac{2}{3}} \frac{256}{81} =$  \_\_\_\_\_

d.  $\log_{49} 7 + 3\log_{125} 5 - \log_{0,8} \frac{25}{16} =$  \_\_\_\_\_

e.  $\log_7 \frac{1}{343} + 7\log_7 2401 - \log_7 16807 =$  \_\_\_\_\_

f.  $3\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} + \log_{\frac{1}{3}} 1 - \log_{0,3} \frac{1}{81} =$  \_\_\_\_\_

g.  $-\log_2 \frac{1}{2} + \log_{625} \frac{1}{5} - \log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8} =$  \_\_\_\_\_

## Me desafío

1 Estima el valor de cada logaritmo considerando  $\log 2 \approx 0,30$ ;  $\log 3 \approx 0,48$ ;  $\log 5 \approx 0,70$ ;  $\log 7 \approx 0,85$  y  $\log 17 \approx 1,23$ .

a.  $\log 72 \approx$  \_\_\_\_\_

b.  $\log 12,5 \approx$  \_\_\_\_\_

c.  $\log_{49} 15 \approx$  \_\_\_\_\_

d.  $\log 1225 \approx$  \_\_\_\_\_

e.  $\log \frac{27}{119} \approx$  \_\_\_\_\_

f.  $\log_{17} 30 \approx$  \_\_\_\_\_

g.  $\log \frac{84}{25} \approx$  \_\_\_\_\_

h.  $\log 476 \approx$  \_\_\_\_\_

i.  $\log 10,2 \approx$  \_\_\_\_\_

2 Si  $\log 2 = x$  y  $\log 5 = y$ , determina el valor de  $\log 250$  en función de  $x$  e  $y$ .

R: \_\_\_\_\_

**Nota:** El pH es una medida de acidez o alcalinidad de una disolución. Este valor se puede determinar utilizando la fórmula

$$\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+].$$

Se dice que una solución:

- es neutra si el  $\text{pH} = 7$ ,

- es ácida si  $\text{pH} < 7$ ,

- es alcalina si  $\text{pH} > 7$ .

3 Utilizando la información anterior, calcula el pH de las siguientes sustancias e indica si son ácidas o alcalinas.

a. Vinagre:  $[\text{H}_3\text{O}^+] = 6,3 \cdot 10^{-3}$ .

R: \_\_\_\_\_

b. Ácido nítrico:  $[\text{H}_3\text{O}^+] = 3,8 \cdot 10^{-4}$ .

R: \_\_\_\_\_

4 Conociendo el pH de las siguientes sustancias calcula el  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  que contiene cada una.

a. Leche,  $\text{pH} = 6,6$ .

R: \_\_\_\_\_

b. Agua de mar,  $\text{pH} = 8,0$ .

R: \_\_\_\_\_

5 El crecimiento de un bosque viene dado por la función  $M(t) = C \cdot (1+i)^t$ , donde  $M$  es la madera que habrá dentro de  $t$  años,  $C$  la madera actual e  $i$  la tasa de crecimiento anual. Si  $i = 0,05$  y se mantiene constante, calcula el tiempo que tardará en triplicarse la madera del bosque.

R: \_\_\_\_\_

**Nota:** En Chile, a partir del año 2012 se estableció la ley de "Tolerancia 0" al alcohol, con la que se redujo a 0,3 g/L de sangre la concentración de alcohol considerada como "estado de ebriedad". Se estima que el riesgo de sufrir un accidente (en porcentaje) se relaciona con la concentración de alcohol mediante la siguiente fórmula:  $R = 6e^{kx}$ . Utiliza esta información para responder las preguntas 6 a 9.

6 Se estima que una concentración de 0,04 g/L de alcohol en la sangre ( $x = 0,04$ ) corresponde a un riesgo del 10% ( $R = 10$ ). Determina el valor de la constante  $k$ .

R: \_\_\_\_\_

7 Una persona que, de acuerdo con la ley chilena, conduce en estado de ebriedad, ¿qué riesgo tiene de sufrir un accidente?

R: \_\_\_\_\_

8 Si una persona presenta el doble de concentración de alcohol que otra, ¿cuánto mayor es su riesgo de accidente?

R: \_\_\_\_\_

9 ¿Para qué concentración de alcohol en la sangre se puede estimar un riesgo de accidente del 100%?

R: \_\_\_\_\_

10 La cantidad de miligramos de un medicamento que queda en la sangre transcurridas  $t$  horas de haberlo consumido se calcula mediante la fórmula  $C = 10e^{-0,2t}$ .

a. ¿Cuántos miligramos del medicamento hay en la sangre luego de una hora?

R: \_\_\_\_\_

b. Si la cantidad de miligramos no puede bajar de 3, ¿cada cuánto tiempo, aproximadamente, debe tomarse el medicamento?

R: \_\_\_\_\_



**Uso de hoja de cálculo**

En el texto vieron un método numérico, llamado de Newton – Raphson, para aproximar raíces de cualquier índice. Ese es uno de los muchos métodos numéricos que existen para resolver muchos problemas. En general estos métodos requieren realizar largos cálculos por lo que utilizar hojas de cálculo simplifica el trabajo y ahorra mucho tiempo.

Herón de Alejandría, matemático e ingeniero griego del siglo I d. C., tiene un método numérico para calcular raíces cuadradas que podrás ver ahora.

El método nos dice que, por ejemplo, para calcular  $\sqrt{31}$ , debemos tener una primera aproximación  $x_0$ , en este caso utilizaremos 5 (porque la raíz dada está entre 5 y 6), luego aplicamos la siguiente fórmula:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{N}{x_0} \right) \text{ (Donde N, en este caso sería 31 y } x_1 \text{ la siguiente aproximación)}$$

**1** ¿Si quisieras utilizar una hoja de cálculo para calcular la raíz dada:

a. ¿Qué escribirías en la casilla A1?

R: \_\_\_\_\_

b. ¿Qué escribirías en la casilla A2?

R: \_\_\_\_\_

c. Si arrastras la casilla A2 hasta la A12, ¿qué notas?

R: \_\_\_\_\_

d. Aproximado a 9 dígitos decimales, ¿cuál es el valor de  $\sqrt{31}$ ? Comprueba tu respuesta con una calculadora científica.

R: \_\_\_\_\_

e. ¿Qué sucede si utilizas el 6, en vez del 5, como primera aproximación?

R: \_\_\_\_\_

f. ¿Qué sucede si utilizas un número decimal como primera aproximación?

R: \_\_\_\_\_

g. ¿Y si utilizas un número negativo?

R: \_\_\_\_\_

**2** Utilizando el mismo método calcula  $\sqrt{72}$  con 5 dígitos decimales y comprueba tu resultado utilizando la calculadora.

R: \_\_\_\_\_

**3** Compara tus resultados con los de tus compañeros. Después de eso, ¿cambiarías alguna de tus respuestas?

R: \_\_\_\_\_

Las hojas de cálculo no solo son útiles para aplicar las fórmulas de Herón o Newton – Raphson, también podemos resolver ecuaciones que no se pueden o que son difíciles de resolver. Por ejemplo la ecuación  $x^3 + x^2 - 7x - 2 = 0$ .

Recuerda que resolver la ecuación significa encontrar un valor de  $x$  tal que, al reemplazarlo en la ecuación resulte 0. Escribamos la ecuación en una hoja de cálculo e investiguemos.

**4** En A1, ..., A11 escribe del 0 al 10. En B1 escribe  $A1^3 + A1^2 - 7A1 - 2$  y arrástralo hasta B11.

**5** ¿Qué sucede con los signos de los resultados obtenidos?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**6** En este tipo de ecuaciones si un resultado es positivo y otro es negativo significa que entre ellos hay un valor 0. En D1 escribe 2,1 y en D2, 2,2 y arrastra hasta D9 y copia en E1 la fórmula de B1. ¿Dónde hay un cambio de signo ahora?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**7** Si quisieras un resultado más exacto, ¿qué deberías hacer?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

En el tema anterior podías comprobar tus resultados con la calculadora científica, ahora lo harás en GeoGebra.

**8** Abre una página de GeoGebra y grafica  $y = x^3 + x^2 - 7x - 2$ . Entre 2 y 3 verás que la curva, corta el eje X, esa intersección indica que para ese valor de  $x$ , el valor de la ecuación es 0. Con la herramienta intersección de puntos, marca el eje X y la curva, ¿qué valor te dio? ¿Corresponde al valor obtenido en 6?

**9** En el gráfico en GeoGebra puedes observar otras dos intersecciones con el eje X. Si quisieras encontrar esas soluciones usando la hoja de cálculo, ¿qué harías?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**10** Utilizando la hoja de cálculo calcula, con 6 dígitos decimales las siguientes raíces.

a.  $\sqrt{21} =$  \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt{158} =$  \_\_\_\_\_

**11** Con una hoja de cálculo resuelve las siguientes ecuaciones y entrega tus resultados con dos dígitos decimales.

a.  $x^4 - 3x = 0$  R: \_\_\_\_\_

b.  $x^3 - 2 = 0$  R: \_\_\_\_\_

## Tema 4 ¿Cuales son las propiedades de los logaritmos?

### Practico

- 1 Determina el valor de los siguientes logaritmos de base 10.

a.  $\log 1\,000\,000 - 2\log 100 =$   
 b.  $2\log 0,000001 + 2\log 0,001 =$   
 c.  $\log 0,1 - \log 0,01 - \log 0,001 =$   
 d.  $-2\log 10 + 3\log 10\,000 - \log 100\,000 =$   
 e.  $6\log 0,01 - 9\log 10\,000 + \log \frac{1}{10} =$   
 f.  $5\log \frac{1}{1000} + 8\log 0,01 - \log 10 =$

- 2 Aplica las propiedades correspondientes en los siguientes ejercicios de logaritmos.

a.  $\log_a b + \log_a c =$  \_\_\_\_\_  
 b.  $\log ab =$  \_\_\_\_\_  
 c.  $\log_x y - \log_x z =$  \_\_\_\_\_  
 d.  $\log_a \frac{m}{n} =$  \_\_\_\_\_  
 e.  $a \log b =$  \_\_\_\_\_  
 f.  $\log \sqrt[3]{b} =$  \_\_\_\_\_  
 g.  $\log \frac{2m}{n} =$  \_\_\_\_\_  
 h.  $\log \sqrt[n]{\frac{ab}{c}} =$  \_\_\_\_\_  
 i.  $\log \left(\frac{x}{y}\right)^m =$  \_\_\_\_\_  
 j.  $\log \frac{(ab)^n}{xy} =$  \_\_\_\_\_  
 k.  $\log \sqrt[5]{\frac{pq}{r^2s}} =$  \_\_\_\_\_  
 l.  $\log \sqrt[3]{m} \sqrt{n} =$  \_\_\_\_\_

- 3 Verifica si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

a.  $\log 5 + \log 3 = \log 15$  \_\_\_\_\_  
 b.  $\log 9 + \log 4 = \log 13$  \_\_\_\_\_  
 c.  $\log 14 - \log 2 = \log 12$  \_\_\_\_\_  
 d.  $\log 18 - \log 6 = \log 3$  \_\_\_\_\_  
 e.  $2\log 7 = \log 14$  \_\_\_\_\_  
 f.  $\log \sqrt[5]{9} = \sqrt[5]{\log 9}$  \_\_\_\_\_  
 g.  $\log 2^4 = 4 \log 2$  \_\_\_\_\_

h.  $\log \sqrt[3]{12} = \frac{\log 12}{3}$  \_\_\_\_\_

i.  $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[5]{\frac{1}{25}} = \frac{4}{5}$  \_\_\_\_\_

- 4 Aplicando propiedades, reduce las siguientes expresiones y exprésalas en un solo logaritmo.

a.  $\log_2 6 + \log_2 7 - \log_2 9 =$  \_\_\_\_\_

b.  $\log_2 9 - 2\log_2 12 + \log_2 3 =$  \_\_\_\_\_

c.  $5 \log_3 36 + \log_3 15 - 2\log_3 6 =$  \_\_\_\_\_

d.  $\log_a x + \log_a y + \log_a z =$  \_\_\_\_\_

e.  $-\log_x a + \log_x b - \log_x c =$  \_\_\_\_\_

f.  $\log_n x^2 - 3\log_n y - 2\log_n z^5 =$  \_\_\_\_\_

g.  $-a \log b + c \log d - e \log \sqrt[3]{g} =$  \_\_\_\_\_

- 5 Encuentra el valor de x en las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a.  $\log_5 (x - 6) = 2$  \_\_\_\_\_

b.  $\log(7 + x) = \log(x - 1)$  \_\_\_\_\_

c.  $\log_2 (x - 2) + \log_2 (x + 2) = 3$  \_\_\_\_\_

d.  $\log_3 (x - 4) + \log_3 (x + 4) = 2$  \_\_\_\_\_

e.  $\log(x^2 + 6x - 9) - \log(x - 3) = 2$  \_\_\_\_\_

f.  $\log(x^3 - 1) - \log(x^2 + x + 1) = 1$  \_\_\_\_\_

g.  $\log(x - 4) - \log(x - 2) = \log(x - 4) - \log x$   
 \_\_\_\_\_

- 6 Si  $U = \log a + \log b$  y  $V = \log(a^{-1}b)$ . Determina cuál de las siguientes expresiones es equivalente a  $\frac{V}{U}$ .

1  $a^2$      $\frac{1}{a^2}$      $-\log_{ab}(a^{-1}b)$      $\log_{ab}(a^{-1}b)$

R: \_\_\_\_\_

- 7 Determina el valor de x en la siguiente igualdad.

$$\log_{0,5} 256 - 2 + \frac{\log_{0,25} 2}{\log_{0,25} 0,5} = \log_{0,5} x$$

R: \_\_\_\_\_

- 8 Explica por qué no se puede calcular el valor de  $\log_{-5} 125$ .

R: \_\_\_\_\_



## Me desafío

**Nota:** La escala Richter cuantifica la energía liberada en un terremoto.

$M = \log \frac{At^3}{1,62}$ , donde A es la amplitud y t es el tiempo desde el inicio de la onda.

- 1 En un sismo de 5,8 grados en la escala Richter su periodo fue de 0,03 segundo. ¿Cuál fue su amplitud?  
R: \_\_\_\_\_
- 2 ¿Cuál es la magnitud de un sismo si se sabe que su amplitud fue de 6,8 cm y el tiempo fue de 2 segundos?  
R: \_\_\_\_\_
- 3 Se sabe que la energía liberada en un sismo está determinada por la fórmula  $\log E = 1,5R + 11,8$ . Calcula la cantidad de energía liberada en el terremoto de San Francisco, EE.UU. en el año 1906, sabiendo que su magnitud fue de 8,24 grados en la escala Richter.  
R: \_\_\_\_\_
- 4 El año 2014 se registró un sismo con epicentro a 36 km al norte de Valparaíso, con una profundidad superficial de 40,1 km. Este tuvo una magnitud de 6,4 grados en escala Richter. ¿Cuál fue la energía liberada por tal sismo?  
R: \_\_\_\_\_
- 5 Para determinar la intensidad del sonido  $\beta$  se utiliza la fórmula  $\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$ , donde I representa la intensidad de un evento e  $I_0$ , la intensidad del umbral de audición equivalente a  $10^{-12} \text{ W/m}^2$ . Si un evento produce una intensidad de  $70 \text{ W/m}^2$ , ¿cuál es su intensidad de sonido?  
R: \_\_\_\_\_
- 6 La cantidad de bacterias de un cultivo, en un minuto determinado, se puede expresar mediante la fórmula  $B = I \cdot 2^t$ , donde B representa la cantidad de bacterias en el minuto t e I la cantidad inicial de bacterias del cultivo. ¿Cuánto tiempo aproximadamente ha de transcurrir para tener 256 000 bacterias si la población inicial era de 500?  
R: \_\_\_\_\_

- 7 Para medir el pH se utiliza la fórmula  $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$ , donde  $[\text{H}^+]$  es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro. Si un alimento tiene un pH de 4,2, ¿cuál es su concentración de iones de hidrógeno?  
R: \_\_\_\_\_
- 8 La fórmula que permite obtener el capital final de un depósito con interés compuesto es  $C_f = C_i \cdot (1 + i)^t$ , donde  $C_f$  es el capital que se obtendrá al finalizar el período del depósito;  $C_i$ , el capital depositado;  $i$ , el interés anual y  $t$ , la cantidad de años que durará el depósito. Si una persona deposita \$50 000 con un interés compuesto anual del 8%, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir para que su capital sea de \$200 000?  
R: \_\_\_\_\_
- 9 Para determinar la concentración ( $\text{mg/cm}^3$ ) de un medicamento en un organismo en el instante t, en horas, se utiliza la fórmula  $C(t) = 100 \cdot (2,25)^{-t} \text{ mg/cm}^3$ . ¿Cuántas horas deben transcurrir para que en el organismo queden  $20 \text{ mg/cm}^3$ ?  
R: \_\_\_\_\_
- 10 Si  $\frac{\log x}{\log y} = z$ , ¿cuál es el valor de x en función de y y z?  
R: \_\_\_\_\_
- 11 Si  $\log 3x - \log 3y + \log 3z = 17$ , ¿cuál es el valor de  $\frac{y}{xz}$ ?  
R: \_\_\_\_\_
- 12 Si  $\log 2 = x$  y  $\log 5 = y$ , determina el valor de  $\log 250$  en función de x e y.  
R: \_\_\_\_\_
- 13 El crecimiento de la población de un tipo de bacteria se modela mediante la expresión  $B = 168 \cdot 2^{2t}$  con t en horas. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que haya 5376 de estas bacterias.  
R: \_\_\_\_\_

- 1 ¿Qué significa esta habilidad para ti? ¿Significa lo mismo para tus compañeros y compañeras?

---



---



---



---

- 2 Una definición de modelo matemático es: Descripción matemática (puede ser una función o una ecuación) de un fenómeno de la vida real.

Según esa definición, la fórmula para calcular el área de un triángulo, ¿es un modelo?

---



---



---



---

- 3 Maritza es una paisajista a la que le gustan los triángulos. Por esa razón, en el diseño de una parcela, decidió definir tres áreas triangulares para árboles ornamentales, árboles frutales y flores. Midió altura y base de cada una y calculó las áreas, su socia utilizó un planímetro en un mapa y determinó las áreas, los resultados se muestran en la tabla.

Maritza	Planímetro
Área (m <sup>2</sup> )	Área (m <sup>2</sup> )
3,42	3,37
3,44	3,51
2,5	2,44

- a. Como los resultados son diferentes, ¿significa que el modelo (la fórmula del área del triángulo) es erróneo?

---



---

- b. ¿Por qué crees que los resultados son diferentes?

---



---

- c. Al aplicar un modelo matemático en la vida real, no siempre los resultados son exactamente iguales a los datos empíricos. ¿Qué harías tú para aceptar o rechazar un modelo matemático?

Compara tu respuesta con la de tus compañeras y compañeros.

---



---



---

- 4 Resuelve el siguiente problema e indica los pasos en los cuales estás aplicando la habilidad de modelar.

Los 4 primeros términos de una sucesión son: 1, 7, 17, 31, 49, 71, .... Si el patrón se mantiene, ¿qué número se ubica en la posición 100?

---

Reforzamiento

Según tus resultados en la evaluación de la lección, repasa los temas que consideres necesarios.

El logaritmo de  $c$  de base  $a$  corresponde al número al que debe elevarse  $a$  para obtener  $c$ , es decir:

$$\log_a c = b \leftrightarrow a^b = c$$

Recuerda las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned} \log_b 1 &= 0 \\ \log_b b &= 1 \\ \log_b a^n &= n \log_b a \\ \log_b xy &= \log_b x + \log_b y \\ \log_b \frac{x}{y} &= \log_b x - \log_b y \end{aligned}$$

**1** Calcula el valor de  $x$  en cada caso utilizando la definición de logaritmo.

a.  $\log_2 256 = x$   $x =$  \_\_\_\_\_

b.  $\log_x 243 = 5$   $x =$  \_\_\_\_\_

c.  $\log_{27} 3 = x$   $x =$  \_\_\_\_\_

d.  $\log_4 16 = x$   $x =$  \_\_\_\_\_

e.  $\log_8 \sqrt[5]{64} = x$   $x =$  \_\_\_\_\_

f.  $\log_5 \sqrt{125} = x$   $x =$  \_\_\_\_\_

g.  $\log_{36} \frac{1}{6} = x$   $x =$  \_\_\_\_\_

h.  $\log_5 \frac{5\sqrt{16}}{4} = x$   $x =$  \_\_\_\_\_

**2** Desarrolla los siguientes ejercicios aplicando propiedades de logaritmos.

a.  $\log_2 16 + \log 100 - 3 \log_5 1 =$

b.  $\log_4 16 - \log_3 81 - \log_2 256 =$

c.  $\log 1000 - 2 \log 10 - 5 \log 0,001 =$

d.  $\log_{0,3} 0,09 + \log_{\frac{1}{2}} 8 - \log_5 25 =$

e.  $\log_7 1 + \log_8 \frac{1}{512} + \log_{\frac{1}{4}} 1024 + \log_2 64 =$

f.  $-3 \log_{81} 27 - \log_3 27 - \log_6 \frac{1}{36} + \log_4 \sqrt{64} =$

g.  $\log_7 \sqrt[3]{49} - \log_2 \sqrt{\frac{1}{16}} - \log_5 25 \sqrt{\frac{1}{125}} + \log_{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{81}{16}} =$

**3** Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando propiedades de logaritmos.

a.  $3 \log x - \log x = 2$

b.  $2 \log x^3 + \log 1000 = 67$

c.  $\log_2 (12x^2 - 8x) + \log_2 (3x - 2) = 2$

d.  $\log_5 (2x - 3) = \log_5 (3x - 14)$

e.  $\log_3 (\sqrt{x^2 - 19}) = 2$

f.  $\log(x - 4) + \log(x) = \log 5$

## Profundización

- 1 La fórmula que permite calcular el capital obtenido ( $C_f$ ) después de depositar en una institución financiera una cantidad inicial ( $C_i$ ), a un tanto por ciento ( $i$ ), durante un cierto tiempo ( $t$ ) es:

$$C_f = C_i \left( 1 + \frac{i}{100} \right)^t$$

María deposita en un banco \$ 5 000 000 al 15% anual de interés. ¿En cuánto tiempo más el capital de María será de \$ 7 604 375? ¿Cuánto dinero tendrá transcurridos 7 años?

- 2 A causa de los efectos destructivos de la “lluvia ácida”, causada principalmente por las emisiones de azufre, constantemente se revisan los niveles de pH en la lluvia o la nieve. Si la concentración de iones de hidrógeno natural es  $[H^+] = 2,5 \cdot 10^{-6}$ , ¿cuál es la concentración de iones de hidrógeno de una muestra de lluvia que es 200 veces más ácida que la natural?

- 3 Un equipo de arqueólogos fue de excursión al cerro El Plomo, ubicado en Los Andes centrales. Allí encontraron un fósil del cual lograron determinar que había sufrido una desintegración del 70% de su carbono 14 radiactivo. ¿Cuál es la edad aproximada del fósil? Recuerda que:  $A(t) = A_0 e^{-\frac{t}{5600}}$

Donde  $A(t)$  denota la cantidad de carbono 14 restante en el organismo después de  $t$  siglos y  $A_0$  es la cantidad inicial de carbono 14 al momento de morir.

- 4 La presión atmosférica  $p$ , medida en milímetros de mercurio, para alturas mayores de 10 km, viene dada por el modelo  $p(h) = 760 \cdot e^{-\frac{1}{8}h}$ , donde  $h$  está medido en km. ¿A qué altura la presión atmosférica es 55,8 mm de mercurio?

Reúnete con el mismo grupo con que trabajaste esta sección del Texto y realiza con ellos y ellas las siguientes actividades.

Desde la antigüedad, matemáticos de muchas culturas han tratado de llegar a un valor lo más exacto del número  $\pi$ , aquí pueden encontrar algunas de esas aproximaciones.

En el antiguo Egipto, según el papiro Rhind

$$\pi = \frac{256}{81}$$

Los matemáticos mesopotámicos decían que

$$\pi = 3 + \frac{1}{8}$$

Para los griegos

$$\pi = \frac{355}{113}$$

Ptolomeo, en el siglo II, decía que

$$\pi = \frac{377}{120}$$

En el siglo IX, Al-Jwarizmi afirmaba que

$$\pi = \frac{22}{7}$$

- 1 Con una calculadora científica completen la tabla. Cuando sea necesario entreguen sus resultados redondeados a 5 cifras decimales.

Papiro Rhind	Mesopotámicos	Griegos	Ptolomeo	Al-Jwarizmi

- 2 Con 5 cifras decimales el valor de  $\pi$  es 3,14159. Calculen el error porcentual cometido por cada matemático o cultura antigua al calcular el valor de este número.

Recuerda que el error porcentual se calcula:  $\frac{|\pi(\text{aproximado}) - 3,14159|}{3,14159} \cdot 100$ , se calcula el valor absoluto porque se debe entregar el valor positivo.

	Papiro Rhind	Mesopotámicos	Griegos	Ptolomeo	Al-Jwarizmi
Error %					

- 3 Comenten entre ustedes estos resultados. ¿Por qué creen que, a través de la historia, ha sido tan importante el número  $\pi$ ? Comenten sus conclusiones con sus compañeros.

---



---

Reúnete con tres compañeros o compañeras y repasen los temas de esta unidad. Luego, realicen las siguientes actividades.

### → Lección 1 - Tema 1 ¿Existen números que no sean racionales?



¿Cómo se llaman y qué características tienen los números que no son racionales?

R: \_\_\_\_\_

- 1 Encuentra el valor de cada número y clasifícalos según corresponda: (finitos, infinitos periódicos e infinitos semiperiódicos) y luego, responde las preguntas planteadas.

$\sqrt{1,44} =$ _____	
$\sqrt{5} =$ _____	
$\sqrt{4,9} =$ _____	
$\sqrt{17} =$ _____	

- a. ¿Cuáles representan desarrollos decimales finitos?

R: \_\_\_\_\_

- b. ¿Cuáles representan decimales infinitos periódicos o semiperiódicos?

R: \_\_\_\_\_

- c. ¿Cuáles no pertenecen a ninguna de las clasificaciones anteriores?

R: \_\_\_\_\_

### → Lección 1 - Tema 2 ¿Cómo se aproximan y ordenan los números irracionales?



¿Cuántas formas de aproximar números reales existen?, ¿cuáles son?

R: \_\_\_\_\_

- 1 Aproxima cada número según se indica.

- a.  $\sqrt{2}$ , por exceso a la milésima.

\_\_\_\_\_

- b.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ , por defecto a la centésima.

\_\_\_\_\_

- 2 Completa con  $<$ ,  $>$  o  $=$  según corresponda.

a.  $\sqrt{18}$  \_\_\_\_\_  $\sqrt{6}$

b.  $\sqrt{4} - 1$  \_\_\_\_\_  $\pi$

c.  $\sqrt{2} - 2$  \_\_\_\_\_  $\sqrt{2} - 1$

### → Lección 1 - Tema 3 ¿Cómo se puede calcular con números reales?



Define las operaciones básicas para los números reales: ¿qué diferencia existe con los conjuntos numéricos conocidos hasta ahora, es decir, naturales, enteros y racionales?

R: \_\_\_\_\_

- 1 Resuelve las siguientes adiciones y sustracciones de números reales.

a.  $\sqrt{9} + 8 =$  \_\_\_\_\_

b.  $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} =$  \_\_\_\_\_

- 2 Resuelve las siguientes multiplicaciones y divisiones de números reales.

a.  $\sqrt{9} \cdot \sqrt{5} =$  \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt{7} : \sqrt{49} =$  \_\_\_\_\_

➔ **Lección 2 - Tema 1 ¿Cuáles son las raíces enésimas?**



Construye un resumen con las propiedades que cumplen las raíces enésimas.

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**1** Escribe como raíz las siguientes potencias y calcule su valor cuando sea posible.

a.  $3125^{\frac{1}{5}} =$

b.  $(512)^{\frac{1}{3}} =$

c.  $\left(\frac{81}{6561}\right)^{\frac{1}{4}} =$

d.  $0,000729^{\frac{1}{6}} =$

e.  $(a - z)^{\frac{1}{9}} =$

f.  $(128a)^{\frac{1}{7}} =$

**2** Resuelve y reduce las siguientes expresiones utilizando las propiedades de raíces.

a.  $\sqrt{7} \sqrt{12} \sqrt{6} =$

b.  $\sqrt[3]{14} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} =$

c.  $\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{\frac{1}{7}} =$

d.  $\sqrt[5]{48} : \sqrt[5]{4} =$

e.  $\sqrt{3} : \sqrt{42} =$

f.  $\sqrt[4]{\frac{2}{7}} \cdot \sqrt[4]{\frac{8}{21}} =$

➔ **Lección 2 - Tema 2 ¿Cómo se representan las potencias de exponente fraccionario?**



Escribe la respuesta a la pregunta del título de este tema.

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**1** Expresa como potencia de exponente racional las siguientes raíces.

a.  $\sqrt[6]{7^8} =$

b.  $\sqrt[4]{3^5} =$

c.  $\sqrt[4]{2^3} =$

d.  $\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^6} =$

e.  $\sqrt[8]{(2x + y)^{13}} =$

f.  $\sqrt[3]{(abc)^7} =$

g.  $\sqrt[5]{\left[\frac{x-1}{4}\right]^6} =$

h.  $\sqrt[n]{\left(\frac{x}{y}\right)^m} =$

**2** Resuelve los siguientes ejercicios de raíces, aplicando la o las propiedades correspondientes.

a.  $\sqrt[4]{15^8} \cdot \sqrt[2]{15^3} =$

b.  $\sqrt[3]{24^5} \cdot \sqrt[5]{24^4} =$

c.  $\frac{\sqrt[3]{6^8}}{\sqrt[4]{6^3}} =$


d.  $\frac{\sqrt[7]{9^{10}}}{\sqrt[4]{9^5}} =$

e.  $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}} =$

f.  $\frac{\sqrt[9]{4^{14}} \cdot \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[9]{8^{20}}} =$

g.  $\frac{\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{25^{12}}}} =$

## ➔ Lección 2 - Tema 3 ¿Qué son los logaritmos?

 ¿Dónde debe estar la incógnita de una potencia para utilizar logaritmo en su resolución?  
Da al menos 5 ejemplos.

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**1** En cada ecuación calcula el valor  $x$  aplicando el concepto de logaritmo.

a.  $\log_3 x = 2$

b.  $\log_5 x = -1$

c.  $\log_{0,2} 32 = x$

d.  $\log_x \frac{1}{196} = -2$

e.  $\log_x \frac{1}{216} = -3$

f.  $\log_{25} x = \frac{5}{2}$

g.  $\log \sqrt{x} = \frac{1}{2}$

h.  $\log_{\sqrt{3}} x = -4$

**2** Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F) y justifica las respuestas.

a. \_\_\_\_\_  $\log \sqrt[n]{x^m} = \frac{n}{m} \log x$

b. \_\_\_\_\_  $\log_2 64 - \log_4 16 = 4$


c. \_\_\_\_\_ Si  $2^x = 5$ , entonces  $\log_5 2 = x^2$

d. \_\_\_\_\_ La expresión  $a^n = c$  es equivalente a  $\log_a n = c$ .

e. \_\_\_\_\_ Si  $\log_3(a + 1) = 1$ , entonces  $\log_a 8 = 3$ .

f. \_\_\_\_\_ Si  $\log_x 49 = -2$ , entonces  $x = \frac{1}{7}$ .

## ➔ Lección 2 - Tema 4 ¿Cuáles son las propiedades de los logaritmos?

 Nombra al menos 6 situaciones en que se utilicen logaritmos para resolverlas.

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**1** Resuelve las siguientes expresiones aplicando las propiedades de logaritmos.

a.  $\log_b b^3 + \log_b b - \log_b \left[ \frac{1}{b^4} \right] =$

b.  $\log_x (x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}) =$

c.  $\frac{\log_3 81 + \log_2 64}{\log 10000} =$

d.  $\frac{\log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_{0,001} 10^{-8}}{\log_{0,2} 5^{-4}} =$

e.  $\frac{\log_b a \cdot \log_a b}{\log 10} =$

f.  $\log 6b + \log \left[ \frac{b}{(a-b)} \right] + \log(a+b) =$

**2** Resuelve los siguientes problemas de aplicación de logaritmos.

a. ¿Cuántos años se debe esperar para que se triplique un depósito inicial de dos millones de pesos colocado a un interés anual de un 2%?

R: \_\_\_\_\_

b. Si la expresión  $\log E = 1,2 R + 1,8$  midiera, en ergios, la cantidad de energía de un sismo, donde  $R$  es la magnitud del sismo medida en la escala Richter. ¿Cuántos ergios se liberan en un sismo de 6 grados en la escala Richter?

R: \_\_\_\_\_



De acuerdo a los resultados que obtuviste en la evaluación de esta Unidad en el Texto, repasa cada tema y resuelve los ejercicios y problemas.

Lección 1, Tema 1

Reconocen números cuyo desarrollo decimal es infinito y no tiene período.

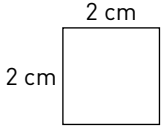
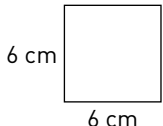
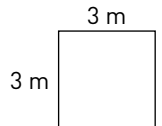
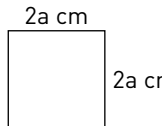
- 1** Analiza cada afirmación y escribe V o F según corresponda.
- a. \_\_\_\_\_ El número  $n$  se puede escribir de la forma  $\frac{a}{b}$ .
  - b. \_\_\_\_\_  $3\sqrt{8}$  es un número entero.
  - c. \_\_\_\_\_  $\frac{2}{3}$  es un número racional.
  - d. \_\_\_\_\_  $\varphi$  es el número de oro y pertenece al conjunto de los números racionales.
  - e. \_\_\_\_\_ Todas las raíces cuadradas son números irracionales.
  - f. \_\_\_\_\_  $3 - \sqrt{7}$  es un número entero.

Reconocen que los números irracionales no pueden escribirse como un cociente entre números enteros.

- 2** Analiza los siguientes números y escríbelos como cociente de números enteros cuando sea posible.
- a.  $\frac{\sqrt{2} - 7}{6} =$
  - b.  $\sqrt{18 - \frac{4}{2}} =$
  - c.  $6 - \sqrt{9} =$
  - d.  $\frac{\sqrt{5} - 5\sqrt{5}}{5} =$

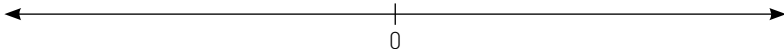
Lección 1, Tema 2

Determinan la existencia de raíces (cuadradas) de manera concreta, pictórica y simbólica.

- 3** Calcula la longitud de las diagonales de los siguientes cuadrados.
- a.  R: \_\_\_\_\_
  - b.  R: \_\_\_\_\_
  - c.  R: \_\_\_\_\_
  - d.  R: \_\_\_\_\_

- 4** Si el área de un cuadrado es 23, ¿cuánto mide la longitud del lado?  
R: \_\_\_\_\_

Representan números irracionales como puntos sobre la recta real.

- 5** Utilizando regla y compás, ubica en la recta numérica las siguientes raíces:  
 $-\sqrt{5}, \sqrt{2}, \sqrt{6}, -\sqrt{3}$
- 

Estiman y aproximan números irracionales.

- 6** Aproxima los siguientes números irracionales con dos cifras decimales.
- a.  $\sqrt{17}$  (por redondeo) R: \_\_\_\_\_
  - b.  $1 + \sqrt{23}$  (por exceso) R: \_\_\_\_\_
  - c.  $-\sqrt{8} - 1$  (por redondeo) R: \_\_\_\_\_
  - d.  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{4}}$  (por defecto) R: \_\_\_\_\_

## Lección 1, Tema 3

Utilizan la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces.

**7** Reduce las siguientes expresiones.

a.  $\sqrt{30} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} =$  \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}} =$  \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt{\frac{3}{2\sqrt{3}}} =$  \_\_\_\_\_

d.  $\frac{\sqrt{20} + \sqrt{35}}{\sqrt{5}} =$  \_\_\_\_\_

Operan con números racionales e irracionales.

**8** Resuelve los siguientes ejercicios.

a.  $4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} =$  \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt{16} - \frac{6}{11} + \sqrt{3} =$  \_\_\_\_\_

c.  $3\sqrt{5} \left( \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{5}{\sqrt{5}} \right) =$  \_\_\_\_\_

d.  $\left( \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{9}{4}} \right)^2 =$  \_\_\_\_\_

Resuelven problemas que involucren raíces en diferentes contextos.

**9** Resuelve los siguientes problemas.

a. Si el área de un cuadrado es  $37 \text{ m}^2$ , ¿cuál es la medida del lado del cuadrado?

R: \_\_\_\_\_

b. ¿Cuánto mide el radio de una esfera inscrita en un cubo cuyas caras miden  $21 \text{ cm}^2$  de superficie?

R: \_\_\_\_\_

Establecen relaciones entre potencias y raíces enésimas.

**10** Expresa como potencia de exponente racional las siguientes raíces.

a.  $\sqrt{0,64} =$  \_\_\_\_\_

e.  $\sqrt[4]{81} =$  \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt[3]{1331} =$  \_\_\_\_\_

f.  $\sqrt{0,49} =$  \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt[4]{4096} =$  \_\_\_\_\_

g.  $\sqrt[3]{0,125} =$  \_\_\_\_\_

d.  $\sqrt[5]{2a} =$  \_\_\_\_\_

h.  $\sqrt[6]{xy^3z} =$  \_\_\_\_\_

## Lección 2, Tema 1

Derivan y determinan propiedades relativas a multiplicaciones y divisiones con raíces (de igual índice).

**11** Calcula las siguientes multiplicaciones y divisiones de raíces de igual índice.

a.  $\sqrt[4]{1024} \cdot \sqrt[4]{4} =$  \_\_\_\_\_

b.  $\sqrt{16x^2} \cdot \sqrt{8x^4} =$  \_\_\_\_\_

c.  $\sqrt[7]{256} : \sqrt[7]{2} =$  \_\_\_\_\_

d.  $\sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[5]{3} =$  \_\_\_\_\_

e.  $\sqrt[4]{648} : \sqrt[4]{8} =$  \_\_\_\_\_

f.  $\sqrt[3]{320x^6} : \sqrt[3]{5x^3} =$  \_\_\_\_\_

Convierten desde un tipo de registro a otro; desde potencias a raíces y viceversa (...).

**12** Expresa como raíz las siguientes potencias de exponente racional.

- a.  $34^{\frac{3}{7}} =$
- b.  $63^{\frac{2}{11}} =$
- c.  $(ab)^{\frac{2}{3}} =$
- d.  $28^{\frac{5}{9}} =$
- e.  $\left(\frac{5}{14}\right)^{\frac{4}{13}} =$
- f.  $(x - 1)^{\frac{6}{3}} =$

**13** Escribe las siguientes raíces en forma de potencia.

- a.  $\sqrt[5]{27^6} =$
- b.  $\sqrt[3]{48^2} =$
- c.  $\sqrt[7]{4(2x^3 + 1)^6} =$
- d.  $\sqrt[3]{18^5} =$
- e.  $\sqrt[3]{(a - 1)^{18}} =$
- f.  $\sqrt[n]{(a^2 - b^2)^m} =$

Resuelven problemas que involucren raíces y números racionales.

**14** Resuelve los siguientes problemas.

- a. El cuadrado de un número más la cuarta parte del mismo número al cuadrado da como resultado 250. ¿Cuál es ese número?  
R: \_\_\_\_\_
- b. Si a un cubo de volumen  $380 \text{ cm}^3$  se le aumenta en 4 cm cada arista, ¿en cuántos centímetros cúbicos aumentará su volumen?  
R: \_\_\_\_\_
- c. Hace unos años Pedro tenía 24 años, que representan los  $\frac{2}{3}$  de su edad actual. ¿Qué edad tiene hoy Pedro?  
R: \_\_\_\_\_

Derivan y determinan propiedades relativas a multiplicaciones y divisiones con raíces (de distinto índice).

**15** Resuelve las siguientes multiplicaciones y divisiones de raíces de distinto índice.

- a.  $\sqrt[5]{35} \cdot \sqrt[4]{3} =$
- b.  $\sqrt[3]{4x^5} \cdot \sqrt[5]{4x^2} =$
- c.  $\frac{\sqrt[6]{5^8}}{\sqrt[3]{5^4}} =$
- d.  $\sqrt[3]{12^5} \cdot \sqrt[4]{12^8} =$
- e.  $\frac{\sqrt[3]{4^9}}{\sqrt[4]{4^5}} =$
- f.  $\frac{\sqrt[4]{(2a)^7}}{\sqrt[5]{(2a)^6}} =$

## Lección 2, Tema 3

Establecen relaciones entre potencias, raíces y logaritmos

**16** Encuentra el valor de los siguientes logaritmos expresándolos como potencias.

- $\log_2 8 =$
- $\log_5 \frac{1}{625} =$
- $\log \frac{1}{1000} =$
- $\log_{0,1} \frac{1}{100} =$
- $\log_{0,3} 0,027 =$
- $\log_6 \sqrt{\frac{1}{1296}} =$
- $\log_{\sqrt{3}} 9 =$
- $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} =$

Convierten desde un tipo de registro a otro: desde potencias a logaritmos y viceversa.

**17** Rescribe las siguientes igualdades utilizando logaritmos.

- |  |  |
|--|--|
| a. $6^2 = 36$ _____                                      | e. $9^3 = 729$ _____                             |
| b. $\sqrt{5^8} = 625$ _____                              | f. $0,8^2 = 0,64$ _____                          |
| c. $\left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{2187}{128}$ _____ | g. $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25} = 2$ _____ |
| d. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = c$ _____                | h. $(x - y)^2 = z$ _____                         |

## Lección 2, Tema 4

Resuelven problemas rutinarios y no rutinarios que involucran logaritmos

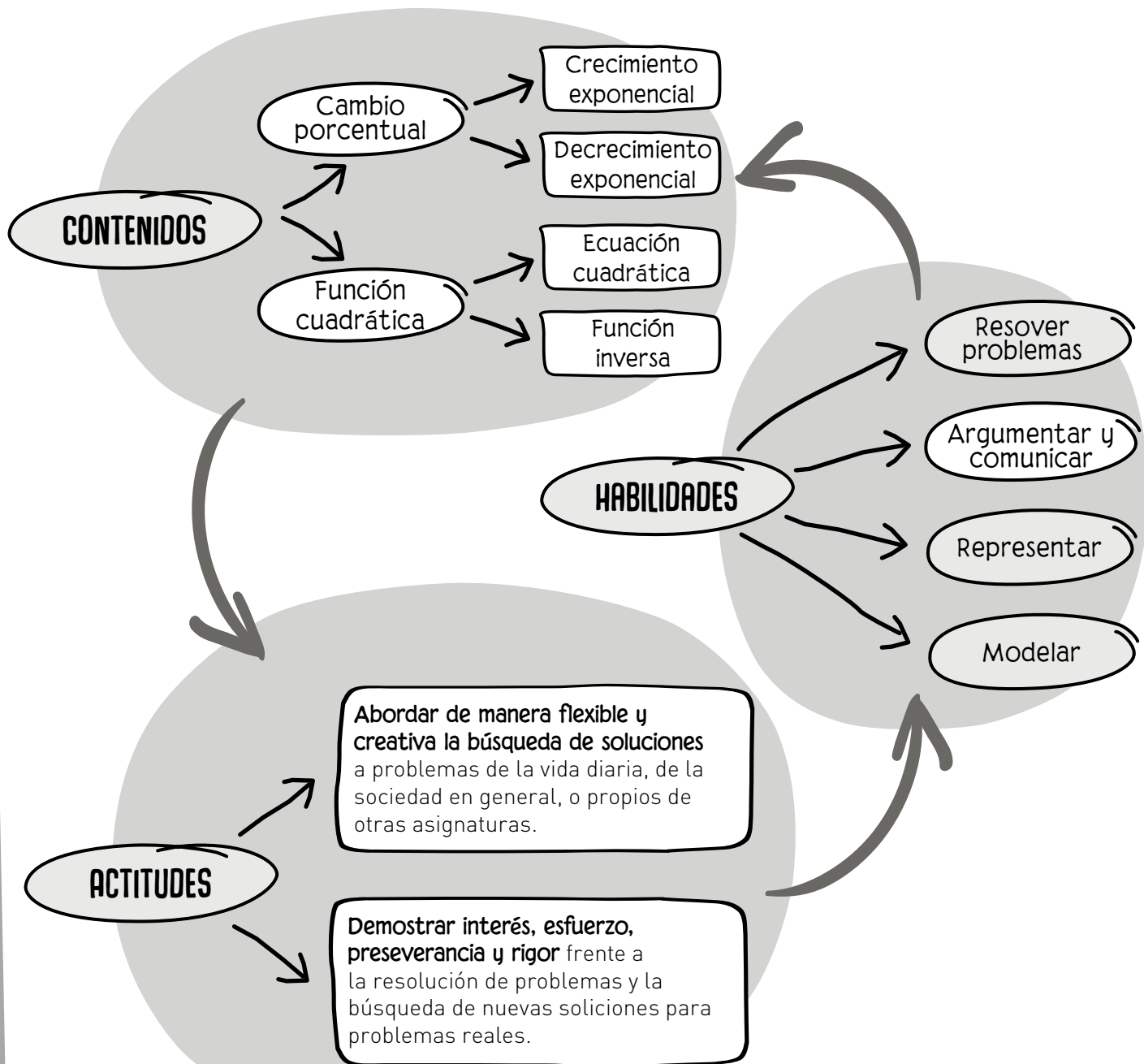
**18** Resuelve los siguientes problemas de aplicación de logaritmos.

- La población de un país dentro de  $t$  años está dada por la relación  $P(t) = 2 \cdot 3^{\frac{2t}{3}}$  millones de habitantes. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la población del país sea de 13,122 millones de habitantes?  
R: \_\_\_\_\_
- Una partícula se mueve con velocidad  $S(t) = ce^{-kt}$ , donde  $c$  y  $k$  son constantes. Si la velocidad inicial en  $t = 0$  es de 16 unidades por minuto, y en 2 minutos se reduce a la mitad, halla el valor de  $t$  cuando la velocidad es de 10 unidades/minuto.  
R: \_\_\_\_\_
- El crecimiento de un bosque viene dado por la función  $F(x) = A(1 + i)^t$ , donde  $F$  es la madera que habrá dentro de  $t$  años,  $A$  la madera actual, e  $i$  la tasa de crecimiento anual. Si la tasa de crecimiento anual  $i = 0,03$  y se mantiene constante, calcula el tiempo que tardará en triplicarse la madera del bosque.  
R: \_\_\_\_\_



# ÁLGEBRA Y FUNCIONES

Antes de comenzar a trabajar, observa el siguiente esquema que muestra los principales conceptos que estudiarás en esta unidad, las habilidades que desarrollarás y las actitudes que deberás mantener para alcanzar tus metas.



# Cambio porcentual

Repasa algunos contenidos que utilizarás durante esta lección.

- 1 Calcula el porcentaje solicitado en cada caso.
  - a. El 35% de 28 000 \_\_\_\_\_
  - b. El 12% de 7500 \_\_\_\_\_
  - c. El 52% de 12 640 \_\_\_\_\_
  - d. El 0,1% de 345 \_\_\_\_\_
  - e. El 90% de 17 990 \_\_\_\_\_
  - f. El 81% de 9790 \_\_\_\_\_
- 2 Calcula el 100% de cada magnitud.
  - a. El 8% es 50 \_\_\_\_\_
  - b. El 20% es 48 500 \_\_\_\_\_
  - c. El 90% es 12 000 \_\_\_\_\_
  - d. El 0,05% es 1000 \_\_\_\_\_
  - e. El 55% es 350 000 \_\_\_\_\_
  - f. El 9% es 0,01 \_\_\_\_\_
- 3 Determina a qué porcentaje corresponde una cierta cantidad del total.
  - a. 52 de 350 \_\_\_\_\_
  - b. 1500 de 100 000 \_\_\_\_\_
  - c. 3 de 325 000 \_\_\_\_\_
  - d. 555 de 11 000 \_\_\_\_\_
  - e. 7500 de 15 000 \_\_\_\_\_
  - f. 49 de 150 \_\_\_\_\_

- 4 Una persona aumenta su masa de 68 kg a 85 kg. ¿En qué porcentaje aumentó su masa?

R: \_\_\_\_\_

- 5 Un artículo fue comprado en \$800 y vendido en \$1000. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

R: \_\_\_\_\_

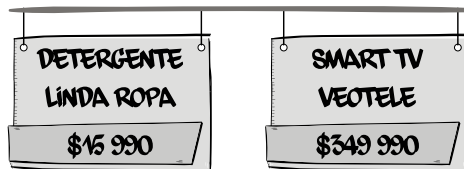
- 6 Una persona que escribía 60 palabras por minuto aumenta a 72 palabras por minuto. ¿Cuál es su porcentaje de aumento?

R: \_\_\_\_\_

- 7 Si el perímetro de un cuadrado se duplica, ¿en qué porcentaje aumenta su área?

R: \_\_\_\_\_

- 8 Un supermercado coloca en su vitrina los siguientes productos con sus respectivos precios.



- a. Si los detergentes están con un 32% de descuento, ¿cuánto debe pagar una persona que compra 4 unidades de este producto?

R: \_\_\_\_\_

- b. ¿Cuál es el precio del Smart Tv si se le aplica un descuento del 22%?

R: \_\_\_\_\_

Recuerda que el porcentaje es una comparación por cociente con el total de 100.

Recuerda que, para calcular el porcentaje de aumento o disminución, puedes plantear una ecuación lineal del tipo  $xa = b$ , donde  $x$  es el porcentaje buscado,  $a$  es la cantidad original y  $b$  la cantidad final.

Recuerda que para calcular el porcentaje de aumento o disminución siempre se compara con la cantidad inicial.

## Tema 1 ¿Qué se entiende por cambio porcentual?

### Practico

- 1** Analiza cada afirmación. Luego, escribe V o F según corresponda.
- Al subir el precio de un producto en un 22%, el índice de variación es 0,78.
  - Para calcular la temperatura de un cuerpo se aplicó un índice de variación de 0,11; por lo tanto, el cuerpo experimentó un cambio porcentual negativo de temperatura.
  - El efecto de un medicamento tiene un cambio porcentual negativo del 15% después de una hora de haberlo tomado. Entonces, el índice de variación asociado equivale a 1,15.
  - Si el sueldo base de un trabajador pasó de \$180 000 a \$210 000 mensuales, entonces tuvo un cambio porcentual positivo.

- 2** Determina si las siguientes expresiones representan un crecimiento o un decrecimiento porcentual constante.

- $1300 \cdot 0,75^2$   
\_\_\_\_\_ Crecimiento \_\_\_\_\_ Decrecimiento
- $100\,000 \cdot 2,01^3$   
\_\_\_\_\_ Crecimiento \_\_\_\_\_ Decrecimiento
- $2\,500\,000 \cdot 0,1^5$   
\_\_\_\_\_ Crecimiento \_\_\_\_\_ Decrecimiento
- $2\,500\,000 \cdot 1,04^7$   
\_\_\_\_\_ Crecimiento \_\_\_\_\_ Decrecimiento
- $576 \cdot 0,25^9$   
\_\_\_\_\_ Crecimiento \_\_\_\_\_ Decrecimiento

- 3** Identifica el valor inicial y el porcentaje de crecimiento o decrecimiento en cada caso.

- $325\,000 \cdot 1,01^n$   
Valor inicial \_\_\_\_\_  
Porcentaje \_\_\_\_\_
- $8000 \cdot 0,2^n$   
Valor inicial \_\_\_\_\_  
Porcentaje \_\_\_\_\_

- 4** Un crecimiento mensual porcentual constante está dado por  $C = 10\,000 \cdot 1,5^n$ . Completa la tabla.

Mes (n)	Capital (C)
0	
1	
2	
3	
4	
5	

- 5** Si  $C = 5\,500\,000 \cdot 0,09^n$ . Completa la tabla.

Mes	Capital (\$)
0	
1	
2	
3	
4	
5	

- 6** Identifica el cambio porcentual y el índice de variación de cada situación.

- La población canina de una ciudad aumentó un quinto de un año a otro.  
R: \_\_\_\_\_
- El precio de un reloj disminuirá un 5% durante los días de oferta.  
R: \_\_\_\_\_
- Un nuevo modelo de vehículo aumentará su rendimiento en un 12% con respecto al modelo anterior.  
R: \_\_\_\_\_
- Un deportista incrementará las kilocalorías de su dieta en un 10%.  
R: \_\_\_\_\_
- Las ventas de un restaurante disminuyeron una cuarta parte por las ofertas de inauguración de otro restaurante cercano.  
R: \_\_\_\_\_

## Me desafío

- 1** Un televisor, originalmente comprado en \$799 999, se deprecia en un 20 % cada año. ¿Cuál es el valor de dicho televisor al tercer año después de comprado?  
R: \_\_\_\_\_
- 2** Si el valor  $x$  de una propiedad crece anualmente en forma constante a razón del 5 %, ¿cuál es el valor de la propiedad al finalizar el tercer año?  
R: \_\_\_\_\_
- 3** Si un crecimiento mensual porcentualmente constante está dado por  $C(n) = 500\,000 \cdot 1,03^n$ , ¿cuántos meses deben pasar para triplicar su valor inicial?  
R: \_\_\_\_\_
- 4** Si un decrecimiento mensual porcentualmente constante está dado por  $C(n) = 7\,999\,000 \cdot 0,12^n$ .
- a.** ¿Cuál es porcentaje de decrecimiento?  
R: \_\_\_\_\_
- b.** ¿Cuál es el valor al finalizar el segundo mes?  
R: \_\_\_\_\_
- c.** ¿Cuántos meses deben pasar para que el valor inicial se reduzca a la tercera parte?  
R: \_\_\_\_\_
- 5** Si un crecimiento anual porcentualmente constante está dado por  $C(n) = 25 \cdot 1,2^n$ :
- a.** ¿Cuál es el porcentaje de crecimiento?  
R: \_\_\_\_\_
- b.** ¿Cuál es el valor tras finalizar el décimo año?  
R: \_\_\_\_\_
- c.** ¿Cuántos años deben pasar para duplicar su valor inicial?  
R: \_\_\_\_\_
- 6** El valor de un auto de colección crece en forma constante a un ritmo del 13 %. ¿Cuántos años deben transcurrir para que el valor del auto se duplique?  
R: \_\_\_\_\_
- 7** Una casa que fue comprada en \$80 000 000, incrementa su valor año tras año en forma constante a un ritmo de 7 % en forma anual.
- a.** ¿Cuántos años deben transcurrir para que el valor de la casa aumente en un 50 %?  
R: \_\_\_\_\_
- b.** ¿Cuántos años deben transcurrir para que el valor de la casa supere los \$100 000 000?  
R: \_\_\_\_\_
- 8** Si las ventas de departamentos de un ambiente, en la comuna de Santiago, cerraron el primer semestre de este año al alza en un 20 %.
- a.** ¿Cuál es la cantidad de departamentos vendidos el semestre anterior, si luego del alza se habían vendido 2500 departamentos?  
R: \_\_\_\_\_
- b.** Si el alza se mantiene porcentualmente constante, ¿cuántos departamentos se venderán un año después?  
R: \_\_\_\_\_
- 9** Si una cantidad decrece porcentualmente, en forma constante, a un ritmo del 15 % en forma mensual.
- a.** ¿Cuántos meses deben transcurrir para que la cantidad mencionada se reduzca a más de la mitad?  
R: \_\_\_\_\_
- b.** ¿Cuántos años deben transcurrir para que se reduzca a la quinta parte?  
R: \_\_\_\_\_
- 10** En un consultorio municipal se atendieron 230 personas en junio. En julio, la atención aumentó un 10 %.
- a.** ¿Cuál es el índice de variación asociado?  
R: \_\_\_\_\_
- b.** Si el incremento se mantiene el resto del año, ¿cuántos pacientes se atenderán en diciembre?  
R: \_\_\_\_\_



## → Tema 2 ¿En qué se aplica el interés compuesto?

### Practico

- 1 Explica con tus palabras los siguientes conceptos, relacionados con las aplicaciones del cambio porcentual.
  - a. Interés simple: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
  - b. Interés compuesto: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
  - c. Capital: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
  - d. Período: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- 2 Completa la ecuación que permite resolver las siguientes situaciones.
  - a. El precio de un chaleco aumentado en el 10% es \$8500. ¿Cuál es el precio original del chaleco?  
\_\_\_\_\_  $x = 8500$
  - b. La edad del padre disminuida en un 75% equivale a la edad del hijo, es decir, 12 años. ¿Cuál es la edad del padre?  
\_\_\_\_\_  $x = 12$
  - c. Si el precio de un libro es \$12500, ¿cuál es el valor sin IVA?  
\_\_\_\_\_  $x = 12500$
- 3 Resuelve las ecuaciones planteadas en el ejercicio anterior.
  - a.  $x =$  \_\_\_\_\_
  - b.  $x =$  \_\_\_\_\_
  - c.  $x =$  \_\_\_\_\_
- 4 Identifica las variables y escribe la función. Luego, responde el problema.
  - a. Camila deposita \$700 000 en un banco, el cual le ofrece un 3% de interés anual. ¿Cuánto dinero tendrá ahorrado al final del año?  
Capital inicial: \_\_\_\_\_  
Tasa de interés: \_\_\_\_\_  
Período de tiempo: \_\_\_\_\_  
Función: \_\_\_\_\_  
R: \_\_\_\_\_

- b. ¿Cuánto dinero deberá ahorrar o invertir una persona a una tasa del 5% anual para obtener como ganancia \$1 470 000 al cabo de un año?  
Capital inicial: \_\_\_\_\_  
Tasa de interés: \_\_\_\_\_  
Período de tiempo: \_\_\_\_\_  
Función: \_\_\_\_\_  
R: \_\_\_\_\_

- 5 Los costos de mantención de un condominio se incrementan en un 10% cada año. El condominio se inauguró en 2010 y el costo de ese año fue de \$10 150 000.  
Representa gráficamente el cambio porcentual.

- 6 Una tienda vendió 2500 unidades de un modelo de celular. Luego, las ventas disminuyeron mensualmente un 5%.  
Representa gráficamente el cambio porcentual.

## Me desafío

- 1** En cierto lugar el costo de la vida ha ido aumentando de tal manera que lo que ahora cuesta \$500, en  $t$  años costará  $\$(500 \cdot 1,03^t)$ .
- ¿Cuánto costará ese objeto en 8 años más?  
R: \_\_\_\_\_
  - Suponiendo que el modelo puede utilizarse para el pasado, ¿cuánto costaba ese objeto hace 5 años?  
R: \_\_\_\_\_
- 2** Las inversiones en un país han perdido el 2% de su valor cada año. Si se ha invertido \$200 000, ¿cuál será su valor en 5 años más?  
R: \_\_\_\_\_
- 3** Una persona depositó en el banco un capital de \$3 000 000 con una tasa de interés compuesto anual del 5%.
- ¿Cuál es el capital que tendrá al finalizar el primer año?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos años debe esperar para que su capital supere los \$5 000 000?  
R: \_\_\_\_\_
- 4** A un capital se le aplicó una tasa de interés del 5% anual y aumentó de \$3 200 000 a \$4 084 101 en el banco.
- ¿Cuántos años estuvo en el banco?  
R: \_\_\_\_\_
  - Si no se saca el dinero del banco, ¿a cuánto ascenderá el monto luego de 10 años?  
R: \_\_\_\_\_
- 5** En una empresa, se determina que una máquina, valorizada inicialmente en \$ 10 000 000, pierde cada año un 30% de su valor por desperfectos.
- ¿Dentro de cuántos años el valor de la máquina será de \$2 401 000?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál será el valor de la máquina en  $t$  años?  
R: \_\_\_\_\_
- 6** Una cierta ciudad tenía una población de 250 000 personas en 1985 y alcanzó los 490 000 habitantes en 1995. El aumento de la población no es constante sino proporcional al aumento de sus habitantes.
- ¿Qué expresión modela la cantidad de habitantes entre 1985 y 1990?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos habitantes tenía la ciudad en 1990?  
R: \_\_\_\_\_
- 7** Una persona deposita \$6 000 000 en un banco con una tasa de interés anual del 3%.
- Al finalizar el primer año, ¿cuál será su capital?  
R: \_\_\_\_\_
  - Al finalizar el primer año, ¿cuánto obtuvo de ganancias?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es el capital que obtendrá al finalizar el segundo año?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿A los cuántos años su capital superará los \$10 000 000?  
R: \_\_\_\_\_
- 8** Una persona deposita \$300 000 en un banco con una tasa de interés anual del 4%.
- ¿Cuál será su capital al finalizar el cuarto año?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál será su capital al finalizar el décimo año?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos años deberá mantener su dinero en la cuenta para que este supere el millón de pesos?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿A los cuántos años su capital se duplica?  
R: \_\_\_\_\_

Reforzamiento

Según tus resultados en la evaluación de la lección, repasa los temas que consideres necesarios.

Es necesario que seas capaz de identificar cambios porcentuales y crecimiento o decrecimientos porcentuales.

No olvides que puedes expresar como ecuaciones las situaciones que involucren cambios porcentuales, ya sean crecientes o decrecientes.

**1** Identifica el error en cada afirmación. Luego, corrígelo.

a. La función  $C(n) = 1500 \cdot 0,8n$  representa un crecimiento porcentual constante.

Error: \_\_\_\_\_

Corrección: \_\_\_\_\_

b. El valor inicial representado por la función  $C(n) = 64\,530 \cdot 1,08n$  es 69 692,4.

Error: \_\_\_\_\_

Corrección: \_\_\_\_\_

c. Si la función  $C(n) = 1\,150\,500 \cdot 0,05n$  representa la desvalorización de un producto tecnológico al pasar los años, entonces el porcentaje de decrecimiento anual es de un 0,05%.

Error: \_\_\_\_\_

Corrección: \_\_\_\_\_

**2** Para el cambio de temporada, en una tienda se tiene una función que modela la desvalorización diaria de una prenda de vestir durante una semana. Si el precio inicial de la prenda era de \$37 500 y deprecia diariamente a un 50%.

a. ¿Cuál es la función que representa el cambio en el precio del producto en esa semana?

R: \_\_\_\_\_

b. Al cabo de 3 días, ¿cuál será el valor de la prenda?

R: \_\_\_\_\_

**3** Determina la ecuación del cambio porcentual asociada a cada situación.

a. El precio del limón los últimos meses se ha incrementado en un 105%.

R: \_\_\_\_\_

b. El precio de la bencina disminuyó en un 0,02%.

R: \_\_\_\_\_

c. El dólar ha aumentado con respecto al año 2015 en un 20,5%.

R: \_\_\_\_\_

**4** Marco depositó \$650 000 en una cuenta de ahorro que incrementa su valor con una tasa de interés compuesto anual del 10%.

a. ¿Cuántos años debe esperar para que su capital supere los \$2 500 000?

R: \_\_\_\_\_

b. ¿Cuál es el capital que tendrá al finalizar el octavo año?

R: \_\_\_\_\_

## Profundización

- 1 Analiza las afirmaciones con respecto a la situación dada. Luego, escribe V o F según corresponda, justificando en cada caso.

El arancel anual de una carrera de salud en el año 2002 era de \$1 930 000 y ha incrementado su valor en un 4,5% cada año.

- a. \_\_\_\_\_ El valor del arancel de la carrera el año 2008 era \$2 405 131,14  
Justificación: \_\_\_\_\_
- b. \_\_\_\_\_ Para determinar el valor del arancel en 4 años, se puede utilizar la expresión  $C(4) = 0,0454$ .  
Justificación: \_\_\_\_\_
- c. \_\_\_\_\_ 2012 es el año en el que se alcanzó al menos \$2 744 6541 de arancel anual.  
Justificación: \_\_\_\_\_
- d. \_\_\_\_\_ La ecuación del cambio porcentual está dada por  $f(t + 1) = 1,045 \cdot f(t)$ .  
Justificación: \_\_\_\_\_

- 2 El costo de mantención de una piscina fue de \$450 500 en 2014. Sin embargo, el año siguiente este costo aumentó a \$474 827.

- a. ¿Cuál fue el incremento porcentual asociado?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la ecuación del cambio porcentual?  
R: \_\_\_\_\_
- c. Completa la tabla y grafica el cambio porcentual.

Tiempo (Años)	Costo (\$)
2014	450 500
2015	474 827
2016	
2017	
2018	

- 3 Durante el año 1990 los casos de pacientes infectados por un virus nuevo alcanzaron 100 000 000. En el año 1995, esta cifra aumentó a 105 101 005 infectados.

- a. ¿Cuál es la tasa de incremento presente en la situación?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la cifra alcance a 112 682 503 infectados?  
R: \_\_\_\_\_
- c. ¿Cuántos infectados habrá en el año 2020?  
R: \_\_\_\_\_

# Ecuaciones cuadráticas

Repasa algunos contenidos que utilizarás durante esta lección.

**1** Resuelve los siguientes productos notables.

a.  $(a + b)^2 =$  \_\_\_\_\_

b.  $(a - b)(a + b) =$  \_\_\_\_\_

c.  $(x - 8)(x + 3) =$  \_\_\_\_\_

d.  $(2y + 7)(2y - 6) =$  \_\_\_\_\_

e.  $(5x - 4y)^2 =$  \_\_\_\_\_

f.  $(x + 2)(x + 3) =$  \_\_\_\_\_

g.  $\left(q - \frac{1}{2}p\right)\left(q + \frac{1}{2}p\right) =$  \_\_\_\_\_

h.  $\left(y - \frac{1}{4}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) =$  \_\_\_\_\_

i.  $\left(\frac{1}{2}x + 5\right)^2 =$  \_\_\_\_\_

j.  $\left(y + \frac{2}{5}\right)\left(y - \frac{2}{5}\right) =$  \_\_\_\_\_

**2** Factoriza las siguientes expresiones algebraicas.

a.  $6am + 18ac =$  \_\_\_\_\_

b.  $16p^2 - 144q^2 =$  \_\_\_\_\_

c.  $a(b + c) + p(c + b) =$  \_\_\_\_\_

d.  $2ax + 2ay + 3bx + 3by =$  \_\_\_\_\_

e.  $x^2 - 36y^4 =$  \_\_\_\_\_

f.  $4x^2 + 20xb + 25b^2 =$  \_\_\_\_\_

g.  $x^2 - 11x - 26 =$  \_\_\_\_\_

h.  $x^2 + 28x + 95 =$  \_\_\_\_\_

i.  $x^2 - 6xy + 5y^2 =$  \_\_\_\_\_

**3** Completa el término que falta en cada expresión para que corresponda a un cuadrado de binomio y factoriza.

a.  $25a^2 - 30ab +$  \_\_\_\_\_  $=$  \_\_\_\_\_

b.  $4x^2 + 4x +$  \_\_\_\_\_  $=$  \_\_\_\_\_

c. \_\_\_\_\_  $- \frac{1}{5}xy + \frac{4}{25}y^2 =$  \_\_\_\_\_

d. \_\_\_\_\_  $+ 90abd^2 + 81d^4 =$  \_\_\_\_\_

e.  $\frac{1}{25}x^2 + \frac{9}{5}x +$  \_\_\_\_\_  $=$  \_\_\_\_\_

f.  $\frac{4}{9}y^2 - 4y +$  \_\_\_\_\_  $=$  \_\_\_\_\_

g. \_\_\_\_\_  $+ 27z + 8 =$  \_\_\_\_\_

Para poder factorizar es útil recordar los patrones de los productos notables.

En una primera instancia deberás resolver ecuaciones cuadráticas factorizando. ¿Recuerdas cómo factorizar?

Para poder deducir una fórmula general de las soluciones de una ecuación cuadrática, deberás recordar cómo completar el cuadrado de binomio.

## → Tema 1 ¿Cuándo se dice que una ecuación es cuadrática?

### Practico

- 1 Indica cuáles de las siguientes ecuaciones son cuadráticas.

a.  $x^2 - 5x = 0$

Sí: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_

b.  $(4 - 3x)^2 = 64$

Sí: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_

c.  $x^2 = \left(x - \frac{2}{3}\right)$

Sí: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_

d.  $x^2 = -6x - 8$

Sí: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_

e.  $x(x\sqrt{2} + 2) = x\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

Sí: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_

f.  $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$

Sí: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_

g.  $x^2 - 5 = y^2 + 3$

Sí: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_

h.  $(2x - 4)^2 = 2x(x - 2)^2 + 48$

Sí: \_\_\_\_\_ No: \_\_\_\_\_

- 2 Escribe las siguientes ecuaciones cuadráticas de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ . Luego, identifica a, b y c en cada caso.

a.  $\frac{3}{5}x(x - 4) - \frac{1}{2}(x - 3) = 2$

R: \_\_\_\_\_

a: \_\_\_\_\_ b: \_\_\_\_\_ c: \_\_\_\_\_

b.  $(x + 1)^2 - 2x(x - 1) = 2x$

R: \_\_\_\_\_

a: \_\_\_\_\_ b: \_\_\_\_\_ c: \_\_\_\_\_

c.  $(x - 3)(x - 4) = 12$

R: \_\_\_\_\_

a: \_\_\_\_\_ b: \_\_\_\_\_ c: \_\_\_\_\_

d.  $(x - 2) + (x - 3) = 9x + 6$

R: \_\_\_\_\_

a: \_\_\_\_\_ b: \_\_\_\_\_ c: \_\_\_\_\_

e.  $x(2x + 4) - 83 = 24 - 4x$

R: \_\_\_\_\_

a: \_\_\_\_\_ b: \_\_\_\_\_ c: \_\_\_\_\_

a: \_\_\_\_\_ b: \_\_\_\_\_ c: \_\_\_\_\_

- 3 Determina la ecuación de segundo grado con una incógnita según sus coeficientes. Para ello, completa la tabla.

	a	b	c	Ecuación
a.	-7	2	5	
b.	3	0	-10	
c.	$\sqrt{3}$	4	$-\frac{3}{8}$	
d.	$\frac{1}{2}$	-3	0	
e.	-2	$\sqrt{3}$	$\frac{5}{9}$	
f.	10	-25	-38	

- 4 Analiza cada afirmación. Luego, escribe V o F según corresponda. Justifica en cada caso.

a. (\_\_\_\_)  $-5x^2 = 0$  es una ecuación de segundo grado con una incógnita.

b. (\_\_\_\_) El término c de la ecuación de segundo grado  $x(x + 5) = 0$  es 5.

c. (\_\_\_\_) Los coeficientes de una ecuación de segundo grado pueden ser números negativos.

d. (\_\_\_\_) En una ecuación de segundo grado el exponente mayor de la incógnita es 2.

e. (\_\_\_\_)  $6x + 3 = x(x + 2)$  es una ecuación de segundo grado con una incógnita.

f. (\_\_\_\_) Los términos de la ecuación cuadrática  $x(3x + 4) = 2(x + 5)$  son  $a = 3$ ,  $b = 2$  y  $c = 10$ .

- 5 Andrea está resolviendo el siguiente problema: Si el área de un cuadrado es  $64 \text{ cm}^2$ , ¿cuánto mide el lado del cuadrado?

Para ello, Andrea escribe la ecuación cuadrática  $x^2 = 64$  y afirma que 8 y  $-8$  son las soluciones de la ecuación y del problema. ¿Cuál es su error? Justifica tu respuesta.

R: \_\_\_\_\_

## Me desafío

- 1** Plantea la ecuación cuadrática que permite resolver el siguiente problema. Luego, escribe los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  en cada caso.
- a.** Encuentra dos números naturales consecutivos cuyo producto sea 272.  
Ecuación: \_\_\_\_\_  
a: \_\_\_\_\_ b: \_\_\_\_\_ c: \_\_\_\_\_
- b.** Encuentra dos números pares consecutivos cuyo producto sea 80.  
Ecuación: \_\_\_\_\_  
a: \_\_\_\_\_ b: \_\_\_\_\_ c: \_\_\_\_\_
- c.** Encuentra dos números impares consecutivos cuyo producto sea 483.  
Ecuación: \_\_\_\_\_  
a: \_\_\_\_\_ b: \_\_\_\_\_ c: \_\_\_\_\_
- d.** Encuentra dos números pares consecutivos cuyo producto sea 4224.  
Ecuación: \_\_\_\_\_  
a: \_\_\_\_\_ b: \_\_\_\_\_ c: \_\_\_\_\_
- e.** Encuentra dos números impares consecutivos cuyo producto sea 1023.  
Ecuación: \_\_\_\_\_  
a: \_\_\_\_\_ b: \_\_\_\_\_ c: \_\_\_\_\_
- f.** Encuentra dos números naturales consecutivos cuyo producto sea 15750.  
Ecuación: \_\_\_\_\_  
a: \_\_\_\_\_ b: \_\_\_\_\_ c: \_\_\_\_\_
- g.** Dentro de 11 años la edad de Isabel será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Isabel.  
Ecuación: \_\_\_\_\_  
a: \_\_\_\_\_ b: \_\_\_\_\_ c: \_\_\_\_\_
- h.** Para cercar una parcela rectangular de  $750 \text{ m}^2$  se han utilizado 110 m de alambre. Calcula las dimensiones de la parcela.  
Ecuación: \_\_\_\_\_  
a: \_\_\_\_\_ b: \_\_\_\_\_ c: \_\_\_\_\_
- 2** Escribe un problema y una ecuación cuadrática que permita resolverlo.  
Problema: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- Ecuación: \_\_\_\_\_

- 3** Explica por qué  $x = 2$  es una solución de la ecuación  $3x + 2 = 2x + 4$ .  
R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- 4** Para cada ecuación determina si los valores de la incógnita dados son o no soluciones.
- a.**  $x^2 - 2x - 15 = 0$   
\_\_\_\_\_  $x = 5$     \_\_\_\_\_  $x = 3$
- b.**  $x^2 - 8x - 20 = 0$   
\_\_\_\_\_  $x = 10$     \_\_\_\_\_  $x = -2$
- c.**  $x^2 - 2x - 8 = 0$   
\_\_\_\_\_  $x = 4$     \_\_\_\_\_  $x = -4$
- d.**  $x^2 + 6x + 9 = 0$   
\_\_\_\_\_  $x = 3$     \_\_\_\_\_  $x = -3$
- 5** Si  $x = 5$  es solución de la ecuación  $ax^2 - 6x - 45 = 0$ , ¿cuál es el valor de  $a$ ?  
R: \_\_\_\_\_
- 6** Si  $x = -10$  es solución de la ecuación la ecuación  $2x^2 + bx + 160 = 0$ , ¿cuál es el valor de  $b$ ?  
R: \_\_\_\_\_
- 7** Si  $x = 11$  es solución de la ecuación la ecuación  $6x^2 - 60x - c = 0$ , ¿cuál es el valor de  $c$ ?  
R: \_\_\_\_\_
- 8** Inventa dos ecuaciones de segundo grado para cada condición dada.
- a.** Sus coeficientes son números enteros positivos consecutivos.  
Ecuación 1: \_\_\_\_\_  
Ecuación 2: \_\_\_\_\_
- b.** Uno de sus coeficientes es cero y otro es irracional.  
Ecuación 1: \_\_\_\_\_  
Ecuación 2: \_\_\_\_\_
- c.** Sus coeficientes suman cero, pero ninguno de ellos es cero.  
Ecuación 1: \_\_\_\_\_  
Ecuación 2: \_\_\_\_\_

## Tema 2 ¿En qué consiste la resolución por factorización?

### Practico

1 Identifica cuál de las ecuaciones tiene las raíces dadas. Escribe SÍ o NO, según corresponda.

a.  $x_1 = 2, x_2 = 3$

( )  $(x - 2)(x + 3) = 0$

( )  $(x - 2)(x - 3) = 0$

( )  $(x + 2)(x + 3) = 0$

b.  $x_1 = -1, x_2 = -4$

( )  $(x - 1)(x - 4) = 0$

( )  $(x + 1)(x + 4) = 0$

( )  $(x + 1)(x - 4) = 0$

2 Escribe de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  que tenga las raíces dadas en cada caso.

a.  $x_1 = 4, x_2 = 7$

R: \_\_\_\_\_

b.  $x_1 = -2, x_2 = 5$

R: \_\_\_\_\_

c.  $x_1 = 10, x_2 = 10$

R: \_\_\_\_\_

d.  $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$

R: \_\_\_\_\_

e.  $x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = \frac{1}{2}$

R: \_\_\_\_\_

3 Factoriza y resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a.  $x^2 - 2x - 35 = 0$

Ecuación: \_\_\_\_\_

$x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

b.  $x^2 - 6x - 40 = 0$

Ecuación: \_\_\_\_\_

$x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

c.  $x^2 + x - 30 = 0$

Ecuación: \_\_\_\_\_

$x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

d.  $x^2 + 15x + 56 = 0$

Ecuación: \_\_\_\_\_

$x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

e.  $x^2 + 7x + 12 = 0$

Ecuación: \_\_\_\_\_

$x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

f.  $x^2 + 6x + 5 = 0$

Ecuación: \_\_\_\_\_

$x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

4 Asocia cada ecuación de segundo grado con una factorización. Para ello, escribe la letra de la tabla correspondiente en cada ecuación.

<b>A</b> $(\sqrt{3}x + 5)(\sqrt{3}x - 5) = 0$	<b>D</b> $(x - \frac{3}{4})(4x + 8) = 0$
<b>B</b> $(2x - 7)^2 = 0$	<b>E</b> $5(x - 3)(x + 8) = 0$
<b>C</b> $(3x - 8)(5x - 2) = 0$	<b>F</b> $10x(x + 4) = 0$

a.  $4x^2 - 28x + 49 = 0 \rightarrow \text{_____}$

b.  $3x^2 - 25 = 0 \rightarrow \text{_____}$

c.  $5x^2 + 25x - 120 = 0 \rightarrow \text{_____}$

d.  $4x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow \text{_____}$

e.  $10x^2 + 40x = 0 \rightarrow \text{_____}$

f.  $15x^2 - 46x + 16 = 0 \rightarrow \text{_____}$

5 Resuelve las ecuaciones del ejercicio anterior.

a.  $x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

b.  $x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

c.  $x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

d.  $x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

e.  $x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

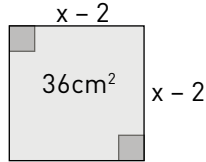
f.  $x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$



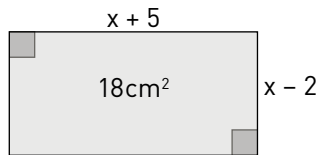
**Me desafío**

- 1 Con la información de cada figura, plantea una ecuación cuadrática y encuentra, si es posible, la longitud de los lados.

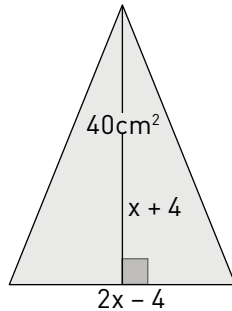
a. R: \_\_\_\_\_



b. R: \_\_\_\_\_



c. R: \_\_\_\_\_



**Nota:** Resuelve los problemas siguientes planteando una ecuación cuadrática.

- 2 Si la suma de los cuadrados de tres números naturales consecutivos es 302, ¿cuáles son los números?

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

- 3 La suma de los cuadrados de dos números naturales pares consecutivos es 1060. ¿Cuáles son los números?

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

- 4 La diferencia de dos números enteros positivos es 4 y la suma de sus cuadrados es 730. ¿Cuáles son los números?

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

- 5 El lado mayor de un rectángulo excede en 10 cm al lado menor. Si la diagonal mide 50 cm, ¿cuál es el perímetro del rectángulo?

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

- 6 El producto de la edad de una persona por 15 tiene 100 unidades menos que el cuadrado de su edad. ¿Cuántos años tiene la persona?

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

- 7 El área de un rectángulo es de  $360 \text{ m}^2$  y el largo excede al ancho en dos unidades. Calcula el perímetro del rectángulo.

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

- 8 Encuentra dos números naturales consecutivos cuyo producto sea 272.

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

- 9 Se tienen tres números consecutivos tales que el mayor dividido por el menor resulta ser  $\frac{3}{10}$  el del medio. ¿Cuáles son los números?

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

- 10 La base de un rectángulo es 2 cm mayor que la altura. Si la base y la altura aumentan 1 cm y 2 cm respectivamente resulta otro rectángulo cuya área es  $24 \text{ cm}^2$ . ¿Cuáles son las dimensiones de este último?

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

- 11 Los lados de un triángulo miden  $x + 3$ ,  $2x - 5$  y  $x - 4$ . Si el triángulo es rectángulo, ¿cuál es el valor de  $x$ ?

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

## → Tema 3 ¿Cuál es el algoritmo para completar el cuadrado?

### Practico

**1** Completa los siguientes cuadrados de binomio.

- $x^2 + 10x + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}})^2$
- $x^2 - \frac{3}{2}x + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}})^2$
- $x^2 + 16x + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}})^2$
- $x^2 - \frac{6}{5}x + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}})^2$
- $x^2 - 20x + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}})^2$
- $x^2 - 2\sqrt{3}x + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}})^2$
- $x^2 + 30x + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}})^2$
- $x^2 + \frac{10}{3}x + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}})^2$
- $x^2 + \underline{\hspace{2cm}} + 36 = (\underline{\hspace{2cm}})^2$
- $x^2 + \underline{\hspace{2cm}} + 64 = (\underline{\hspace{2cm}})^2$
- $x^2 + \underline{\hspace{2cm}} + 18 = (\underline{\hspace{2cm}})^2$

**2** Utiliza el método de completar cuadrados para resolver las siguientes ecuaciones.

- $[3x - 4]^2 = 64$   
R: \_\_\_\_\_
- $[x - 2]^2 = 20$   
R: \_\_\_\_\_
- $x^2 - 22x + 7 = 0$   
R: \_\_\_\_\_
- $x^2 - 14x + 3 = 0$   
R: \_\_\_\_\_
- $x^2 - 8x + 10 = 0$   
R: \_\_\_\_\_
- $x^2 - 4x + 1 = 0$   
R: \_\_\_\_\_
- $x^2 - 10x + 24 = 0$   
R: \_\_\_\_\_
- $2x^2 + x - 12 = 0$   
R: \_\_\_\_\_
- $4x^2 + 4x - 3 = 0$   
R: \_\_\_\_\_

**3** Asocia cada ecuación de segundo grado con su equivalente. Para ello, escribe la letra correspondiente.

<b>A</b> $\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$	<b>B</b> $(x + 4)^2 = 4$	<b>C</b> $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$
<b>D</b> $(x - 5)^2 = 1$	<b>E</b> $(x - 3)^2 = 7$	<b>F</b> $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

- $x^2 - 6x + 2 = 0 \rightarrow$  \_\_\_\_\_
- $x^2 - 10x + 24 = 0 \rightarrow$  \_\_\_\_\_
- $2x^2 - 5x + 2 = 0 \rightarrow$  \_\_\_\_\_
- $x^2 + 8x + 12 = 0 \rightarrow$  \_\_\_\_\_
- $4x^2 + x - 3 = 0 \rightarrow$  \_\_\_\_\_
- $x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow$  \_\_\_\_\_

**4** Una ecuación cuadrática de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  se puede escribir de la forma  $a(x + h)^2 + k = 0$  mediante el proceso de completar cuadrados. Determina el valor de a, h y k en cada caso.

- $x^2 - 16 = 0$   
a: \_\_\_\_\_ h: \_\_\_\_\_ k: \_\_\_\_\_
- $x^2 - 5x + 2 = 0$   
a: \_\_\_\_\_ h: \_\_\_\_\_ k: \_\_\_\_\_
- $x^2 + 6x + 1 = 0$   
a: \_\_\_\_\_ h: \_\_\_\_\_ k: \_\_\_\_\_
- $3x^2 + 6x + 12 = 0$   
a: \_\_\_\_\_ h: \_\_\_\_\_ k: \_\_\_\_\_
- $x^2 + 4x - 21 = 0$   
a: \_\_\_\_\_ h: \_\_\_\_\_ k: \_\_\_\_\_
- $x^2 + 14x + 49 = 0$   
a: \_\_\_\_\_ h: \_\_\_\_\_ k: \_\_\_\_\_

**5** Explica, paso a paso, cómo completas un cuadrado de binomio.

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

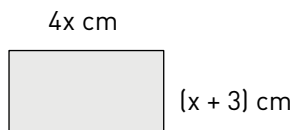
## Me desafío

- 1 En una ecuación cuadrática de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , ¿cuál es el valor que se debe sumar y restar a la vez para completar el cuadrado de binomio?  
R: \_\_\_\_\_

- 2 Si se quiere reescribir la ecuación  $px^2 + qx + r = 0$  de la forma  $a(x - h)^2 + k = 0$ , ¿cuáles son los valores de  $k$  y  $h$ ?  
R: \_\_\_\_\_

**Nota:** Resuelve los siguientes problemas utilizando la completación del cuadrado o el método que consideres más adecuado.

- 3 Si el área del rectángulo es  $24 \text{ cm}^2$ , determina el valor de  $x$ .



R: \_\_\_\_\_

- 4 Determina las dimensiones de un rectángulo cuya área es de  $12 \text{ cm}^2$  y su largo es  $1 \text{ cm}$  mayor que su ancho.  
R: \_\_\_\_\_

- 5 ¿Cuánto mide el radio de un círculo si su área es  $78,5 \text{ cm}^2$ ? Aproxima  $\pi \approx 3,14$ .  
R: \_\_\_\_\_

- 6 La medidas de los lados de un triángulo rectángulo corresponden a tres números pares consecutivos. Halla los valores de dichos lados.  
R: \_\_\_\_\_

- 7 Calcula las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide  $75 \text{ m}$ , sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuyos lados miden  $36 \text{ m}$  y  $48 \text{ m}$  respectivamente.  
R: \_\_\_\_\_

- 8 Reparte el número  $20$  en dos partes de forma que la suma de sus cuadrados sea  $202$ .  
R: \_\_\_\_\_

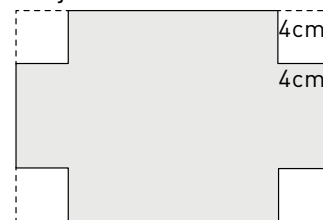
- 9 Si la suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es  $313$ , ¿cuáles son los números?  
R: \_\_\_\_\_

- 10 Silvia tiene un alambre de  $17 \text{ cm}$  y lo quiere doblar formando un ángulo recto, de modo que sus extremos queden a  $13 \text{ cm}$  de distancia. ¿Cómo lo debe doblar?  
R: \_\_\_\_\_

- 11 Si la suma de un número y su inverso multiplicativo es  $\frac{25}{12}$ . ¿Cuál es el número?  
R: \_\_\_\_\_

- 12 Si duplicamos el lado de un cuadrado, su área aumenta en  $147 \text{ cm}^2$ . ¿Cuánto mide el lado del cuadrado original?  
R: \_\_\_\_\_

- 13 Una lámina rectangular de aluminio de perímetro  $96 \text{ cm}$  se utiliza para confeccionar una caja sin tapa. Para ello, se corta un cuadrado de  $4 \text{ cm}$  de lado en cada esquina y se sueldan los bordes, como muestra la figura. ¿Cuáles son las dimensiones de la lámina usada si el volumen de la caja es de  $768 \text{ cm}^3$ ?



R: \_\_\_\_\_

- 14 Un grupo de amigas decide pagar por partes iguales  $\$14\,000$  de un juego de video. A última hora, tres de las jóvenes no participaron en la compra, con lo cual la cuota de cada una de las restantes subió en  $\$1500$ .
- ¿Cuántas amigas había en el grupo original?  
R: \_\_\_\_\_
  - Al final, ¿cuánto pagó cada una?  
R: \_\_\_\_\_

## → Tema 4 ¿Cómo se aplica la fórmula general?

### Practico

- 1 Asocia a cada ecuación de segundo grado sus raíces. Para ello, escribe la letra correspondiente.

<b>A</b> $\frac{7 \pm \sqrt{[-7]^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$	<b>D</b> $\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 7 \cdot [-3]}}{2 \cdot 7}$
<b>B</b> $\frac{7 \pm \sqrt{[-7]^2 - 4 \cdot 3 \cdot [-5]}}{2 \cdot 3}$	<b>E</b> $\frac{3 \pm \sqrt{[-3]^2 - 4 \cdot 7 \cdot [-8]}}{2 \cdot 7}$
<b>C</b> $\frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-7]}}{2 \cdot 1}$	<b>F</b> $\frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-5]}}{2 \cdot 1}$

- a.  $x^2 + 3x - 7 = 0 \rightarrow$  \_\_\_\_\_  
 b.  $7x^2 + x - 3 = 0 \rightarrow$  \_\_\_\_\_  
 c.  $3x^2 - 7x - 5 = 0 \rightarrow$  \_\_\_\_\_  
 d.  $3x^2 - 7x + 1 = 0 \rightarrow$  \_\_\_\_\_  
 e.  $7x^2 - 3x - 8 = 0 \rightarrow$  \_\_\_\_\_  
 f.  $x^2 + 3x - 5 = 0 \rightarrow$  \_\_\_\_\_

- 2 Analiza cada afirmación. Luego, escribe V o F según corresponda, justificando en cada caso.

- a. (\_\_\_\_) La fórmula general sirve para resolver cualquier ecuación de segundo grado con una incógnita.

R: \_\_\_\_\_

- b. (\_\_\_\_) En la fórmula general, si el radicando es positivo, entonces la ecuación de segundo grado con una incógnita tiene dos raíces reales iguales.

R: \_\_\_\_\_

- c. (\_\_\_\_) En la fórmula general, si el radicando es negativo, entonces la ecuación de segundo grado con una incógnita no tiene raíces reales.

R: \_\_\_\_\_

- d. (\_\_\_\_) En la fórmula general, si el radicando es cero, entonces la ecuación de segundo grado con una incógnita no tiene dos raíces reales.

R: \_\_\_\_\_

- 3 Expresa las siguientes ecuaciones de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  y resuelve utilizando la fórmula general.

a.  $x^2 + x = 22$

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

b.  $(x + 2)^2 - 7 = x + 1$

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

c.  $5x^2 - 5x + 16 = 7x - x^2 + 10$

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

d.  $x^2 - 16 - x = 8x + 6$

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

e.  $x(4x + 4) - 25 = 10$

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

f.  $(x + 2)^2 - (x - 6)^2 = (x - 7)^2$

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

g.  $x(x - 5) - 30 = 4(x - 2)$

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

h.  $3(x - 2)^2 - x = 5(x - 1)$

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

i.  $(2x - 3)^2 = 5(1 - x)$

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

j.  $(x - 2)^2 + x^2 = (x - 1)^2$

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

k.  $10x + 5x(x - 1) = 4(x^2 - x) - 8$

Ecuación: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

- 4** Explica, paso a paso, cómo utilizas la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado.  
R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- 5** Calcula el discriminante de cada ecuación de segundo grado y determina si sus raíces son reales iguales, reales distintas o no reales distintas.
- a.**  $2x^2 - 3x + 8 = 0$   
Discriminante: \_\_\_\_\_  
R: \_\_\_\_\_
- b.**  $x^2 + 12x - 16 = 0$   
Discriminante: \_\_\_\_\_  
R: \_\_\_\_\_
- c.**  $5x^2 + 28x + 15 = 0$   
Discriminante: \_\_\_\_\_  
R: \_\_\_\_\_
- d.**  $(x + 8)^2 = 0$   
Discriminante: \_\_\_\_\_  
R: \_\_\_\_\_

- 6** Escribe una ecuación de segundo grado con una incógnita para cada caso.
- a.**  $\Delta > 0$   
R: \_\_\_\_\_
- b.**  $\Delta < 0$   
R: \_\_\_\_\_
- c.**  $\Delta = 0$   
R: \_\_\_\_\_
- 7** Aplica las propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado para encontrar su suma y su producto. Luego, determínalas.
- a.**  $x^2 + x - 42 = 0$   
S: \_\_\_\_\_, P: \_\_\_\_\_, Raíces: \_\_\_\_\_
- b.**  $2x^2 + 18x - 72 = 0$   
S: \_\_\_\_\_, P: \_\_\_\_\_, Raíces: \_\_\_\_\_
- c.**  $2x^2 - 22x + 20 = 0$   
S: \_\_\_\_\_, P: \_\_\_\_\_, Raíces: \_\_\_\_\_
- d.**  $x^2 - 21x + 54 = 0$   
S: \_\_\_\_\_, P: \_\_\_\_\_, Raíces: \_\_\_\_\_

**Me desafío**

- 1** ¿Qué condición(es) debe(n) cumplir a y c en la ecuación  $ax^2 + c = 0$  para que sus soluciones sean reales distintas?  
R: \_\_\_\_\_
- 2** Determina el valor que debe tomar k en la ecuación  $8x^2 - x + (k - 7) = 0$  para que:
- a.** No tenga soluciones reales.  
R: \_\_\_\_\_
- b.** Tenga dos soluciones reales e iguales.  
R: \_\_\_\_\_
- c.** Tenga dos soluciones reales y distintas.  
R: \_\_\_\_\_
- 3** ¿Cuál es el valor de k en la ecuación  $(2k - 1)x^2 + (k + 2)x = 7x + 1$  si la suma de sus raíces es  $-\frac{4}{3}$ ?  
R: \_\_\_\_\_

- 4** ¿Cuál es el valor de k en la ecuación  $kx^2 + 5x + 2k = x^2$  si el producto de sus raíces es  $\frac{5}{4}$ ?  
R: \_\_\_\_\_
- 5** Para que la diferencia entre las raíces de la ecuación  $2x^2 - 16x + k - 1 = 0$  sea 2, ¿cuál debe ser el valor de k?  
R: \_\_\_\_\_
- 6** Resuelve cada ecuación aplicando el cambio de variable indicado.
- a.**  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$        $x^2 = u$   
R: \_\_\_\_\_
- b.**  $9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$        $3^x = u$   
R: \_\_\_\_\_

**Nota:** Resuelve los problemas utilizando ecuaciones cuadráticas.

- 7 Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 cm y la diferencia entre sus catetos es de 7 cm, ¿cuántos centímetros mide cada cateto?

R: \_\_\_\_\_

- 8 ¿Qué número multiplicado por sí mismo es igual al triple del mismo número?

R: \_\_\_\_\_

- 9 A una fracción cuyo numerador es 2 se le suma su correspondiente fracción inversa. Si el resultado es  $\frac{13}{6}$ , ¿cuál es el numerador de la fracción original?

R: \_\_\_\_\_

- 10 Al denominador de una fracción cuyo numerador es 3 se le suman 4 unidades, de modo que la fracción original disminuye en 1. ¿Cuál es la fracción original?

R: \_\_\_\_\_

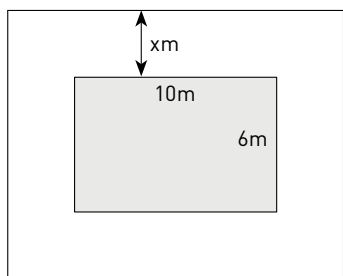
- 11 Si el número de diagonales de un polígono regular es 35, ¿cuántos lados tiene dicho polígono?

R: \_\_\_\_\_

- 12 El dividendo de una división es 884, el cociente y el resto son iguales, y el divisor es el triple del cociente. ¿Cuál es el divisor?

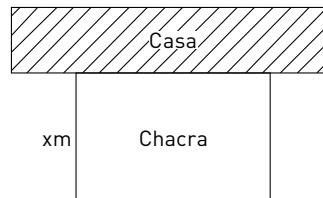
R: \_\_\_\_\_

- 13 Una piscina cuyas dimensiones son 6 m de ancho por 10 m de largo, está rodeada por una zona de pasto de ancho uniforme como muestra la figura. Si el área cubierta por pasto es igual al área de la piscina, ¿cuánto mide el ancho de la zona de pasto?



R: \_\_\_\_\_

- 14 Franco destinó un área rectangular de 1200 m<sup>2</sup> de su jardín para plantar tomates, porotos verdes, albaca y perejil. Para que sus perros no destruyan las plantas, rodeó su chacra con una pared de la casa y los otros tres lados con 100 m de alambrada, como muestra la figura. ¿Cuáles son las dimensiones de la chacra?



R: \_\_\_\_\_

- 15 En un rectángulo dorado la razón entre la longitud y el ancho es igual a la razón entre la longitud más el ancho y la longitud. Encuentra el valor exacto de la razón dorada.

R: \_\_\_\_\_

- 16 En las cañerías de agua se van depositando minerales formando una capa. Cuando esta capa mide 1 mm, el área por la cual viaja el agua se reduce un 10%. ¿Cuál es el radio original de la cañería?

R: \_\_\_\_\_

- 17 Calcula dos números naturales sabiendo que su razón es 3 y la diferencia de sus cuadrados es 200.

R: \_\_\_\_\_

- 18 La edad de un niño será dentro de 3 años un cuadrado perfecto. Si hace tres años su edad era precisamente la raíz cuadrada de dicho cuadrado, ¿cuál es la edad del niño?

R: \_\_\_\_\_

- 19 La raíz cuadrada de la edad del padre corresponde a la edad del hijo. Si dentro de 24 años la edad del padre será el doble de la edad del hijo, ¿cuántos años tienen padre e hijo respectivamente?

R: \_\_\_\_\_

- 20 Resuelve la ecuación  $4^x - 2^x - 2 = 0$ , aplicando el cambio de variable que consideres adecuado.

R: \_\_\_\_\_

Reforzamiento

Según tus resultados en la evaluación de la lección, repasa los temas que consideres necesarios.

Es necesario que puedas resolver ecuaciones de segundo grado con diferentes métodos.

Debes saber expresar algebraicamente situaciones de la vida real o problemas que involucren ecuaciones de segundo grado.

- 1 Identifica el error en cada afirmación. Luego, corrígelo.
  - a. Los coeficientes de la ecuación cuadrática  $x(x - 3) = 2(3 - x)$  son  $a = -1$ ,  $b = 1$  y  $c = 6$ .  
Error: \_\_\_\_\_  
Corrección: \_\_\_\_\_
  - b. Las soluciones de la ecuación  $2x(x - 1) = 3x$  son  $x_1 = \frac{5}{2}$  y  $x_2 = \frac{-5}{2}$ .  
Error: \_\_\_\_\_  
Corrección: \_\_\_\_\_
- 2 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.
  - a.  $x(x - 5) = -2(x + 5)$   
R: \_\_\_\_\_
  - b.  $2x^2 - 8 = 0$   
R: \_\_\_\_\_
  - c.  $x(18x + 12) = 6x$   
R: \_\_\_\_\_
- 3 Escribe una ecuación de segundo grado con las soluciones propuestas.
  - a.  $x_1 = 1,5$  y  $x_2 = 2$   
R: \_\_\_\_\_
  - b.  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 4$   
R: \_\_\_\_\_
- 4 La mitad de la suma de un número más 3, corresponde al número mismo multiplicado por su doble.
  - a. ¿Cuál es el número?  
R: \_\_\_\_\_
  - b. ¿Cuántas soluciones son posibles? ¿Por qué?  
R: \_\_\_\_\_
- 5 La edad de Rosa multiplicada por su edad de hace dos años es equivalente a 3. ¿Cuál es la edad de Rosa?  
R: \_\_\_\_\_
- 6 Si la edad de Rosa, después de algunos años, es equivalente a decir que el producto de su edad por la edad que tenía hace cuatro años es igual a 16 veces su edad actual. ¿Cuál es la edad de Rosa hoy?  
R: \_\_\_\_\_

## Profundización

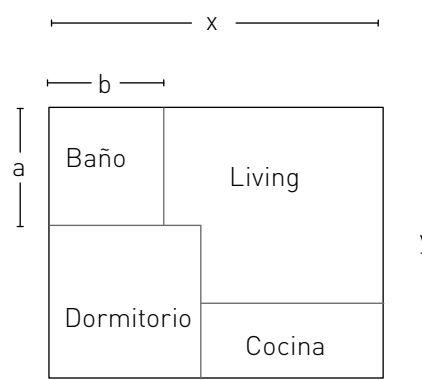
1 Un albañil desea construir una casa que tiene el siguiente plano.

a. Si empieza por las paredes exteriores, ¿cuáles son las dimensiones de la casa si el área de esta es  $45 \text{ m}^2$  y debe rodearla con 28 m de pared?

R: \_\_\_\_\_

b. Si empieza por las paredes del baño, ¿cuáles son las dimensiones de este si el área es  $3 \text{ m}^2$  y debe rodearlo con 3,5 m de pared?

R: \_\_\_\_\_



2 Aplica completación de cuadrado.

a.  $x^2 + 8x + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}})^2$

b.  $x^2 + \underline{\hspace{2cm}} + \frac{9}{4} = (\underline{\hspace{2cm}})^2$

c.  $x^2 + 14x + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}})^2$

d.  $x^2 + \frac{5}{2}x + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}})^2$

e.  $x^2 + 0,4x + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}})^2$

f.  $4x^2 + \underline{\hspace{2cm}} + 25 = (\underline{\hspace{2cm}})^2$

3 Resuelve.

a. Para que una de las raíces de la ecuación  $5x^2 - 3x - 3k + 15 = 0$  sea nula, ¿cuál valor debería tomar k?

R: \_\_\_\_\_

b. ¿Cuál es el valor de k en la ecuación  $x(x - k) = 7(k - x)$  si la suma de sus soluciones es 4?

R: \_\_\_\_\_



# Funciones cuadráticas

Repasa algunos contenidos que utilizarás durante esta lección.

1 Determina el valor de  $x$  para que  $f(x) = 0$ .

a.  $f(x) = 2x + 5$      $x = \underline{\hspace{2cm}}$     c.  $f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{5}$      $x = \underline{\hspace{2cm}}$   
 b.  $f(x) = \frac{1}{5}x + 3$      $x = \underline{\hspace{2cm}}$     d.  $f(x) = x^2 - 1$      $x = \underline{\hspace{2cm}}$

2 Determina  $f(2)$ ,  $f(-1)$  y  $f\left(\frac{-1}{3}\right)$  en cada caso.

a.  $f(x) = 6x - \frac{1}{2}$     c.  $f(x) = x^2 - 3$   
 b.  $f(x) = -3x + 9$     d.  $f(x) = 2x - \frac{1}{3}$

3 Completa la tabla para cada función. Luego, grafica la función en tu cuaderno.

a.

$f(x) = 2x$	
x	f(x)

b.

$f(x) = -3x$	
x	f(x)

c.

$f(x) = \frac{x}{5}$	
x	f(x)

4 Un restaurante produce 2 kilogramos de basura cada hora de funcionamiento.

a. Contruye una tabla que muestre la relación entre las variables durante las primeras 4 horas de trabajo.

R: \_\_\_\_\_

b. ¿Cuál es la función que relaciona ambas variables?

R: \_\_\_\_\_

c. ¿Cuál es el valor de la pendiente de esta función? ¿Qué representa según el contexto?

R: \_\_\_\_\_

5 Identifica la pendiente ( $m$ ) y el coeficiente de posición ( $n$ ) de las rectas asociadas a las siguientes funciones.

a.  $f(x) = -5x + 1$     b.  $f(x) = 3x + 8$     c.  $f(x) = x - 4$   
 $m = \underline{\hspace{1cm}}$      $n = \underline{\hspace{1cm}}$      $m = \underline{\hspace{1cm}}$      $n = \underline{\hspace{1cm}}$      $m = \underline{\hspace{1cm}}$      $n = \underline{\hspace{1cm}}$

6 Durante el mes de diciembre, la temperatura promedio diaria aumentó una décima cada día durante 15 días seguidos. Si el primer día se registró una temperatura de  $22^\circ\text{C}$ , ¿cuál es la función que modela la situación?

R: \_\_\_\_\_

Para pensar en funciones puedes utilizar la imagen de una máquina cuyo insumo es un número y su producto es otro, siguiendo una regla definida.

La función lineal relaciona dos variables que son directamente proporcionales y puede ser representada por una tabla, una recta que pasa por el origen del plano cartesiano o una expresión algebraica del tipo  $f(x) = ax$ .

Recuerda que la función afín tiene una pendiente que representa la inclinación de la recta y una constante que corresponde a la intersección con el eje Y.

## → Tema 1 ¿Cuándo se dice que una función es cuadrática?

### Practico

- 1 Determina si cada regla de formación corresponde a una función cuadrática. Para ello, marca Sí o No y justifica.

a.  $f(x) = x^2 - 5x + 8$     Sí  No

R: \_\_\_\_\_

b.  $f(x) = [x - 5](x - 6)^2$     Sí  No

R: \_\_\_\_\_

c.  $f(x) = -5 + 3x - 7x^2$     Sí  No

R: \_\_\_\_\_

d.  $f(x) = 4x - 8y$     Sí  No

R: \_\_\_\_\_

e.  $f(x) = [2x - 9]^2 - 4x^2 + 3x$   
Sí  No

R: \_\_\_\_\_

f.  $f(x) = [x - 9][2x + 10] - 1$   
Sí  No

R: \_\_\_\_\_

g.  $f(x) = \frac{1}{x + 6}$     Sí  No

R: \_\_\_\_\_

h.  $f(x) = \frac{3}{[x - 2][x + 7]}$     Sí  No

R: \_\_\_\_\_

- 2 Analiza cada afirmación con respecto a  $f(x) = -x^2 - 7x + 18$ . Luego, escribe V o F según corresponda.

a.   $f(3) - f(-3) = -42$ .

b.  La preimagen de 0 es 18.

c.  Los ceros de  $f(x)$  son -9 y 2.

d.  El recorrido de  $f(x)$  es  $]-\infty; 30, 25]$ .

e.  Para  $x = 1$  y  $x = 8$ ,  $f$  tiene la misma imagen.

f.   $f(a - 2) = -a^2 - 3a + 28$ .

- 3 Dada la función cuadrática  $f(x) = 4x^2 + 6x - 12$  calcula:

a.  $f(0) =$  \_\_\_\_\_

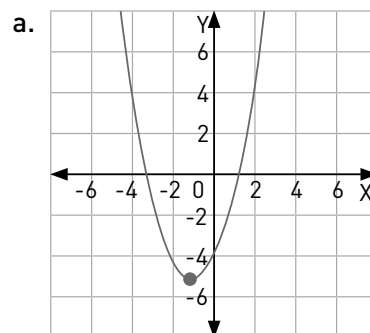
b.  $f(-3) =$  \_\_\_\_\_

c.  $f\left(\frac{1}{2}\right) =$  \_\_\_\_\_

d.  $f\left(\frac{-2}{3}\right) =$  \_\_\_\_\_

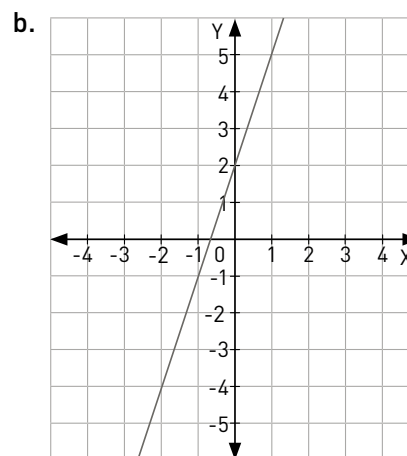
e.  $f(p - 1) =$  \_\_\_\_\_

- 4 Identifica si los gráficos corresponden a una función cuadrática.



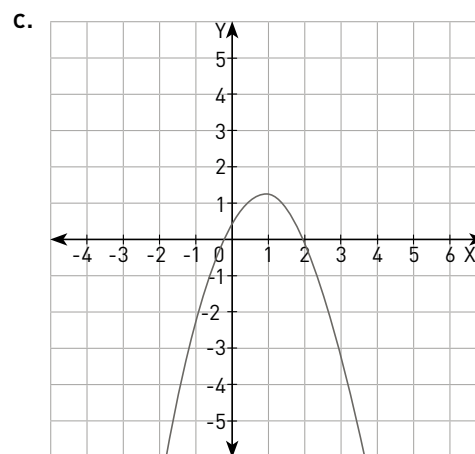
Sí

No



Sí

No



Sí

No

## Me desafío

- 1** Analiza las funciones cuadráticas  $f$  y  $g$  con reglas de formación  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  y  $g(x) = -x^2 + 5x - 6$ . Luego, responde.
- ¿Son  $f$  y  $g$  iguales? Justifica.  
R: \_\_\_\_\_
  - Calcula  $f(0)$ ,  $f(5)$ ,  $g(0)$  y  $g(5)$ . Luego, escribe una conclusión con respecto a las funciones  $f$  y  $g$ .  
R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
  - Calcula los ceros de  $f$  y  $g$ . ¿Qué puedes concluir con respecto a ellos?  
R: \_\_\_\_\_
- 2** Escribe una función cuadrática que tenga los mismos ceros que  $f(x) = x^2 - x - 20$ .  
R: \_\_\_\_\_
- 3** Escribe dos funciones cuadráticas  $f$  y  $g$ , de modo que  $f(x) = -g(x)$ .  
R: \_\_\_\_\_
- 4** Escribe una función cuadrática  $f(x)$ , tal que  $f(-2) = 3$ .  
R: \_\_\_\_\_
- 5** Escribe como función la relación que existe en cada caso.
- El radio  $r$  de un círculo y su área ( $A$ ).  
R: \_\_\_\_\_
  - La arista  $x$  de un cubo y el área total del cubo.  
R: \_\_\_\_\_
  - El lado de un polígono de  $n$  lados y el número de diagonales.  
R: \_\_\_\_\_
  - El lado  $m$  de un triángulo equilátero y su área.  
R: \_\_\_\_\_
- 6** La densidad de la atmósfera terrestre depende de la altura. Hasta los 10000 m puede considerarse la siguiente relación:  
 $D = 3,24 \cdot 10^{-4}h^2 - 1,12 \cdot 10^{-4}h + 1,225$ , donde  $D$  es la densidad y  $h$  la altura.
- ¿Corresponde esta relación a una función cuadrática? Justifica.  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la densidad de la atmósfera a 5000 metros de altura?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la densidad de la atmósfera a nivel del mar?  
R: \_\_\_\_\_
- 7** La altura  $h(t)$  que alcanza un objeto cuando es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial  $v_0$ , transcurridos  $t$  segundos, es  $h(t) = v_0t - 0,5t^2$ .
- ¿Corresponde esta relación a una función cuadrática? Justifica.  
R: \_\_\_\_\_
  - Si la rapidez inicial de un objeto es 5 m/s, ¿cuál es su altura después de 2 segundos?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿Después de cuántos segundos la altura vuelve a ser 0?  
R: \_\_\_\_\_
  - En el contexto del problema, ¿qué valores puede tomar la variable  $t$ ?  
R: \_\_\_\_\_
- 8** La altura en metros con respecto al tiempo  $t$ , en segundos, de la trayectoria de un flecha está dada por la función  $f(t) = -t^2 + 5t$ .
- ¿Corresponde esta relación a una función cuadrática? Justifica.  
R: \_\_\_\_\_
  - Resuelve la ecuación  $f(t) = 0$ .  
R: \_\_\_\_\_
  - En el contexto del problema, ¿cómo se interpretan los resultados obtenidos en b)?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿Cuánto tiempo está la flecha en el aire?  
R: \_\_\_\_\_

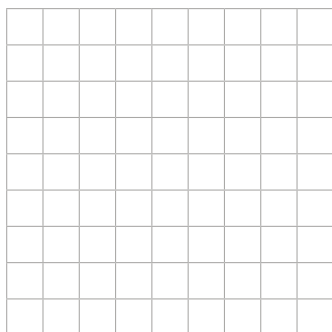
## → Tema 2 ¿Cómo se interpretan los parámetros de la gráfica?

### Practico

- 1 Grafica las siguientes funciones, empezando por completar las tablas propuestas. Luego, responde.

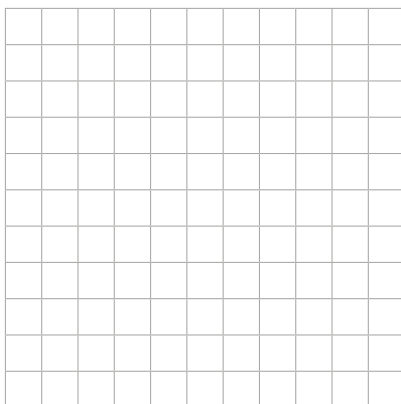
a.  $f(x) = 2x^2 - 2x - 12$

x	-3	-2	-1	1	2	3
f(x)						



b.  $g(x) = -3x^2 - 3x + 6$

x	-3	-2	-1	1	2	3
g(x)						



- c. Al comparar ambas funciones, ¿existe diferencia en la concavidad? ¿Por qué?

R: \_\_\_\_\_

- d. Determina los puntos de intersección de los gráficos con el eje X.

Gráfico 1: \_\_\_\_\_

Gráfico 2: \_\_\_\_\_

- 2 Completa la tabla considerando la función  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Luego, grafica en tu cuaderno las funciones asociadas a los parámetros propuestos.

a.  $a = 1, b = 0, c = -4$ .

x	-3	-2	-1	1	2	3
f(x)						

b.  $a = 1, b = -1, c = -12$ .

x	-3	-2	-1	1	2	3
f(x)						

c.  $a = 1, b = 2, c = 1$ .

x	-3	-2	-1	1	2	3
f(x)						

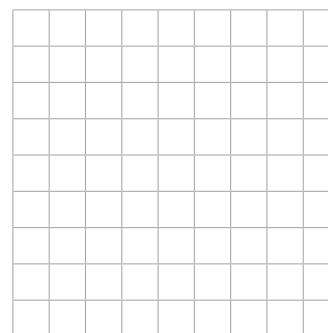
- 3 Grafica la función  $f(x) = ax^2$  analizando los diferentes valores que toma el parámetro a. Luego, interpreta tus resultados.

a.  $a = 3$

b.  $a = 2$

c.  $a = -3$

d.  $a = -2$



- e. ¿Qué ocurre en el gráfico con los valores que toma el parámetro a?

R: \_\_\_\_\_

- f. ¿Cómo influye el signo del parámetro a en el gráfico de la parábola?

R: \_\_\_\_\_

- g. ¿Qué ocurre con el gráfico si la función ahora está dada como  $f(x) = ax^2 + c$ ?

R: \_\_\_\_\_

**Me desafío**

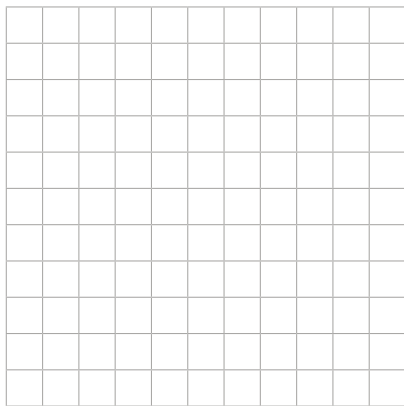
- 1** Realiza las actividades propuestas respecto a las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ .

$$f(x) = -x^2 - 2x + 1 \quad g(x) = y = x^2 + 2x - 1$$

- a. Completa cada una de las tablas y luego grafica ambas funciones en un mismo plano cartesiano.

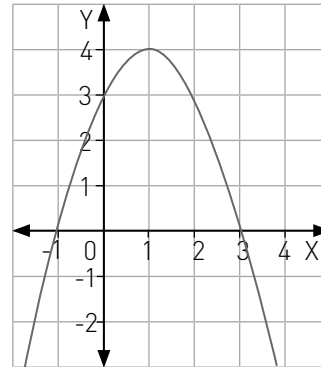
x	-3	-2	-1	1
f(x)				

x	-3	-2	-1	1
g(x)				



- b. ¿Son iguales ambas funciones? Justifica.  
R: \_\_\_\_\_
- c. ¿Cómo puedes escribir  $g(x)$  en función de  $f(x)$ ?  
R: \_\_\_\_\_
- d. ¿Qué puedes decir sobre los ceros de las funciones? Justifica.  
R: \_\_\_\_\_
- e. ¿Qué transformación isométrica se puede aplicar al gráfico de  $f(x)$  para obtener el de  $g(x)$ ? Define sus parámetros.  
R: \_\_\_\_\_
- f. Si tienes las gráficas  $p(x)$  y  $-p(x)$ , con  $p(x)$  una función cuadrática, describe matemáticamente la relación entre ellas.  
R: \_\_\_\_\_

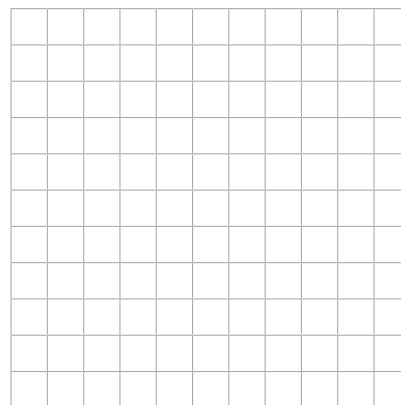
- 2** Analiza cada afirmación con respecto al gráfico de la función  $h(x)$ . Luego, escribe V o F según corresponda, justifica.



- a. \_\_\_\_ La función que representada en el gráfico está dada por  $h(x) = x^2 - 2x - 3$ .  
Justificación: \_\_\_\_\_
- b. \_\_\_\_ Los ceros de la función  $h(x)$  son  $x_1 = 1$  y  $x_2 = -3$ .  
Justificación: \_\_\_\_\_
- c. \_\_\_\_ Los valores  $x = 0$  y  $x = 2$  en  $h$  tienen la misma imagen.  
Justificación: \_\_\_\_\_
- d. \_\_\_\_ El valor máximo que toma la función es 1.  
Justificación: \_\_\_\_\_

- 3** Grafica las funciones dadas y encuentra las intersecciones con el eje X.

- a.  $f(x) = 10x - 5x^2$   
P1(\_\_\_\_, \_\_\_\_), P2(\_\_\_\_, \_\_\_\_)
- b.  $g(x) = x^2 - 9$   
P1(\_\_\_\_, \_\_\_\_), P2(\_\_\_\_, \_\_\_\_)





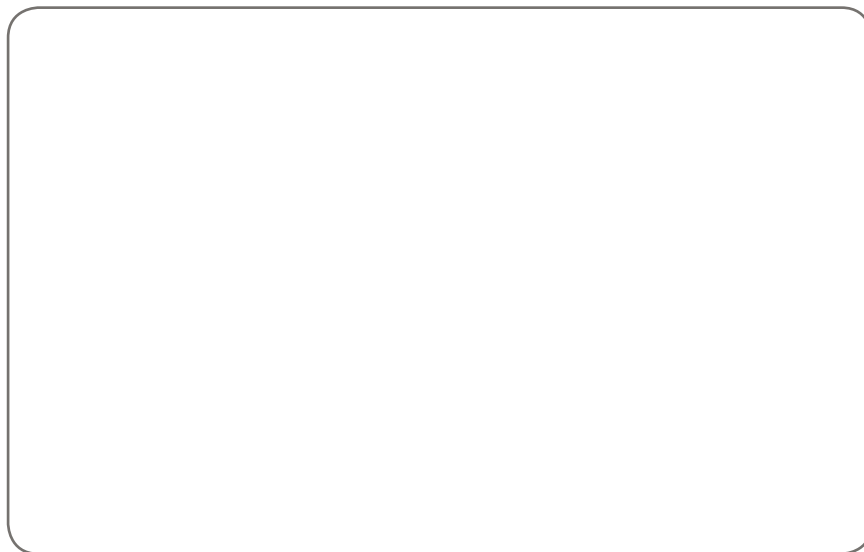
## Herramientas tecnológicas uso de GeoGebra

En el texto trabajaron con GeoGebra para estudiar los parámetros de la función cuadrática. Ahora verán otro tipo de problemas matemáticos que se pueden trabajar con el mismo programa.

- 1 En una hoja de GeoGebra grafiquen las funciones  $y = x^2 - 8x + 13$  e  $3x + 7y = 21$ . Luego, con la herramienta "Intersección de dos objetos", encuentren las intersecciones de ambos gráficos.

$$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$



- 2 Entre todos los miembros del grupo discutan el significado algebraico de los puntos encontrados en 1 y escriban sus conclusiones.

---



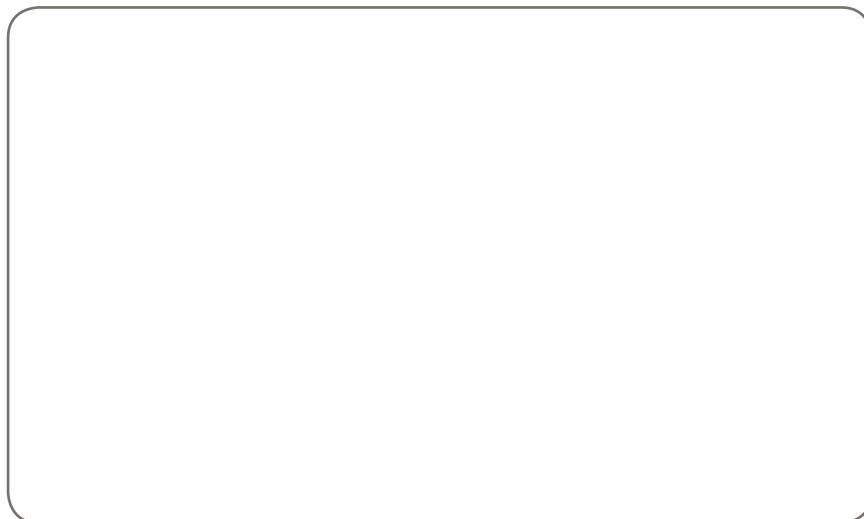
---



---

- 3 En la misma página de GeoGebra oculten la recta que dibujaron y grafiquen una recta que tenga una sola intersección con la parábola. Realicen un bosquejo del gráfico y anoten el punto de intersección.

$$x = \underline{\hspace{2cm}}$$



- 4 Ahora dibujen una recta que no tenga intersecciones con la parábola. Bosquejen la situación en el espacio dado.



- 5 Nuevamente, entre todos los miembros del grupo, discutan el significado algebraico del punto anterior.

---

---

---

---

---

- 6 ¿Es posible que una recta y una parábola se intersecten en más de dos puntos? Justifiquen su respuesta.

---

---

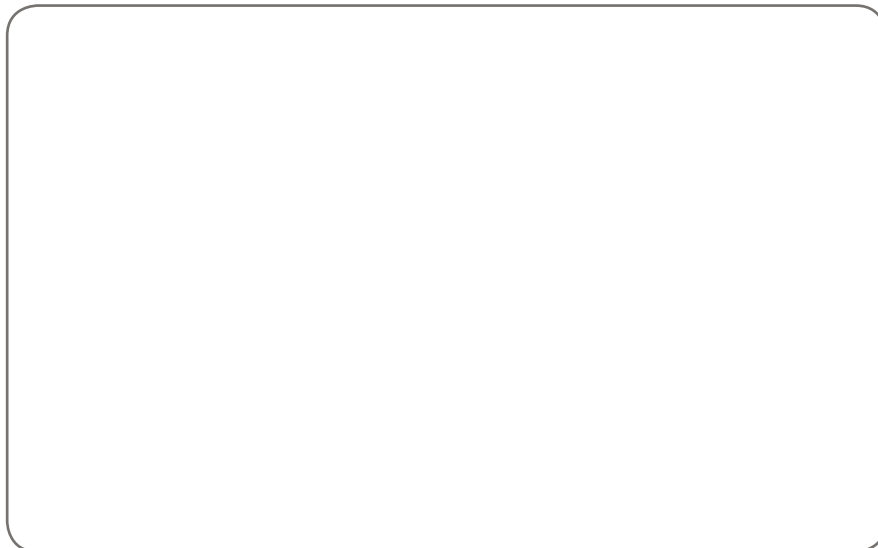
- 7 Grafiquen una parábola y una recta tales que se intersecten en dos puntos. Bosquejen el gráfico y entreguen las ecuaciones de ambas funciones junto con los puntos de intersección de ellas.

$x =$  \_\_\_\_\_

$y =$  \_\_\_\_\_

$x_1 =$  \_\_\_\_\_

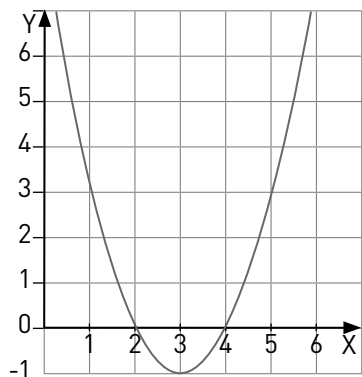
$x_2 =$  \_\_\_\_\_



## → Tema 3 ¿Cómo cambia la gráfica según cada parámetro?

### Practico

- 1 Analiza el gráfico de la función  $f(x) = x^2 - 6x + 8$ . Luego, responde.



- a. ¿Cuáles son las intersecciones de la función con el eje X?

R: \_\_\_\_\_

- b. ¿Cuál es la intersección de la función con el eje Y?

R: \_\_\_\_\_

- c. ¿Cuál es el punto vértice de la función?

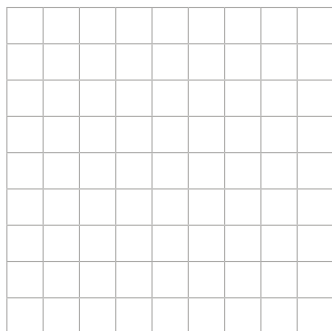
R: \_\_\_\_\_

- d. ¿Cuáles son los parámetros asociados a la forma canónica  $f(x) = a(x - d)^2 + e$ ?

R: \_\_\_\_\_

- 2 Dada la función  $f(x) = x^2 + 6x - 7$  realiza las siguientes actividades.

- a. Grafica la función.



- b. Escribe la forma canónica de la función.

R: \_\_\_\_\_

- c. Si el gráfico se traslada dos unidades a la izquierda, ¿cuál es el parámetro alterado?

R: \_\_\_\_\_

- d. Si el gráfico se traslada tres unidades a la derecha, ¿cuál será la función canónica asociada?

R: \_\_\_\_\_

- e. Si el gráfico es trasladado cuatro unidades hacia arriba, ¿cuál es el parámetro alterado?

R: \_\_\_\_\_

- f. Si el gráfico se traslada dos unidades hacia abajo, ¿cuál será la función canónica asociada?

R: \_\_\_\_\_

- 3 Analiza cada afirmación. Luego, escribe V o F según corresponda. Justifica tu respuesta.

- a. \_\_\_\_\_ El traslado de  $h(x) = (x + 2)^2 + 6$  con respecto a  $g(x) = x^2$  son seis unidades hacia arriba y dos unidades hacia la derecha.

Justificación: \_\_\_\_\_

- b. \_\_\_\_\_ El traslado de  $i(x) = -x^2 - 3$  con respecto a  $g(x) = x^2$  son tres unidades hacia la derecha y su concavidad cambia.

Justificación: \_\_\_\_\_

- c. \_\_\_\_\_ Si se quiere que el vértice de la función  $g(x) = x^2$  se traslade al punto  $(2, 3)$ , la nueva fórmula es  $j(x) = (x + 2)^2 - 3$ .

Justificación: \_\_\_\_\_

- d. \_\_\_\_\_ El vértice del gráfico de la función canónica  $j(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$  es  $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ .

Justificación: \_\_\_\_\_

- e. \_\_\_\_\_ El valor mínimo que toma la función  $k(x) = (x + 5)^2 + 5$  para el valor de  $y$  es 5.

Justificación: \_\_\_\_\_



4 A la función  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  se le realiza una traslación con el vector dado en cada caso. Escribe la ecuación de la función imagen  $g(x)$ .

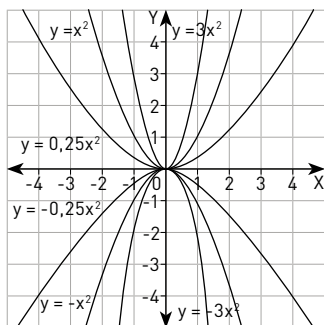
a.  $\vec{v} = (1, 2)$ ,  $g(x) =$  \_\_\_\_\_

b.  $\vec{v} = (-1, 2)$ ,  $g(x) =$  \_\_\_\_\_

c.  $\vec{v} = (-1, -2)$ ,  $g(x) =$  \_\_\_\_\_

d.  $\vec{v} = (1, -2)$ ,  $g(x) =$  \_\_\_\_\_

5 Con la información del gráfico realiza las siguientes actividades.



a. ¿Depende del signo de  $a$  que las ramas de la parábola se abran o se cierren? ¿Por qué?

R: \_\_\_\_\_

b. ¿Entre qué parábolas se ubicarían  $y = 1,5x^2$  e  $y = -\frac{1}{3}x^2$ ?

R: \_\_\_\_\_

c. Escribe la regla de formación de una parábola que se ubique entre  $y = -3x^2$  e  $y = -0,25x^2$ , y de otra que se ubique entre  $3x^2$  e  $y = x^2$ .

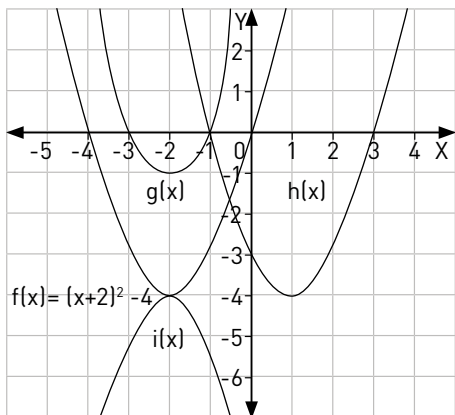
R: \_\_\_\_\_

d. ¿Qué parábola representa la reflexión de la parábola  $y = -3x^2$  con respecto al eje  $X$ ?

R: \_\_\_\_\_

**Practico**

1 Observa el gráfico e identifica los parámetros de la función canónica original que han sido modificados. Luego, obtén las funciones indicadas.



a. ¿Cuál es el parámetro modificado en la función  $g(x)$ ?

R: \_\_\_\_\_

b. Escribe la función canónica de  $g(x)$ .

R: \_\_\_\_\_

c. ¿Cuál es el parámetro modificado en la función  $h(x)$ ?

R: \_\_\_\_\_

d. Escribe la función canónica de  $h(x)$ .

R: \_\_\_\_\_

e. ¿Cuál es el parámetro modificado en la función  $i(x)$ ?

R: \_\_\_\_\_

f. Escribe la función canónica de  $i(x)$ .

R: \_\_\_\_\_

2 Si la parábola de  $f(x) = kx^2 + 7x - 2$  interseca al eje  $X$  en dos puntos distintos, ¿cuál o cuáles son los posibles valores de  $k$ ?

R: \_\_\_\_\_

3 Determina el valor de  $k$  en la función  $x^2 - 5x + k$ , de modo que la parábola asociada interseque al eje  $X$  en un solo punto.

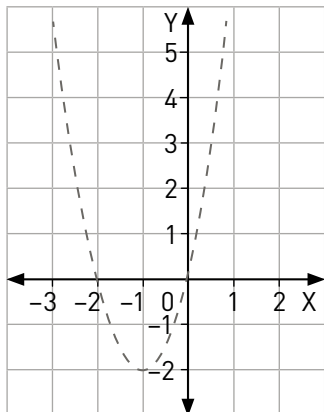
R: \_\_\_\_\_

- 4 Determina la regla de formación de una función cuadrática si su parábola interseca al eje X en los puntos  $(-2, 0)$  y  $(3, 0)$  y al eje Y en el punto  $(0, -6)$ .

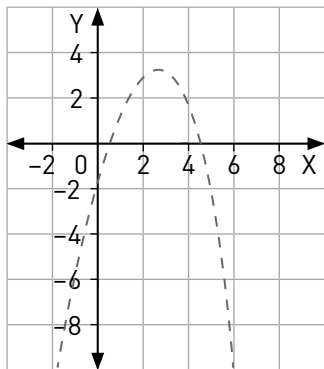
R: \_\_\_\_\_

- 5 Determina y sombrea, en los gráficos, las regiones cuyos puntos  $P(x, y)$  representan sus soluciones.

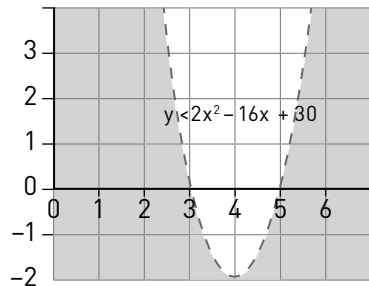
a.  $y > 2(x + 1)^2 - 2$



b.  $y < -x^2 + 5x - \frac{13}{4}$



- 6 Analiza cada afirmación. Luego, escribe V o F según corresponda. Justifica.



- a. \_\_\_\_\_ La inecuación cuadrática también se puede expresar como  $y < 2(x - 4)^2 - 2$ .

Justificación: \_\_\_\_\_

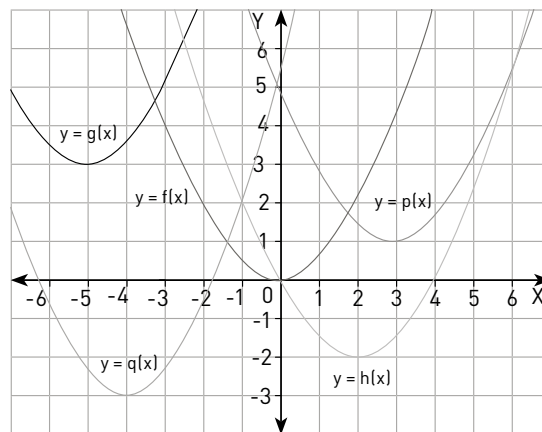
- b. \_\_\_\_\_ El punto  $(2, -1)$  no es parte de la solución de la inecuación.

Justificación: \_\_\_\_\_

- c. \_\_\_\_\_ El punto  $(4, -2)$  es parte de la solución de la inecuación.

Justificación: \_\_\_\_\_

- 7 Identifica el vector traslación que se le aplicó a la parábola  $f(x) = 0,5x^2$  para obtener cada una de las parábolas. Luego, escribe la forma canónica de cada función.



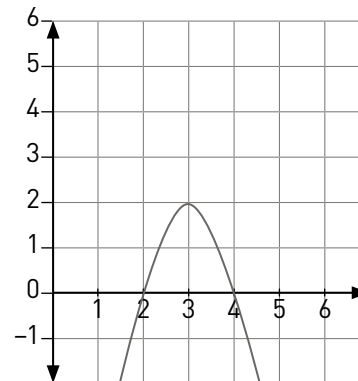
a.  $g(x) =$  \_\_\_\_\_, vector: \_\_\_\_\_

b.  $h(x) =$  \_\_\_\_\_, vector: \_\_\_\_\_

c.  $p(x) =$  \_\_\_\_\_, vector: \_\_\_\_\_

d.  $q(x) =$  \_\_\_\_\_, vector: \_\_\_\_\_

- 8 El gráfico muestra la función  $g(x)$ , corresponde a la imagen de  $f(x)$  después de aplicarle la traslación  $\vec{v} = (2, -3)$ . Encuentra la regla de formación de  $f(x)$ .



R: \_\_\_\_\_

## Tema 4 ¿En qué se aplican las funciones cuadráticas?

### Practico

- 1 Una tienda virtual ofrece descuentos en sus productos a medida que la página web va recibiendo visitas. La función que modela la situación es:

$$D(v) = -\frac{1}{160}v^2 + \frac{3}{2}v$$

- ¿Cuál es la variable dependiente?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la variable independiente?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿Qué cantidad de visitas se deben registrar para que no haya descuentos?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el descuento máximo ofrecido por la tienda virtual?  
R: \_\_\_\_\_
- Cuántas visitas se deben registrar para que haya un 50% de descuento?  
R: \_\_\_\_\_

- 2 Un banco dispone de un máximo de 10 cajas (C) que se abren según la hora del día (t). La función que representa esta situación es:

$$C(t) = -\frac{5}{8}t^2 + 15t - 80$$

- ¿Cuál es la variable dependiente?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la variable independiente?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿A qué hora se abrirán todas las cajas?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿A qué hora se cierran todas las cajas?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿A qué hora se abrirán ocho cajas?  
R: \_\_\_\_\_

- 3 Una empresa de cereales tiene costos de producción mensuales (C) que dependen de las unidades elaboradas (x), lo cual se expresa como:

$$C(x) = 6x - \frac{1}{500}x^2$$

- ¿Cuál es la variable dependiente?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la variable independiente?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿Cuál será el costo máximo alcanzado?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿Cuál será el costo de 500 unidades?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿Cuántas unidades se necesitan elaborar para tener un costo de 2500?  
R: \_\_\_\_\_

- 4 La producción de cebollas en una ciudad depende del mes de recolección. La función modeladora de producción en toneladas según el me, está dada como:

$$C(x) = 65x - 5x^2 - 60$$

- ¿Cuál es la variable dependiente?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la variable independiente?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿En qué mes habrá mayor producción de cebollas?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿Cuántas cebollas se estima que se producirán el mes de septiembre?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿En qué mes se producirán 50 toneladas de cebolla?  
R: \_\_\_\_\_

## Me desafío

- 1** Un deportista especializado en el lanzamiento de jabalina está en la final de un campeonato. Su último lanzamiento se puede expresar como  $f(x) = -\frac{1}{350}x^2 + \frac{6}{35}x + 2$ , donde  $x$  es la distancia recorrida (metros) e  $y$  la altura (metros).
- ¿Cuántos metros alcanzó el tiro?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿Cuál es la altura máxima que alcanzó el lanzamiento?  
R: \_\_\_\_\_
- 2** Se quiere hacer una plantación de frutillas en una parcela. Las dimensiones del terreno rectangular son  $x$  y  $450 - x$ .
- ¿Cuál es el área más grande que puede tener el terreno?  
R: \_\_\_\_\_
  - Si se espera que el área sea de 50 621 metros cuadrados. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones del terreno?  
R: \_\_\_\_\_
- 3** La final de un campeonato de fútbol se debe decidir por penales. El jugador a cargo de lanzar el último penal conoce la fórmula perfecta para marcar el gol y coronar a su equipo como campeón. La variable  $x$  representa la distancia en metros entre el jugador y el arco, mientras que la variable  $y$  representa la altura que va alcanzando la pelota.
- La fórmula es:  $y = -\frac{4}{121}x^2 + \frac{4}{11}x$ .
- Si el arquero está a una distancia de 10 metros del jugador, ¿cuál es la altura que alcanzará la pelota al llegar al arco?  
R: \_\_\_\_\_
  - Si el arquero no alcanza a tapan el lanzamiento. ¿Cuántos metros habrá recorrido la pelota para entrar al arco?  
R: \_\_\_\_\_
- 4** La temperatura, en grados Celsius, que alcanza el motor de un auto en los quince primeros minutos puede determinarse mediante la fórmula  $y = \frac{8}{25}x^2 + \frac{16}{25}x + 10$ .
- ¿Cuál es la temperatura inicial del motor?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿Qué temperatura alcanza el motor al cabo de 5 minutos?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿En qué minuto alcanza los 34 °C?  
R: \_\_\_\_\_
- 5** La infección producida por la picada de un insecto aumenta progresivamente su tasa de mortalidad en un mes, lo cual se expresa por la función cuadrática  $f(x) = 0,75x^2 + 4,5x - 3,75$ , donde la variable  $x$  representa los días transcurridos en un mes y la variable  $y$  las personas enfermas.
- ¿Cuántos enfermos habrá el primer día del mes?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿Cuántos enfermos habrá al finalizar los 31 días?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿En qué día del mes habrá 240 enfermos?  
R: \_\_\_\_\_
- 6** Un delfín toma impulso y salta por encima de la superficie del mar. La trayectoria que describe su salto sigue la función  $h(t) = -2t^2 + 12t + 24$ , donde  $h$  es la distancia en metros hasta el fondo del mar y  $t$  el tiempo en segundos.
- ¿A qué profundidad inicia el ascenso el delfín?  
R: \_\_\_\_\_
  - Si la profundidad del lugar es de 40 metros, ¿a los cuántos segundos el delfín sale a la superficie y vuelve a sumergirse?  
R: \_\_\_\_\_

Reforzamiento

Según tus resultados en la evaluación de la lección, repasa los temas que consideres necesarios.

Para tener mayor claridad de las características de una función cuadrática, es importante que seas capaz de graficar una función e identificar su vértice y soluciones.

Debes ser capaz de calcular las soluciones de una función cuadrática. También debes entender su forma canónica y observar los cambios en las coordenadas de la función a partir de las modificaciones de sus parámetros.

Es importante que puedas identificar las regiones de pares ordenados que representan las soluciones de una inecuación cuadrática.

**1** Grafica ambas funciones en el plano. Luego, responde.

$$f(x) = x^2 - 3x - 4$$

$$g(x) = (x - 3)^2 - 1$$

a. Completa las tablas.

x	-3	-2	-1	1	2	3
f(x)						

x	-3	-2	-1	1	2	3
g(x)						



b. ¿Cuáles son las intersecciones con los ejes de ambas funciones?

R: \_\_\_\_\_

c. Identifica las coordenadas del punto vértice de ambas funciones.

R: \_\_\_\_\_

**2** Identifica el error en cada afirmación con respecto a la función

$$f(x) = -4x^2 + 24x - 32. \text{ Luego, corrígelo.}$$

a.  $f(-5) - f(5) = -264$ .

Error: \_\_\_\_\_

Corrección: \_\_\_\_\_

b. Los ceros de  $f(x)$  son  $-2$  y  $-4$ .

Error: \_\_\_\_\_

Corrección: \_\_\_\_\_

c. La forma canónica de la función  $f$  es  $-4(x + 3)^2 - 4$ .

Error: \_\_\_\_\_

Corrección: \_\_\_\_\_

**3** Analiza cada afirmación. Luego, escribe V o F según corresponda.

Justifica tu respuesta.

a. \_\_\_\_\_ El punto  $P(3, -4)$  es parte de las soluciones de la inecuación  $y > x^2 - 2x - 3$ .

Justificación: \_\_\_\_\_

b. \_\_\_\_\_ El punto  $P(4, 6)$  no es parte de las soluciones de la inecuación  $y < 2x^2 + 2x - 12$ .

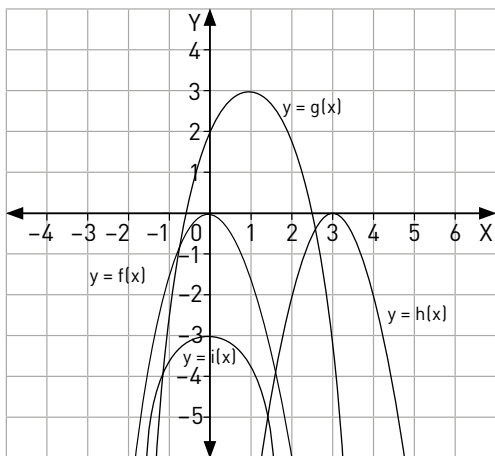
Justificación: \_\_\_\_\_

c. \_\_\_\_\_ Los valores de  $y$  de la inecuación  $y > x^2 + 4x + 1$  pertenecen al conjunto  $]-3, \infty[$ .

Justificación: \_\_\_\_\_

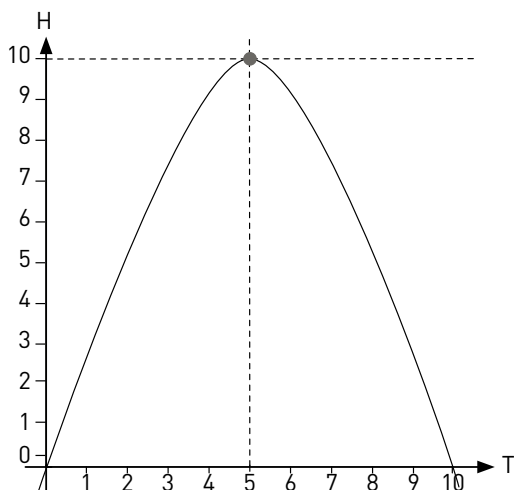
## Profundización

- 1 Identifica las coordenadas de los vértices de las funciones trasladadas de la función  $c(x) = 6x - \frac{1}{500}x^2$ . Luego, escribe su forma canónica.



Función	Vértice	Forma Canónica
f(x)	(0, 0)	$f(x) = -\frac{3}{2}x^2$
g(x)		
h(x)		
i(x)		

- 2 El siguiente gráfico representa la altura, en metros, que alcanza una pelota saltarina a medida que pasa el tiempo.



- a. ¿Cuál es la variable dependiente?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la variable independiente?  
R: \_\_\_\_\_
- c. ¿Cuánto se demora en volver a tocar el piso?  
R: \_\_\_\_\_

- 3 El precio de una blusa a medida que pasan los meses está modelado por la función  $y = -x^2 + 13x - 12$ .

- a. ¿En qué mes alcanzará su mayor valor?

R: \_\_\_\_\_

- b. ¿Qué valor alcanza en el cuarto mes?

R: \_\_\_\_\_

## Función inversa

Repasa algunos contenidos que utilizarás durante esta lección.

- 1** Se tienen tres máquinas: la primera eleva al cuadrado el número que se introduce en ella, la segunda multiplica por tres el producto de la primera y la tercera aumenta todo en seis. ¿Qué función describe los procesos de las tres máquinas?

$$f(x) = x^2 + 3x + 6$$

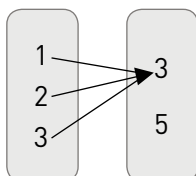
$$f(x) = 3x^2 + 6$$

$$f(x) = 3x^2 + 3x + 6$$

- 2** Relaciona con una flecha cada función con su tabla respectiva.

$$f(x) = 2x - 2$$

x	f(x)
1	3
2	5
3	7



x	f(x)
1	0
2	2
3	4

$$f(x) = 2x + 1$$

x	f(x)
1	3
2	3
3	3

- 3** Escribe la función que representa cada una de las siguientes tablas.

x	0	1	2	3
f(x)	0	2	4	6

\_\_\_\_\_

x	0	1	2	3
f(x)	3	4	5	6

\_\_\_\_\_

x	0	1	2	3
f(x)	0	1	4	9

\_\_\_\_\_

x	0	1	2	3
f(x)	5	5	5	5

\_\_\_\_\_

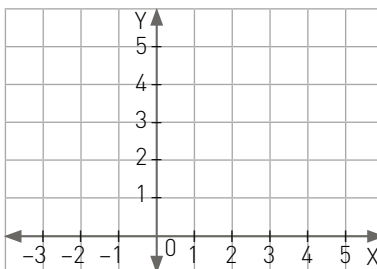
que observas.

a.  $f(x) = x$  y  $g(x) = x + 1$

Diferencia: \_\_\_\_\_

b.  $h(x) = 2x$  y  $j(x) = 2x + 1$

Diferencia: \_\_\_\_\_



Como en esta lección estudiarás un nuevo tipo de función, la inversa de una función dada, recuerda el concepto de función.

Recuerda que una función tiene diferentes representaciones: diagrama sagital, tabla, gráfico o expresión algebraica.

Recuerda que una función lineal tiene la forma  $f(x) = ax$  y una función afín es  $g(x) = ax + b$ .

## → Tema 1 ¿Cuándo una función tiene función inversa?

### Practico

- 1** Invierte cada par ordenado o relación y verifica si se obtiene una función.

a.  $f(x) = \{(2,3), (3,5), (4,7)\}$

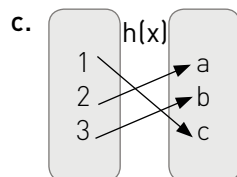
Es función

No es función

b.  $g(x) = \{(-1,3), (1,5), (2,3), (-2,5)\}$

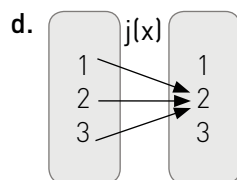
Es función

No es función



Es función

No es función



Es función

No es función

- 2** Indica cuál de los casos del ejercicio anterior tiene función inversa

R: \_\_\_\_\_

- 3** Completa las siguientes tablas con los valores correspondientes y relaciona los valores obtenidos.

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

x	0	1	2	3
f(x)				

$$g(x) = \frac{1-x}{x}$$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
g(x)				

- a. ¿Qué ocurre con los valores?

R: \_\_\_\_\_

- b. ¿Cómo se relacionan las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ ?

R: \_\_\_\_\_

- 4** Analizas las siguientes funciones y relaciona las que son inversas entre sí.

$f(x) = 2x$	$k(x) = x + 2$	$u(x) = x^2$
$r(x) = x - 2$	$j(x) = \frac{1}{2x}$	$s(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$g(x) = \frac{x}{2}$	$t(x) = \frac{1}{x^2}$	$h(x) = 2x + 2$

- a.  $f(x)$  Su inversa es \_\_\_\_\_  
No está su inversa \_\_\_\_\_

- b.  $g(x)$  Su inversa es \_\_\_\_\_  
No está su inversa \_\_\_\_\_

- c.  $h(x)$  Su inversa es \_\_\_\_\_  
No está su inversa \_\_\_\_\_

- d.  $j(x)$  Su inversa es \_\_\_\_\_  
No está su inversa \_\_\_\_\_

- e.  $k(x)$  Su inversa es \_\_\_\_\_  
No está su inversa \_\_\_\_\_

- f.  $r(x)$  Su inversa es \_\_\_\_\_  
No está su inversa \_\_\_\_\_

- g.  $s(x)$  Su inversa es \_\_\_\_\_  
No está su inversa \_\_\_\_\_

- h.  $t(x)$  Su inversa es \_\_\_\_\_  
No está su inversa \_\_\_\_\_

- i.  $u(x)$  Su inversa es \_\_\_\_\_  
No está su inversa \_\_\_\_\_

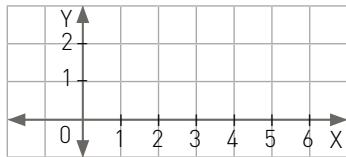


**Me desafío**

**1** Valora y grafica los puntos obtenidos de las siguientes funciones.

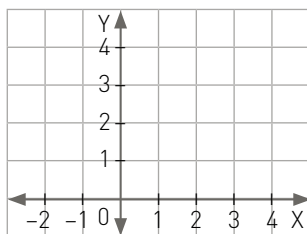
a.  $f(x) = \log_2 x$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
f(x)					



b.  $g(x) = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2
g(x)					



c. Si unes con una curva los puntos graficados, ¿qué semejanza encuentras entre ambos gráficos?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**2** Determina el dominio y el recorrido de las funciones del problema anterior.

a.  $f(x)$

Dom  $f(x)$  = \_\_\_\_\_

Rec  $f(x)$  = \_\_\_\_\_

b.  $g(x)$

Dom  $f(x)$  = \_\_\_\_\_

Rec  $f(x)$  = \_\_\_\_\_

c. ¿Qué relación observas entre el dominio y el recorrido de estas funciones?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**3** Describe paso a paso cómo hallar la inversa de cada función dada.

a.  $h(x) = \frac{3x-7}{5}$

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

b.  $r(x) = \frac{2x}{3} + 7$

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

c. ¿En qué se diferencian los pasos que se deben seguir en cada función?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**4** Describe paso a paso cómo hallar la inversa de cada función dada.

Dato 1:  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  tiene como dominio todos los reales menos el -2.

Dato 2:  $g(x) = \frac{1-2x}{x}$  tiene como dominio todos los reales menos el 0.

a. ¿Son estas dos funciones inversas entre sí?, ¿por qué?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

b. Si lo son, ¿se puede determinar el recorrido de cada una de las funciones?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

c. Calcula  $f(2)$  y luego aplica la función  $g$  al resultado obtenido. ¿Qué sucede?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

- 1 ¿Qué significa esta habilidad para ti? ¿Significa lo mismo para el resto de tus compañeros y compañeras? Conversa con ellos.

---



---

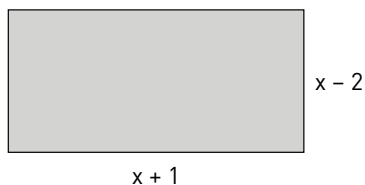


---



---

- 2 Lee el siguiente problema y el resultado entregado por el estudiante que lo resolvió. Problema: El área del rectángulo de la figura es  $70 \text{ cm}^2$ , ¿cuáles son sus dimensiones?



Solución:  $(x - 2)(x + 1) = 70,$

$$x^2 - x - 72 = 0$$

Respuesta:  $x_1 = 9$  y  $x_2 = -8$

- a. Tanto la ecuación como sus soluciones son correctas, pero ¿es esa la respuesta requerida por el problema? ¿Cuál es la respuesta adecuada al problema?

---



---

- b. ¿Qué habilidad no usó la persona que resolvió el problema? Justifica tu respuesta.

---



---

- 3 Realiza las siguientes actividades.

- a. Resuelve el problema.

Hace 3 años podía describir mi edad diciendo que al multiplicarla por 15 le faltaban 100 años para completar su cuadrado. ¿Cuál es mi edad ahora?

---

- b. En qué paso del problema utilizaste la habilidad de argumentar y comunicar. Justifica tu respuesta.

---



---

- c. ¿Qué importancia tiene la habilidad trabajada en estas actividades?

---



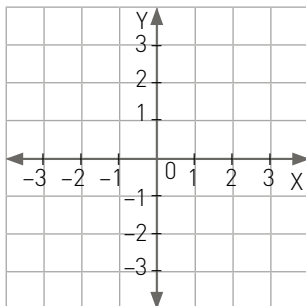
---

**Tema 2** ¿Cómo se relaciona la gráfica de una función y la de su inversa?

**Practico**

**1** Realiza las siguientes actividades.

a. Grafica la función  $f(x) = x$  en el siguiente plano cartesiano.



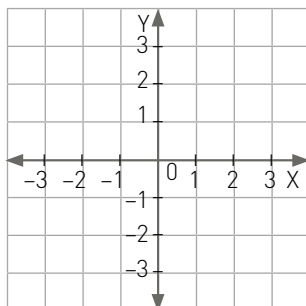
b. Determina dos características que tiene la gráfica de la función  $f(x)$  en el plano cartesiano.

R: \_\_\_\_\_

**2** Realiza las siguientes actividades.

a. Grafica las siguientes funciones:

- De color azul la función  $r(x) = 3x$ .
- De color verde la función  $s(x) = \frac{x}{3}$
- De color rojo la función  $f(x) = x$



a. ¿Qué relación hay entre las funciones azul y verde respecto a la de color rojo?

R: \_\_\_\_\_

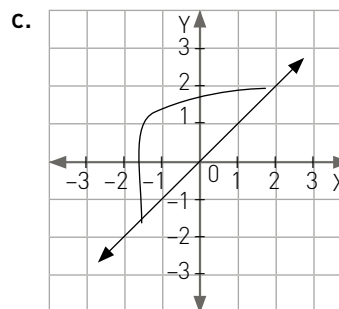
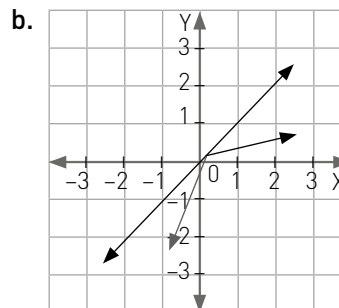
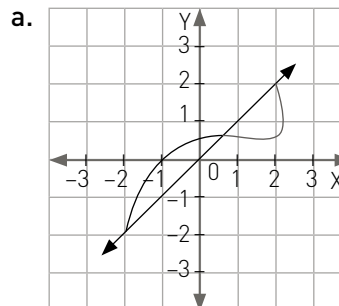
b. Une los puntos  $(1, 3)$  y  $(3, 1)$ . ¿Qué ángulo se forma con la recta de  $f(x)$ ?

R: \_\_\_\_\_

c. ¿Qué ocurriría si se dobla el plano siguiendo la línea roja?

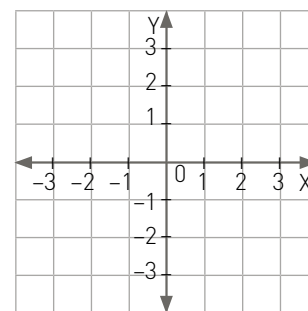
R: \_\_\_\_\_

**3** Cada gráfico muestra las funciones  $f(x)$  e  $y = x$ , grafica la inversa de  $f(x)$ .



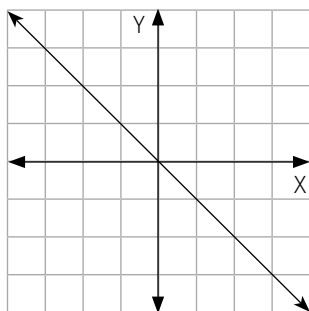
**4** Restringiendo adecuadamente el dominio de  $r(x)$ , demuestra gráficamente si las siguientes funciones son inversas una de la otra.

$$r(x) = x^2 - 2 \text{ y } s(x) = \sqrt{x + 2}$$



**Me desafío**

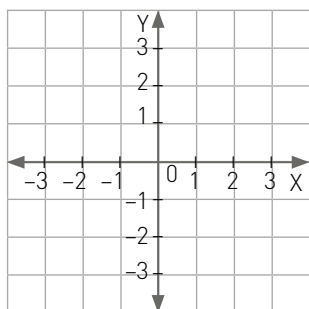
- 1** Representa en la gráfica las funciones  $v(x) = -x + 2$  y  $w(x) = -x - 2$ .



- a. ¿Estas dos funciones son inversas?, ¿por qué?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Podemos relacionar dichas funciones con la gráfica de la función  $h(x) = -x$ ?, ¿por qué?  
R: \_\_\_\_\_

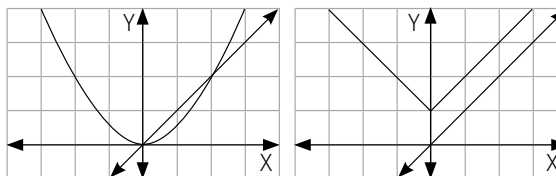
- 2** Realiza las siguientes actividades.

- a. Grafica las funciones dadas  $f(x) = x$  y  $g(x) = \frac{1}{x}$



- b. ¿Cuál es la inversa de  $f(x)$  y de  $g(x)$ ?  
 $f^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_  
 $g^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_
- c. Genera un par de funciones en las que se repita la situación de las funciones dadas.

- 3** Observa las siguientes gráficas.



- a. Estas gráficas, ¿podrían tener función inversa? Justifica tu respuesta.

R: \_\_\_\_\_

- b. Si la respuesta es NO, ¿es posible replantear las funciones para que tengan función inversa?

R: \_\_\_\_\_

- 4** Analiza cada caso para responder las siguientes preguntas.

Caso 1: Tres pintores, trabajando en conjunto, se demoran 6 días en arreglar una casa. Si duplicamos el número de pintores, ¿cuántos se demorarían?

Caso 2: Si tres pintores pintan una muralla en dos días, ¿cuánto se demorarían en pintar cuatro murallas?

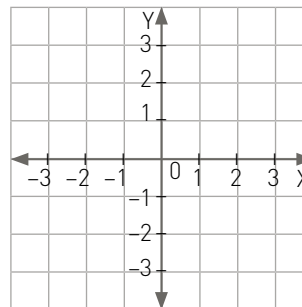
- a. ¿Puedes identificar de qué proporción se trata en cada caso?

R: \_\_\_\_\_

- b. ¿Es posible afirmar que ambas situaciones son inversas?

R: \_\_\_\_\_

- c. Representa cada caso.



**Tema 3** ¿Cómo es la función inversa de funciones lineales y afines?

**Practico**

**1** Determina la función inversa de cada una de estas funciones.

a.  $r(x) = x + 3$        $r^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_

b.  $s(x) = 2x$        $s^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_

c.  $t(x) = 2x + 3$        $t^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_

d. Determina si las funciones dadas son lineales o afines.

$r(x)$            

$s(x)$            

$t(x)$            

e. Considerando la relación de las funciones lineales y afines. Si a y b son números reales, con a distinto de cero, escribe la inversa de las siguientes funciones.

$f(x) = ax$		
$g(x) = x + b$		
$h(x) = ax + b$		

**2** Une cada función con su inversa.

a.  $f(x) = 3x$       \* $p(x) = x + 2$

b.  $g(x) = 2x - 2$       \* $q(x) = -\frac{x}{4}$

c.  $h(x) = x + 4$       \* $r(x) = \frac{x+2}{2}$

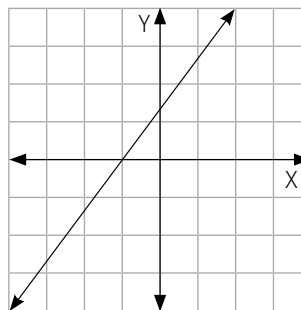
d.  $j(x) = 3x + 1$       \* $s(x) = \frac{x}{3}$

e.  $k(x) = -4x$       \* $t(x) = \frac{x-1}{3}$

f.  $m(x) = x - 2$       \* $v(x) = x - 4$

**3** Identifica la función según la gráfica y encuentra su inversa.

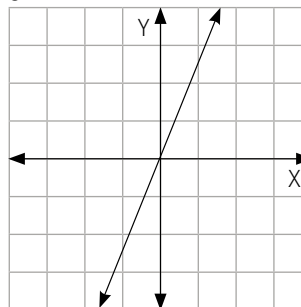
a.  $f(x)$



$f(x) =$  \_\_\_\_\_

$f^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_

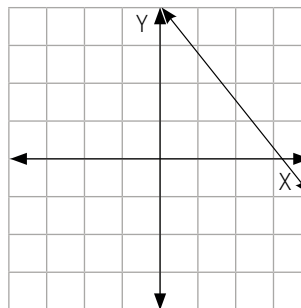
b.  $g(x)$



$g(x) =$  \_\_\_\_\_

$g^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_

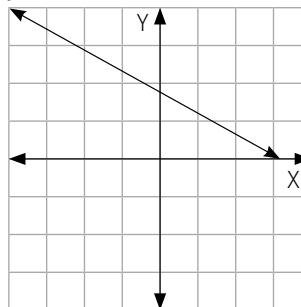
c.  $h(x)$



$h(x) =$  \_\_\_\_\_

$h^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_

d.  $j(x)$



$j(x) =$  \_\_\_\_\_

$j^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_

## Me desafío

- 1 Si modelamos el cobro de un taxi en la ciudad de Santiago utilizando la función:

$$f(x) = 130x + 200$$

- a. ¿Qué representan los valores 130 y 200?

R: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- b. ¿Qué representa la variable  $x$ ?

R: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- c. ¿Cuál sería la función inversa de  $f(x)$ ?

R: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- d. ¿Para qué nos serviría conocer la función inversa de  $f(x)$ ?, ¿Qué dato nos entregaría esta función inversa en relación a la situación problema?

R: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- 2 Plantea un problema que muestre una función lineal.

R: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- a. Determina la función y su inversa:

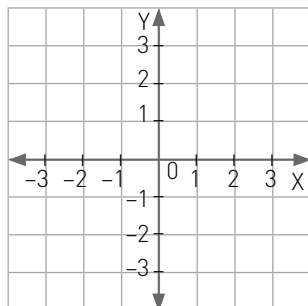
$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- b. Finalmente genera un problema contextualizado de esta función inversa que se relacione con tu problema inicial.

R: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- c. Grafica ambas situaciones.



- 3 Por un viaje familiar Paz faltó a clases, por lo que tuvo que sacar varias fotocopias, si las fotocopias salen \$19.

- a. ¿Cómo podría calcular el dinero que debe pedirle a su papá? Escribe la función que puede utilizar para responder la pregunta.

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- b. ¿Cuál sería la función inversa de la definida en a?

$$f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- c. En el contexto del problema, inventa una situación que pueda ser respondida con la función inversa.

R: \_\_\_\_\_

- 4 Ángela encuentra tres gatitos abandonados, los lleva al veterinario y debe vacunarlos. El veterinario debe tener la relación precisa de los remedios, esta es, 5 cc de una solución más 2 cc de otra por kilogramo.

- a. Si la masa de cada gato es  $x$  gramos, ¿cuál es la función que representa esta situación?

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- b. ¿Cuál sería la función inversa de la definida en a?

$$f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- c. En el contexto del problema, inventa una situación que pueda ser respondida con la función inversa.

R: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- 5 Con los puntos  $(7, 2)$  y  $(5, 6)$  se puede determinar la función que representa la recta por la que pasan.

- a. Encuentra la función.

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- b. ¿Con qué puntos podrías encontrar la función inversa de manera directa?

R: \_\_\_\_\_

- c. Encuentra la función inversa.

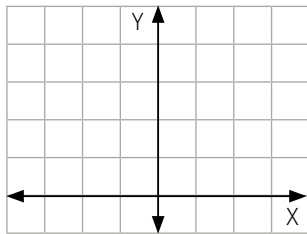
$$f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

**Tema 4** ¿Cuál es la función inversa de la función cuadrática?

**Practico**

1 Realiza las siguientes actividades.

a. Representa la función  $f(x) = x^2$



b. Determina el dominio y el recorrido de la función.

Dom  $f(x) =$  \_\_\_\_\_

Rec  $f(x) =$  \_\_\_\_\_

2 Siguiendo los pasos vistos anteriormente en la unidad, halla la inversa de esta función:

$$y = f(x) = x^2$$

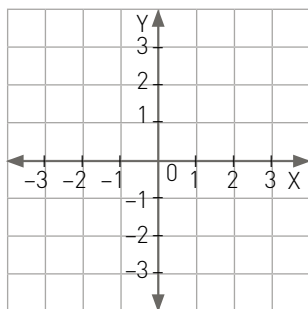
a. ¿Cuál es la relación que nos permite hacer despejar "y"?

R: \_\_\_\_\_

b. ¿Cuál sería la función inversa de la definida en a?

$f^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_

c. Gráfica esta función inversa.



d. ¿Qué ocurre con los valores negativos en esta función?

R: \_\_\_\_\_

e. Determina el dominio y el recorrido de la función.

Dom  $f(x) =$  \_\_\_\_\_

Rec  $f(x) =$  \_\_\_\_\_

3 Escribe la función inversa de las siguientes funciones cuadráticas.

a.  $p(x) = 4x^2$        $p^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_

b.  $q(x) = x^2 + 2$        $q^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_

c.  $r(x) = 2x^2 - 3$        $r^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_

d.  $s(x) = \frac{x^2}{9} + 1$        $s^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_

e.  $t(x) = \frac{x^2}{25}$        $t^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_

4 Identifica si las siguientes funciones tienen como función inversa una función cuadrática.

a.  $f(x) = (x + 3)$

b.  $g(x) = \sqrt{x + 5}$

c.  $h(x) = \sqrt{x - 6}$

d.  $j(x) = \sqrt{2} + x$

e.  $k(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

**Me desafío**

**1** El área de un círculo se puede representar con la función cuadrática  $c(r) = \pi r^2$ . ¿Es posible que esta expresión tenga una función inversa? Explica.

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**2** Realiza las siguientes actividades.

a. Expresa el área de un triángulo equilátero de lado  $x$ .

$A(x) =$  \_\_\_\_\_

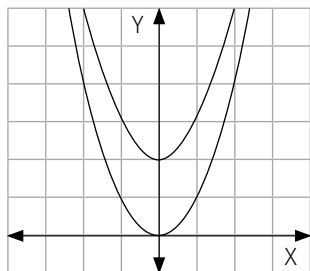
b. ¿Cuál sería su función inversa?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

c. ¿En qué caso nos sería útil la función inversa?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**3** Observa las funciones cuadráticas  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x^2 + 2$ .



a. ¿Cómo es el desplazamiento mediante el eje de las ordenadas?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

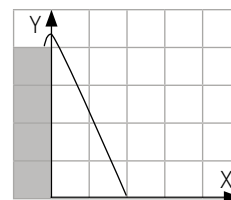
b. Si se acota el dominio de  $f$  y  $g$  a los reales positivos y el 0, ¿cuáles son las funciones inversas de  $f(x)$  y  $g(x)$ ?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

c. Determina el desplazamiento que tendrían las funciones inversas en el plano cartesiano.

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**4** La siguiente gráfica muestra el lanzamiento de un balón, el cual cayó a dos metros del edificio.



a. Sin saber la función que modela esa gráfica, ¿crees que podría existir una función inversa? Justifica.

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

b. ¿Cómo podrías establecer la función que representa la gráfica?

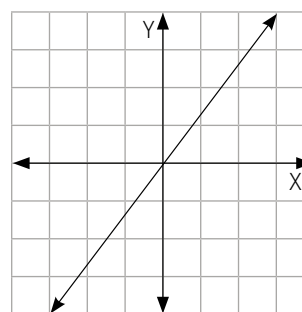
R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**5** Dada una función cuadrática y su inversa.

a. ¿En qué cuadrantes no se podrían intersectar?, ¿por qué?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

b. Compruébalo graficando.



**6** ¿Cuál de las siguientes funciones son inversas entre ellas y además se intersectan?

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x + 3)^2 & g(x) &= x^2 + 3 \\
 h(x) &= \sqrt{x + 3} \\
 j(x) &= \sqrt{x - 3} & k(x) &= x^2 - 3 \\
 l(x) &= \sqrt{x} - 3
 \end{aligned}$$



Reforzamiento

Según tus resultados en la evaluación de la lección, repasa los temas que consideres necesarios.

Recuerda. si  $f(x)$  y  $g(x)$  son inversas y  $\text{Dom } f(x): A$   $\text{Rec } f(x): B$ ; entonces  $\text{Dom } g(x): B$   $\text{Rec } g(x): A$ .

Puedes corroborar gráficamente si una relación es función y cuándo tiene una inversa.

Siempre ten en cuenta que, al aplicar una función a un elemento y luego al resultado aplicarle la inversa, el resultado es siempre el elemento inicial.

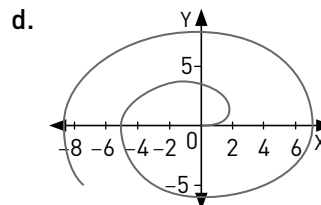
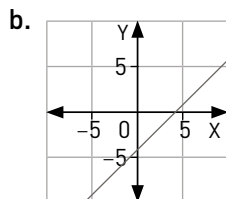
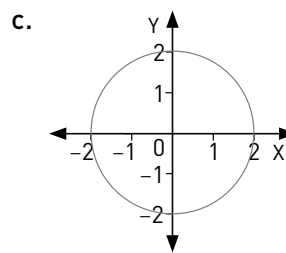
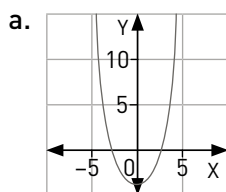
1 Dada la función definida por  $f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$ , determina los elementos indicados en cada caso.

- a. El dominio de la función  $f(x) =$  \_\_\_\_\_
- b. El recorrido de  $f(x) =$  \_\_\_\_\_
- c.  $f^{-1}(x) =$  \_\_\_\_\_

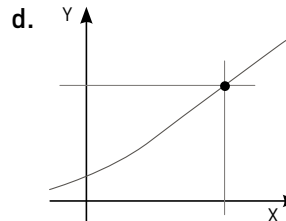
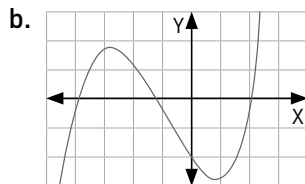
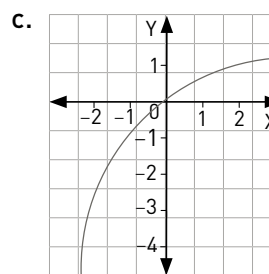
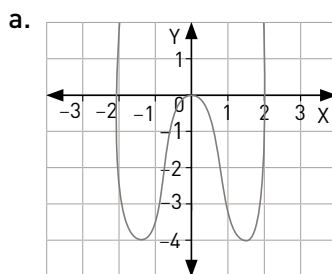
2  $f: A \rightarrow B, A \subseteq \mathbb{R}$  y  $B \subseteq \mathbb{R}$ ; A y B es dominio y recorrido de  $f(x)$ , de modo que la inversa  $f^{-1}(x) = x^2 - 1$  determina los valores que puedan contener los conjuntos A y B.

A: \_\_\_\_\_ y B: \_\_\_\_\_

3 Marca el o los gráficos que corresponden a funciones.



4 ¿Cuál de las siguientes gráficas tendría inversa sin necesidad de restringir su dominio?



## Profundización

1 Dada la función  $g(x) = 3^x$

- a. Encuentra, si es posible, el valor de  $g^{-1}\left(\frac{1}{9}\right) =$  \_\_\_\_\_
- b. ¿Es posible determinar el valor de  $g^{-1}(3^a \cdot 3^b)$  \_\_\_\_\_

2 El segundo medio tiene planificado un viaje a fin de año. Para juntar dinero venderán pizza, cuyo cobro lo han organizado de la siguiente manera: la base de la pizza familiar costará \$1500 y cada ingrediente tendrá un costo de \$300.

Si la cantidad de ingrediente es  $x$ , entonces:

a. ¿Qué función nos entregaría el valor total de cada pedido?

R: \_\_\_\_\_

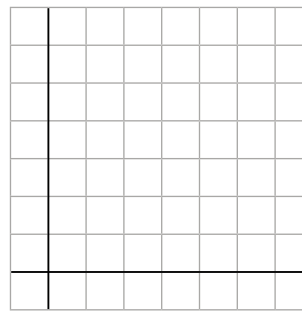
b. Si una pizza cuesta \$3000, ¿cuántos ingredientes tendrá?

R: \_\_\_\_\_

c. ¿Cómo representar la función para reconocer el número de ingredientes de acuerdo al costo?

R: \_\_\_\_\_

d. Determina la gráfica de ambas situaciones.



3 Una inmobiliaria está promoviendo la venta de uno de sus edificios, para lo cual están preparando una oferta llamativa:

Primera propuesta: descuento del 10% a todos los departamentos sin importar tamaño.

Segunda propuesta: descuento del 5% a todos los departamentos, más un descuento de \$100 000.

a. La variable  $x$  estaría representada por \_\_\_\_\_

b. ¿Cuál sería la función que representa el descuento de la primera propuesta?

R: \_\_\_\_\_

c. ¿Cuál sería la función que representa el costo del departamento de la segunda propuesta?

R: \_\_\_\_\_

d. ¿En qué se diferencian ambas funciones?

R: \_\_\_\_\_

e. Determina las funciones inversas de cada propuesta.

R: \_\_\_\_\_

Reúnete con el mismo grupo con que trabajaste esta sección del Texto y realiza con ellos y ellas las siguientes actividades.

La historia dice que Galileo Galilei subió a la parte superior de la torre de Pisa y dejó caer simultáneamente dos esferas: una pesada de hierro, y otra más ligera, de madera. En contra de lo intuitivo, ambas esferas llegaron al suelo al mismo tiempo. Galileo afirmó entonces que la gravedad actúa de igual forma sobre todos los cuerpos y enunció la Ley de Caída de los Cuerpos: “en el vacío, los cuerpos caen con la misma aceleración”. Galileo estaba consciente de que en su experimento no había vacío, los objetos sufrían la resistencia del aire, pero igual pudo producir un modelo matemático que describía la caída libre.

- 1 En el Texto graficaron los datos teóricos y los experimentales y se les pidió comparar los resultados. ¿Qué criterios utilizaron para realizar esa comparación?

---



---

- 2 Cuando se realizan experimentos como el del Texto, ¿qué factores pueden influir para que el modelo matemático no coincida exactamente con los datos experimentales?

---



---

- 3 En el Texto se les pidió hacer una medida por altura, es decir, si la altura elegida fue 5 m entonces lanzaban el objeto una vez desde esa altura y completaban la tabla. Si se les hubiera pedido realizar el experimento 20 veces, sacaran el promedio de los resultados y ese dato lo anotaran en la tabla, ¿habría variado la diferencia con los resultados teóricos? Explica por qué.

---



---

- 4 De las dos tablas del Texto copien las columnas y calculen el promedio de los errores.

Tiempo experimental (s)	Tiempo teórico (s)	Diferencia (error)

$\bar{x}_{\text{error}} =$  \_\_\_\_\_

- 5 Escriban situaciones de la vida real que cumplan con las condiciones dadas.

Situación 1: El error no es aceptable, se necesita otro modelo.

Situación 2: El error es aceptable, se utilizará el modelo.

Reúnete con tres compañeros o compañeras y repasen los temas de esta unidad. Luego, realicen las siguientes actividades.

### ➔ Lección 3 - Tema 1 ¿Qué se entiende por cambio porcentual?

- 1 ¿Cómo explicarías qué es un cambio porcentual?

R: \_\_\_\_\_

### ➔ Lección 3 - Tema 2 ¿En qué se aplica el interés compuesto?

- 2 Menciona dos casos que involucran cambios porcentuales:

R: \_\_\_\_\_

- 3 En una distribuidora se compran las poleras para después venderlas con un 25% de ganancia. ¿Cuánto fue el costo original de cada polera si se vendieron a \$5000 la unidad?

R: \_\_\_\_\_

- 4 Se necesita cercar un terreno cuadrado cuyo perímetro es 5000 m. Si al medirlo bien, resulta que cada lado era un 20 % más largo, ¿en qué porcentaje aumentará el metraje de la cerca?

R: \_\_\_\_\_

### ➔ Lección 4 - Tema 1 ¿Cuándo se dice que una ecuación es cuadrática?

- 5 ¿Cuáles serían las características más importantes de una ecuación cuadrática?

R: \_\_\_\_\_

- 6 ¿Cuál de las siguientes expresiones serían ecuaciones cuadráticas?

a.  $\frac{1}{x-3} = x+2$

b.  $(x-5)(x+6) = x^2$

- 7 Determina los coeficientes a, b y c de cada ecuación cuadrática del ítem anterior.

a. a = \_\_\_\_\_, b = \_\_\_\_\_ y c = \_\_\_\_\_

b. a = \_\_\_\_\_, b = \_\_\_\_\_ y c = \_\_\_\_\_

### ➔ Lección 4 - Tema 2 ¿En qué consiste la resolución por factorización?

- 8 ¿Cómo haces para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática de la forma  $(x+a)(x-b) = 0$ ?

R: \_\_\_\_\_

- 9 Resuelve las siguientes ecuaciones mediante factorización.

a.  $x^2 - 2x - 8 = 0$  \_\_\_\_\_

b.  $x^2 + 2x - 3 = 0$  \_\_\_\_\_

c.  $x^2 + 11x + 30 = 0$  \_\_\_\_\_

d.  $x^2 - 21x + 110 = 0$  \_\_\_\_\_

➔ **Lección 4 - Tema 3 ¿Cuál es el algoritmo para completar el cuadrado?**

**10** Resuelve la ecuación cuadrática  $x^2 - 6x + 8 = 0$  por completación de cuadrado y mostrando el proceso paso a paso.

R: \_\_\_\_\_

➔ **Lección 4 - Tema 4 ¿Cómo se aplica la fórmula general?**

**11** ¿Cuál es la fórmula general de la ecuación cuadrática?

R: \_\_\_\_\_

**12** A partir del valor del discriminante, ¿qué podemos conocer?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**13** Resuelve las ecuaciones por medio de la fórmula general.

a.  $6x^2 - 5x + 1 = 0$      $x_1 = \text{---}, x_2 = \text{---}$

b.  $3x^2 + x - 2 = 0$      $x_1 = \text{---}, x_2 = \text{---}$

➔ **Lección 5 - Tema 1 ¿Cuándo se dice que una función es cuadrática?**

**14** ¿Cuáles son las características de una función cuadrática?

R: \_\_\_\_\_

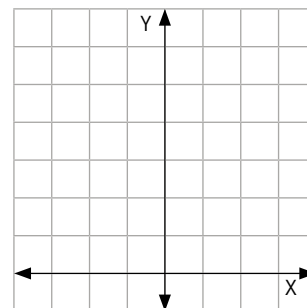
➔ **Lección 5 - Tema 2 ¿Cómo se interpretan los parámetros de la gráfica?**

**15** ¿Cómo se denomina la curva de la gráfica que representa una función cuadrática?

R: \_\_\_\_\_

**16** Representa una función cuadrática e indica los puntos críticos de su curva.

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_



➔ **Lección 5 - Tema 3 ¿Cómo cambia la gráfica según cada parámetro?**

**17** ¿Cómo se denomina la curva de la gráfica que representa una función cuadrática?

R: \_\_\_\_\_

## Lección 6 - Tema 1 ¿Cuándo una función tiene función inversa?

- 18** ¿Qué características debe tener una función para tener inversa?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

- 19** Si  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  y  $B = \{-7, -2, 5, 8\}$ , entonces, ¿cuál de las siguientes funciones tiene inversa?

a.

x	2	3	4	5
f(x)	-2	5	-7	8

b.

x	2	3	4	5
g(x)	8	-2	-7	-2

- 20** Verifica si  $f(x) = x^2 - 4$  tiene función inversa.

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

- 21** Determina el dominio y el recorrido de  $f(x) = \frac{x+2}{x}$ .

Dom  $f(x)$  = \_\_\_\_\_

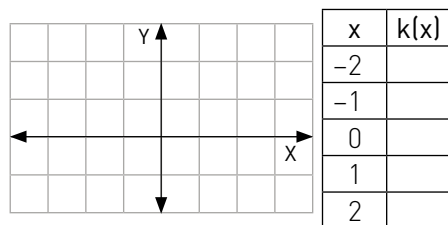
Rec  $f(x)$  = \_\_\_\_\_

## Lección 6 - Tema 2 ¿Cómo se relaciona la gráfica de una función y la de su inversa?

- 22** Responde la pregunta del tema:

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

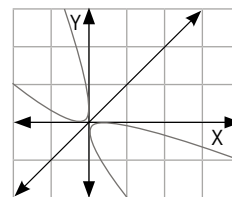
- 23** Grafica la función  $k(x) = \frac{1}{x}$ .



¿Es posible graficar su inversa?, ¿por qué?

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

- 24** Observa la gráfica:



- a. ¿Son simétricas ambas gráficas?

R: \_\_\_\_\_

- b. ¿Es suficiente que sean simétricas para afirmar que corresponden a funciones inversas?

R: \_\_\_\_\_

## Lección 6 - Tema 3 ¿Cómo es la función inversa de funciones lineales y afines?

- 25** ¿En qué se diferencia la función lineal de la función afín?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_


- 26** ¿Dónde intersecan el eje Y las funciones lineales y las funciones afines?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

- 27** ¿Cuál es la función inversa de la recta formada por los puntos  $(-1, 2)$  y  $(2, 3)$ ?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

De acuerdo a los resultados que obtuviste en la evaluación de esta Unidad en el Texto, repasa cada tema y resuelve los ejercicios y problemas.

Lección 3, Tema 1	<p>Modelan un crecimiento o decrecimiento porcentual constante.</p>	<p><b>1</b> Revisa tus tres últimas notas de matemática, observa si existe alguna relación porcentual entre ellas y ve cómo podría subir o bajar tu promedio a lo largo del año. R: _____</p> <p><b>2</b> Observa la siguiente máquina, cada vez que el valor avanza se va descontando el 5%. ¿Qué valor resulta al pasar por tercera vez?</p> 
Lección 3, Tema 2	<p>Identifican el crecimiento o decrecimiento porcentual constante en representaciones gráficas.</p>	<p><b>3</b> Representa la situación anterior en tu cuaderno.</p> <p>a. ¿Cuál es el comportamiento de la gráfica? R: _____</p> <p>b. ¿Existen valores que no se pueden considerar en este caso? R: _____</p> <p>c. ¿Cómo determinarías el dominio y el recorrido de esta relación? R: _____</p>
Lección 3, Tema 2	<p>Identifican el cambio constante y el cambio porcentual constante en situaciones reales.</p>	<p><b>4</b> Representa las siguientes situaciones en tu cuaderno.</p> <p>a. En la verdulería venden las manzanas por unidad. Si cada manzana cuesta \$150, ¿cómo quedaría representada la situación en una función? R: _____</p> <p>b. En otra verdulería, también las venden por unidad, pero si es más de una manzana se descuenta un 2% por cada una. ¿Cómo plantearías esta situación? R: _____</p> <p>c. ¿Cómo se diferencian las situaciones en sus planteamientos? R: _____</p> <p>d. ¿Qué visualizas en sus gráficas respectivas? R: _____</p>
Lección 3, Tema 2	<p>Resuelven problemas de ciencias y de la vida diaria que involucren el cambio porcentual constante.</p>	<p><b>5</b> Un auto que cuesta \$5 000 000 se va desvalorando en un 2% cada año. Según esto, responde las siguientes preguntas.</p> <p>a. ¿Cuál será el valor del auto pasado los años indicados?</p> <p>1 año _____</p> <p>2 años _____</p> <p>3 años _____</p> <p>5 años _____</p> <p>b. ¿En cuántos años el auto tendrá un valor de \$4 802 000? R: _____</p>

## Lección 4, Temas 1 y 2

Modelan problemas geométricos, de la vida cotidiana, de ciencias naturales y sociales mediante ecuaciones cuadráticas.

- 6** Un terreno tiene un largo 3 metros mayor que su ancho. Si el área del terreno es de  $54 \text{ m}^2$ :
- ¿Qué ecuación representa la situación?  
R: \_\_\_\_\_
  - ¿Cuáles son las medidas de su largo y ancho?  
R: \_\_\_\_\_
  - Determina el perímetro del terreno.  
R: \_\_\_\_\_

## Lección 4, Tema 3

Resuelven algebraicamente las ecuaciones cuadráticas mediante varios métodos, como factorización, completar el cuadrado y aplicar la fórmula.

- 7** Resuelve las ecuaciones cuadráticas mediante el método de la factorización.
- $x^2 - 9 = 0$   $x_1 = \text{---}, x_2 = \text{---}$
  - $2x^2 - x - 3 = 0$   $x_1 = \text{---}, x_2 = \text{---}$
  - $x^2 - 9x + 18 = 0$   $x_1 = \text{---}, x_2 = \text{---}$
- 8** Encuentra las soluciones de las ecuaciones aplicando la fórmula general.
- $x^2 - 2 = 0$   $x_1 = \text{---}, x_2 = \text{---}$
  - $4x^2 - 8x + 3 = 0$   $x_1 = \text{---}, x_2 = \text{---}$
  - $9x^2 + 9x - 10 = 0$   $x_1 = \text{---}, x_2 = \text{---}$

## Lección 4, Tema 4

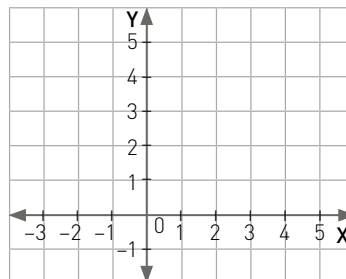
Identifican y representan casos en los cuales la ecuación cuadrática tiene una sola o ninguna solución.

- 9** ¿Qué valor deberían tener los coeficientes  $a$  y  $b$  para que la expresión tenga una sola solución?
- $x^2 - 2ax + 36 = 0$   $a = \text{---}$
  - $4x^2 - 12x + b^2 = 0$   $b = \text{---}$
- 10** Conociendo la fórmula general, ¿cómo podemos determinar las soluciones mediante el discriminante?  
R: \_\_\_\_\_

## Lección 5, Tema 1

Reconocen representaciones de la función cuadrática en curvas de la vida cotidiana.

- 11** Representa en el gráfico la función que modela el área de un cuadrado.



- 12** Determina los puntos en que cada función interseca el eje X.
- $f(x) = x^2 - 2x - 3$   $x_1 = \text{---}, x_2 = \text{---}$
  - $f(x) = x^2 - 2x + 1$   $x_1 = \text{---}, x_2 = \text{---}$
  - $f(x) = x^2 - 3$   $x_1 = \text{---}, x_2 = \text{---}$

- 13** Escribe una función cuadrática que tenga una sola intersección con el eje X.  
R: \_\_\_\_\_



Elaboran gráficos de la función  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , considerando  $a > 0$  o  $a < 0$ .

**14** Representa en tu cuaderno las siguientes funciones.

Plano 1:  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = -x^2$

Plano 2:  $f(x) = x^2 + 1$  y  $g(x) = -x^2 - 1$

¿Qué ocurre con las funciones de acuerdo al signo de la variable  $a$ ?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Marcan y encuentran numéricamente la intersección de la gráfica de la función  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , con el eje  $x$ .

**15** Dadas las siguientes funciones, determina, sin graficar, si intersectarían al eje  $x$  y dónde la intersectarían.

a.  $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$  \_\_\_\_\_

b.  $g(x) = x^2 + x - 2$  \_\_\_\_\_

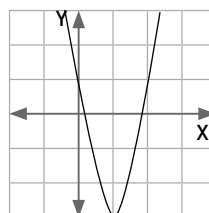
c.  $h(x) = x^2 + 4x + 4$  \_\_\_\_\_

d. ¿Cuál fue el procedimiento que realizaste para hacerlo?

R: \_\_\_\_\_

Grafican y derivan la función para distintos valores de sus parámetros, obteniendo la forma canónica.  $y = a(x - d)^2 + e$ .

**16** Observa el desplazamiento de la gráfica respecto  $y = x^2$  y establece la función en forma canónica.



**17** Determina los desplazamientos respecto  $y = x^2$  y el comportamiento de la parábola de las siguientes funciones.

a.  $f(x) = -2(x - 3)^2 - 5$

b.  $f(x) = (x + 1)^2 + 4$

c.  $f(x) = x^2 + 3$

R: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

**18** Observa la inecuación  $x^2 - x - 6 > 0$  y sigue los pasos que se indican.

a. Cambia la desigualdad por una igualdad. \_\_\_\_\_

b. Factoriza la expresión. \_\_\_\_\_

c. Indica los ceros de la ecuación. \_\_\_\_\_

d. Reemplaza en la siguiente tabla y valora los números que están bajo, entre y sobre los ceros, observando solo su signo.

	-2	3
(x )		
(x )		
(x )(x )		

e. ¿Qué ocurre con los signos de los productos?

R: \_\_\_\_\_

Analizan las variaciones de la gráfica mediante diferentes medios de representación.

Lección 5, Tema 4

Modelan situaciones de cambio cuadrático de la vida cotidiana y de las ciencias por medio de la función cuadrática.

**19** ¿Cuál de los siguientes temas se pueden representar como una función cuadrática?

- a. El área de un cuadrado.
- b. El perímetro de un triángulo rectángulo.
- c. La trayectoria de un balón.
- d. La cantidad de un producto y su precio.

Lección 6, Tema 1

Elaboran tablas de valores de una función y de su inversa, reconociendo el intercambio de los valores en los pares (x, y).

**20** La siguiente tabla muestra algunos valores de la función f.

x	-1	0	1	2
f(x)	4	3	2	1

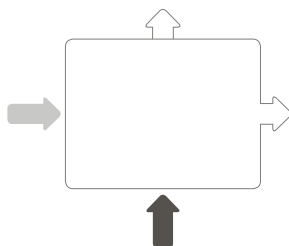
a. ¿Podemos determinar una tabla para su inversa?

R: \_\_\_\_\_

Lección 6, Temas 3 y 4

Representan una función de manera concreta y representan de manera adecuada la función inversa

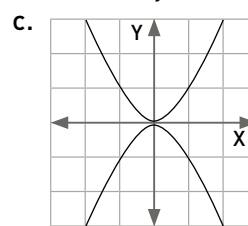
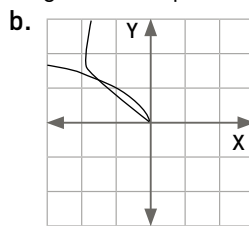
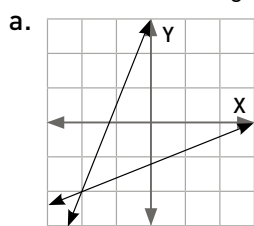
**21** Observa la máquina: si se ingresa por la flecha gris, se obtendrá el valor de f(x); si ingresa por la flecha negra, se evaluará f<sup>-1</sup>(x). Completa el cuadro.



- (4):  $f(x) = x^2 + 2$  \_\_\_\_\_
- ↑ (11): \_\_\_\_\_
- (-3):  $f(x) = 4x^2 - 3$  \_\_\_\_\_
- ↑ (0,5): \_\_\_\_\_
- (-0,2):  $f(x) = 2x + 1$  \_\_\_\_\_
- ↑ (0,5): \_\_\_\_\_

Reconocen la función inversa de una función dada en representaciones pictóricas y simbólicas.

**22** Determina si los siguientes gráficos representan una función y su inversa.



Determinan las ecuaciones de las funciones inversas de funciones lineales y cuadráticas.

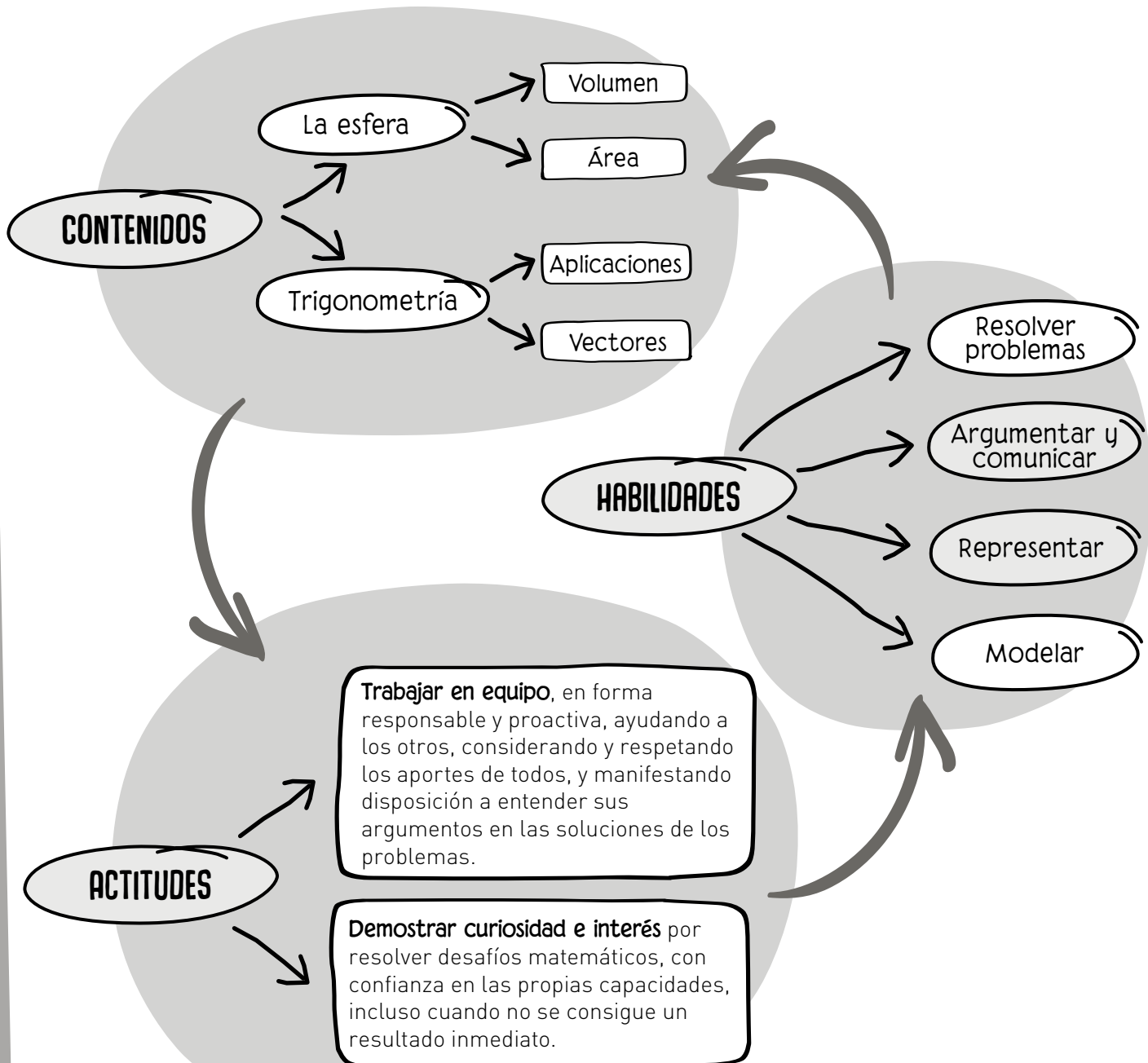
**23** Encuentra la función inversa de las siguientes funciones.

- a.  $f(x) = ax^2$  \_\_\_\_\_
- b.  $g(x) = x^2 + b$  \_\_\_\_\_
- c.  $h(x) = (x + c)^2$  \_\_\_\_\_
- d.  $j(x) = a(x + c)^2 + b$  \_\_\_\_\_



# GEOMETRÍA

Antes de comenzar a trabajar observa el siguiente esquema que muestra los principales conceptos que estudiarás en esta unidad, las habilidades que desarrollarás y las actitudes que deberás mantener para alcanzar tus metas.



# La esfera

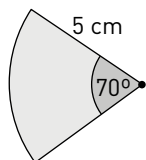
Repasa algunos contenidos que utilizarás durante esta lección.

- 1** Redondea a  $18,2\bar{5}$  a la precisión indicada en cada caso.
- A la decena. \_\_\_\_\_
  - Con un dígito decimal. \_\_\_\_\_
  - Con tres dígitos decimales. \_\_\_\_\_
  - A la unidad. \_\_\_\_\_

- 2** Determina los dos números enteros más cercanos a cada raíz.
- \_\_\_\_\_  $\sqrt{7}$  \_\_\_\_\_
  - \_\_\_\_\_  $\sqrt{131}$  \_\_\_\_\_
  - \_\_\_\_\_  $\sqrt[3]{12}$  \_\_\_\_\_
  - \_\_\_\_\_  $\sqrt[3]{23}$  \_\_\_\_\_

- 3** Calcula la longitud de la circunferencia y el área del círculo.  
Considera  $\pi \approx 3,14$ .
- Radio = 6 cm.      Circunferencia = \_\_\_\_\_; Área = \_\_\_\_\_
  - Dímetro = 8 cm.      Circunferencia = \_\_\_\_\_; Área = \_\_\_\_\_

- 4** Determina el área y el perímetro del sector circular de la figura.



Perímetro = \_\_\_\_\_  
Área = \_\_\_\_\_

- 5** Calcula el área de la superficie de cada cilindro, según las características dadas. Considera  $\pi \approx 3,14$  cuando sea necesario y entrega tus resultados con 2 dígitos decimales.

- El radio basal mide 6 cm y la altura es de 18 cm.  
Área = \_\_\_\_\_; Volumen = \_\_\_\_\_
- La altura es 6 cm y el radio es el 50 % de la altura.  
Área = \_\_\_\_\_; Volumen = \_\_\_\_\_
- El diámetro es 32 cm y la altura es igual a la raíz cuadrada del radio.  
Área = \_\_\_\_\_; Volumen = \_\_\_\_\_
- La altura es el doble del diámetro y el radio es 6 cm.  
Área = \_\_\_\_\_; Volumen = \_\_\_\_\_

- 6** Calcula el área de la superficie de cada cono, según las características dadas. Considera  $\pi \approx 3,14$  cuando sea necesario y entrega tus resultados con 2 dígitos decimales

- La altura de un cono es 18 cm y el radio, 0,24 m.  
Área = \_\_\_\_\_; Volumen = \_\_\_\_\_
- La generatriz mide 10 cm y la circunferencia basal mide 50,24 cm  
Área = \_\_\_\_\_; Volumen = \_\_\_\_\_

En muchos ejercicios y problemas tendrás que utilizar números irracionales.

Para calcular el área y el volumen de la esfera, se necesita saber cómo calcular el área y el perímetro de un círculo.

Una vez que calcules la superficie y el volumen de la esfera, podrás comparar estas medidas con las de otros cuerpos, como el cilindro y el cono.

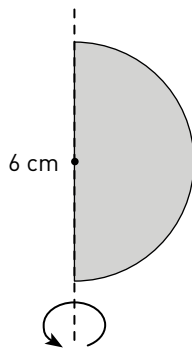
**Tema 1 ¿Qué es una esfera?**

**Practico**

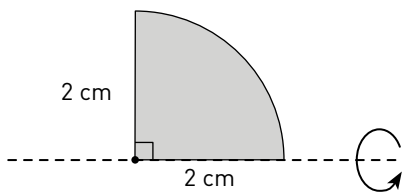
- 1** Analiza cada afirmación. Luego, escribe V o F según corresponda.
- a. \_\_\_\_ La esfera tiene desarrollo en el plano.
  - b. \_\_\_\_ La esfera es un cuerpo geométrico limitado por una superficie curva.
  - c. \_\_\_\_ El radio del círculo máximo de una esfera corresponde a la mitad del diámetro de esta.
  - d. \_\_\_\_ El círculo máximo de una esfera corresponde a la base de una de las semiesferas que la forman.
  - e. \_\_\_\_ Una esfera se puede formar al rotar en el espacio un semicírculo en torno a una recta que contiene al diámetro.

- 2** Analiza en cada caso cuál de las rotaciones se puede asociar a una esfera y marca Sí o No según corresponda. Cuando la respuesta sea Sí, calcula el radio de la esfera formada.

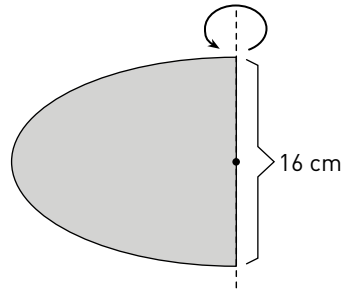
- a. Sí \_\_\_\_; No \_\_\_\_;  $r =$  \_\_\_\_



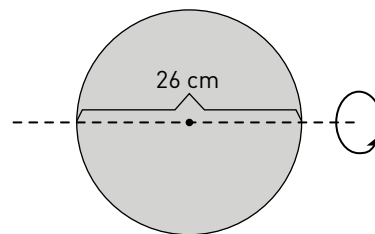
- b. Sí \_\_\_\_; No \_\_\_\_;  $r =$  \_\_\_\_



- c. Sí \_\_\_\_; No \_\_\_\_;  $r =$  \_\_\_\_

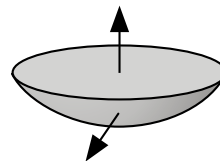


- d. Sí \_\_\_\_; No \_\_\_\_;  $r =$  \_\_\_\_



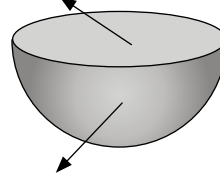
- 3** Escribe el nombre de los elementos de la esfera ilustrados en cada figura.

- a. \_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_

- b. \_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_

## Me desafío

**Nota:** Para resolver los siguientes problemas utiliza  $\pi \approx 3,14$  cuando sea necesario y entrega tus resultados con 2 dígitos decimales.

- 1 Si el diámetro del círculo máximo de una esfera mide 12 cm, ¿cuál es su radio?

R: \_\_\_\_\_

- 2 Si el radio del círculo máximo de una esfera mide 5,5 cm, ¿cuál es el área de ese círculo máximo?

R: \_\_\_\_\_

- 3 ¿Cuánto mide el diámetro de una esfera cuyo círculo máximo tiene un área de  $28,26 \text{ cm}^2$ ?

R: \_\_\_\_\_

- 4 El círculo máximo de una esfera tiene un área de  $7,065 \text{ cm}^2$ , ¿cuánto mide su radio?

R: \_\_\_\_\_

- 5 El área del círculo mayor de una esfera es  $19,625 \text{ cm}^2$ .

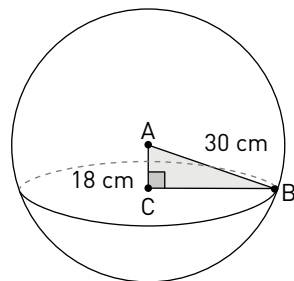
- a. ¿Cuánto mide el radio de la esfera?

R: \_\_\_\_\_

- b. ¿Cuánto mide el diámetro de la esfera?

R: \_\_\_\_\_

- 6 La figura representa una esfera de centro A, en la cual se dibujó un círculo menor de centro C.



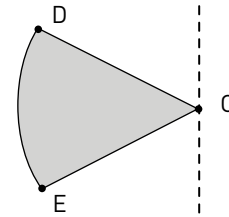
- a. ¿Cuánto mide el diámetro del círculo menor?

R: \_\_\_\_\_

- b. ¿Cuál es el área del círculo menor?

R: \_\_\_\_\_

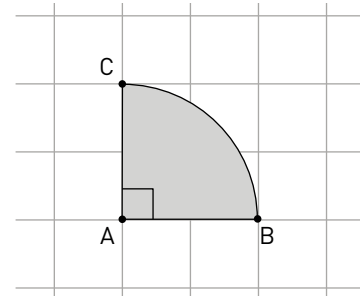
- 7 La figura muestra un sector circular de centro C y una recta tangente.



Si el arco DE gira en torno a la recta, describe el cuerpo que se genera.

R: \_\_\_\_\_

- 8 Con el sector circular BAC se desea generar una esfera. Dibuja los ejes y sentidos de rotación para lograrlo.



- 9 Los radios de los círculos mayores de dos esferas miden 8 cm y 12 cm.

- a. ¿Cuál es la razón entre sus radios?

R: \_\_\_\_\_

- b. ¿Cuál es la razón entre sus áreas?

R: \_\_\_\_\_

- c. ¿Qué relación encuentras entre las respuestas obtenidas en los puntos a y b?

R: \_\_\_\_\_

- 10 Si el radio del círculo mayor de una esfera aumenta en un 25%, ¿en qué porcentaje aumenta el área del círculo?

R: \_\_\_\_\_

- 11 El diámetro del círculo mayor de una esfera mide 10 cm. Si el radio de dicho círculo disminuye en 10%, ¿en qué porcentaje disminuirá su área?

R: \_\_\_\_\_

**Tema 2** ¿Cómo se calcula el volumen de la esfera?

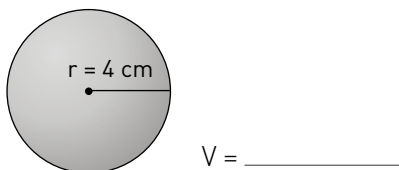
**Practico**

**1** Calcula el volumen de las esferas según el radio o el diámetro dado. Considera  $\pi \approx 3,14$ .

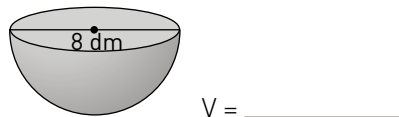
- a.  $r = 2 \text{ cm}$        $V =$  \_\_\_\_\_
- b.  $d = 10 \text{ dm}$        $V =$  \_\_\_\_\_
- c.  $d = 16 \text{ m}$        $V =$  \_\_\_\_\_
- d.  $r = 15 \text{ cm}$        $V =$  \_\_\_\_\_
- e.  $r = 1,8 \text{ mm}$        $V =$  \_\_\_\_\_
- f.  $d = 12 \text{ m}$        $V =$  \_\_\_\_\_

**2** Calcula el volumen de cada figura.

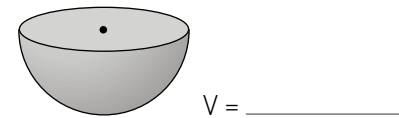
a. Esfera de radio 4 cm.



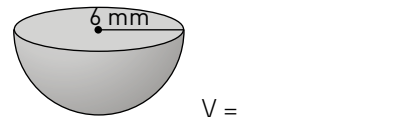
b. Semiesfera de diámetro 8 dm.



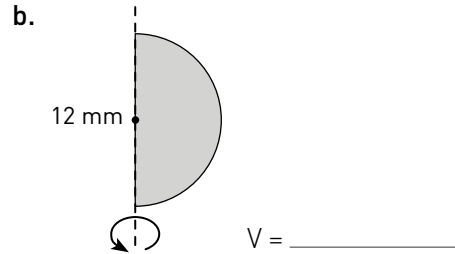
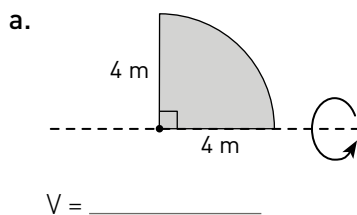
c. Semiesfera de área basal  $144\pi \text{ cm}^2$



d. Semiesfera de diámetro 6 mm.



**3** Calcula el volumen de los cuerpos generados por rotación de las figuras sobre los ejes respectivos.



**4** En los ejercicios siguientes se entrega el volumen de una esfera, con ese dato calcula el radio o el diámetro. Considera  $\pi \approx 3,14$ .

- a.  $V = 33,49\bar{3} \text{ cm}^3$        $r =$  \_\_\_\_\_
- b.  $V = 904,32 \text{ cm}^3$        $d =$  \_\_\_\_\_
- c.  $V = 7,23456 \text{ mm}^3$        $r =$  \_\_\_\_\_
- d.  $V = 0,90432 \text{ dm}^3$        $d =$  \_\_\_\_\_

**5** ¿Cuál es el volumen de una esfera inscrita en un cubo de arista 8 cm?

$V =$  \_\_\_\_\_

**6** Si se aumenta el radio de una esfera de 5 a 8 cm, ¿en qué porcentaje aumenta su volumen?

R: \_\_\_\_\_

**7** El radio de un cilindro su mide 6 cm y su altura, 12 cm. Calcula los volúmenes de los siguientes cuerpos inscritos en el cilindro.

- a.  $V_{\text{cono}} =$  \_\_\_\_\_
- b.  $V_{\text{esfera}} =$  \_\_\_\_\_

**8** En una caja hay conos de plasticina de 2 cm de radio basal y 4 cm de altura, con los cuales se desea construir esferas. ¿Cuántos de estos conos de deben utilizar para construir una esfera de igual radio?

R: \_\_\_\_\_

**9** Calcula el volumen de una esfera inscrita en un cilindro si el área basal de este es  $9\pi \text{ cm}^2$ .

R: \_\_\_\_\_

## Me desafío

- 1** ¿Cómo varía el volumen de una esfera si su diámetro disminuye a la mitad?  
R: \_\_\_\_\_
- 2** Si el volumen de una esfera es  $4500\pi \text{ mm}^3$ , ¿cuál es el área de su círculo máximo?  
R: \_\_\_\_\_
- 3** Determina la relación entre el volumen de una esfera de radio  $r$  y el de un cono de radio  $r$  y altura  $3r$ .  
R: \_\_\_\_\_
- 4** El volumen de una esfera es  $972\pi \text{ cm}^3$ . Si el radio disminuye a su tercera parte, ¿cuál es el nuevo volumen de la esfera?  
R: \_\_\_\_\_
- 5** La cáscara de una naranja de 8 cm de diámetro tiene un espesor de 4 mm. Calcula el volumen de:  
a. la fruta sin cáscara: \_\_\_\_\_  
b. la cáscara: \_\_\_\_\_
- 6** El diámetro de Marte mide 6779 km y el de la Tierra, 12742 km aproximadamente. ¿Cuántas veces el volumen de Marte está contenido en el volumen de la Tierra?  
R: \_\_\_\_\_
- 7** Si el volumen de la Luna es aproximadamente  $2,19 \cdot 10^{10} \text{ km}^3$ , ¿cuánto mide su diámetro?  
R: \_\_\_\_\_
- 8** En una caja cúbica se ha colocado una esfera que calza perfectamente. Si la esfera tiene un volumen de  $200,96 \text{ cm}^3$ , ¿cuánto mide la arista de la caja?  
R: \_\_\_\_\_
- 9** Un cubo de 10 cm de arista está lleno de agua. ¿Cabrá toda esta agua en una esfera de 10 cm de radio?, ¿cuánta agua sobraría o bien faltaría para llenar la esfera?  
R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- 10** De forma aproximada podemos decir que una naranja es una esfera. Si Tomás se come 8 de los 10 gajos de una naranja de 8 cm de diámetro. ¿Cuál era el volumen de la cantidad de naranja consumida por Tomás?  
R: \_\_\_\_\_
- 11** Para un proyecto artístico, Teresa pegó una esfera de madera, de radio 8 cm, a una de las bases de un cilindro del mismo material cuyo radio basal y altura tienen la misma medida de los de la esfera. Si la masa de  $1 \text{ cm}^3$  de madera es 12 g, ¿cuál es la masa del proyecto de Teresa?  
R: \_\_\_\_\_
- 12** El barquillo grande de la gelatería Manuela consiste en un cono de barquillo de 10 cm de alto lleno de helado, sobre el cual se coloca más helado, de un segundo sabor, en forma de una semiesfera de 6 cm de diámetro. ¿Qué cantidad de helado contiene cada uno de estos barquillos?  
R: \_\_\_\_\_
- 13** Se derrite una barra cilíndrica de metal, de 5 cm de radio. Si con el material obtenido se quieren fabricar 100 000 rodamientos de 2 mm de diámetro, ¿cuál es el largo mínimo que debe tener la barra?  
R: \_\_\_\_\_
- 14** En un vaso cilíndrico se inscriben 3 hielos esféricos de radio  $r$ .  
a. ¿Cuál es el volumen de cada hielo?  
R: \_\_\_\_\_  
b. ¿Cuál es el volumen de la región entre el vaso y los hielos?  
R: \_\_\_\_\_  
c. ¿Cuál es la razón entre el volumen de los hielos y el vaso?  
R: \_\_\_\_\_  
d. Si en el vaso se quiere verter bebida equivalente a un hielo, ¿cabe la bebida en el vaso? Justifica tu respuesta.  
R: \_\_\_\_\_



**Tema 3** ¿Cómo se calcula el área de la esfera?

**Practico**

1 Calcula el área de la superficie de una esfera según el radio o el diámetro dado. Considera  $\pi \approx 3,14$ .

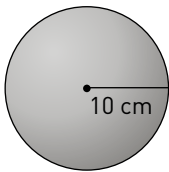
- a.  $r = 3,6$  cm       $A =$  \_\_\_\_\_
- b.  $d = 18$  dm       $A =$  \_\_\_\_\_
- c.  $d = 4$  m       $A =$  \_\_\_\_\_
- d.  $r = 12$  cm       $A =$  \_\_\_\_\_
- e.  $r = 1,5$  mm       $A =$  \_\_\_\_\_
- f.  $d = 1,2$  m       $A =$  \_\_\_\_\_

2 Completa la siguiente tabla que muestra algunos datos de esferas.

Radio	Diámetro	Área
3 cm		
	12,8 dm	
		314 mm <sup>2</sup>
	9 mm	
		803,84 dm <sup>2</sup>
1,2 m		

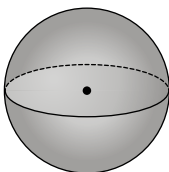
3 Analiza cada figura y la información entregada. Luego, calcula su área.

a. Esfera de radio 10 cm.



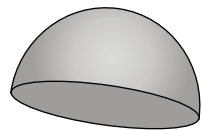
$A =$  \_\_\_\_\_

b. Esfera de 14 cm de diámetro.



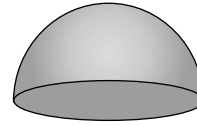
$A =$  \_\_\_\_\_

c. Semiesfera de diámetro 22 mm.



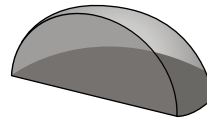
$A =$  \_\_\_\_\_

d. Semiesfera de radio 9 cm.



$A =$  \_\_\_\_\_

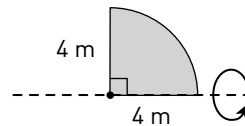
e. Un cuarto de esfera de área basal 56,52 cm<sup>2</sup>.



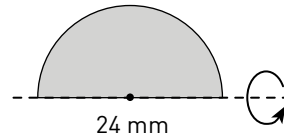
$A =$  \_\_\_\_\_

4 Calcula el área de los cuerpos generados por rotación de las figuras sobre los ejes respectivos.

a. Área = \_\_\_\_\_



b. Área = \_\_\_\_\_



5 Completa la tabla con el área de la superficie de la esfera y el área lateral de un cilindro de altura igual al doble del radio.

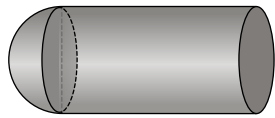
Radio	Esfera (área)	Cilindro (área)
3 cm		
2 cm		
6 cm		
8 cm		
10 cm		

Comparando los resultados de la tabla, ¿qué conclusión puedes extraer?

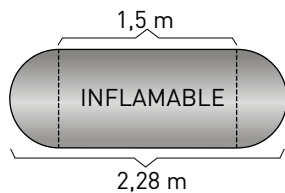
R: \_\_\_\_\_

## Me desafío

- 1 Si el área de la superficie de una esfera es  $27\pi \text{ cm}^2$ , ¿cuál es su volumen?  
R: \_\_\_\_\_
- 2 ¿Cómo varía la superficie de una esfera si su diámetro disminuye a la cuarta parte?  
R: \_\_\_\_\_
- 3 Si el volumen de una esfera es  $18\pi \text{ mm}^3$ , ¿cuál es su área?  
R: \_\_\_\_\_
- 4 En una caja cúbica se ha colocado una esfera que calza perfectamente. Si la esfera tiene una superficie de  $200,96 \text{ cm}^2$ , ¿cuánto mide la arista de la caja?  
R: \_\_\_\_\_
- 5 Una pieza metálica sólida está compuesta por un cilindro circular recto y una semiesfera, como lo muestra la figura. Si su diámetro mide  $0,8 \text{ cm}$  y el largo del cilindro es  $6 \text{ cm}$ , calcula el área de su superficie.  
R: \_\_\_\_\_

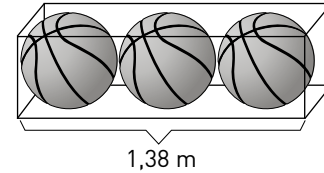


- 6 Un estanque de gas está compuesto por un cilindro circular recto y dos semiesferas de igual radio, como lo muestra la figura. ¿Cuál es la capacidad del estanque en litros?



- 7 Si se quiere pintar el exterior de la cúpula de un telescopio, cuya forma es una semiesfera de  $13,3 \text{ m}$  de diámetro, ¿cuál es el área que se debe pintar?  
R: \_\_\_\_\_

- 8 Tres balones de iguales dimensiones fueron acomodados en un cajón con forma de paralelepípedo, como lo muestra la figura.



- a. Calcula el área de cada balón.  
R: \_\_\_\_\_
- b. Calcula el volumen del cajón que no está ocupado por los balones.  
R: \_\_\_\_\_
- 9 Si la diagonal mayor de un cubo mide  $6\sqrt{3} \text{ cm}$ , ¿cuál es el área de una esfera inscrita en el cubo?  
R: \_\_\_\_\_
- 10 La suma de los volúmenes de dos esferas es  $\frac{1120}{3}\pi \text{ cm}^3$ . Si la razón entre sus áreas es  $4 : 9$ , ¿cuál es el volumen de cada esfera?  
R: \_\_\_\_\_
- 11 Una rama del arte tradicional japonés es la talla en marfil o en jade. Muestra de ello son las esferas que se tallan independientemente una dentro de otra, realizando elaborados diseños en la superficie de cada una de ellas.  
Considerando que el radio de la esfera mayor mide  $8 \text{ cm}$  y que el radio de cada una de las interiores mide un  $15\%$  menos que la anterior, responde las siguientes preguntas.
- a. ¿Cuál es la superficie de la primera esfera?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la superficie de la tercera esfera?  
R: \_\_\_\_\_
- c. Generaliza los resultados anteriores para la  $n$ ésima esfera.  
R: \_\_\_\_\_

Reforzamiento

Según tus resultados en la evaluación de la lección del Texto, repasa los temas que consideres necesarios y luego resuelve los problemas de profundización.

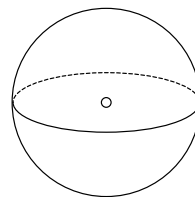
Recuerda que la esfera es un cuerpo geométrico limitado por una superficie curva, llamada casquete esférico, cuyos puntos equidistan de un punto central llamado centro de la esfera.

El volumen de una esfera es  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , donde  $r$  representa el radio del círculo mayor.

El área de la superficie de la esfera es  $A = 4\pi r^2$  donde  $r$  representa el radio del círculo mayor.

1 La figura muestra una esfera en la que se dibujó un círculo mayor. Completa el esquema con los siguientes elementos:

- El centro.
- El radio.
- Un círculo menor.
- Un hemisferio.
- Un casquete esférico.



2 Identifica el error en cada afirmación. Luego, corrígelo, considerando  $\pi \approx 3,14$ .

a. El área del círculo máximo de una esfera de diámetro 4 cm es  $50,24 \text{ cm}^2$ .

Error: \_\_\_\_\_

Corrección: \_\_\_\_\_

b. Al rotar en el espacio un círculo de radio 5,8 cm en torno a su diámetro, se obtuvo una esfera de diámetro 5,8 cm.

Error: \_\_\_\_\_

Corrección: \_\_\_\_\_

3 Calcula el volumen de la esfera que cumpla cada condición dada.

a. Radio = 6 cm      Volumen = \_\_\_\_\_

b. Diámetro = 18 cm      Volumen = \_\_\_\_\_

4 Si el volumen de una esfera es  $8500\pi \text{ cm}^3$ , ¿cuál es el área de su círculo máximo?

R: \_\_\_\_\_

5 Calcular el volumen de una esfera inscrita en un cilindro de 5 m de altura.

R: \_\_\_\_\_

6 Calcula el área de la esfera que cumpla cada condición dada.

a. Radio = 8 cm      Área = \_\_\_\_\_

b. Diámetro = 12 cm      Área = \_\_\_\_\_

7 Si en un cubo de 15 cm arista se inscribe una esfera, ¿cuál es la superficie de esta?

R: \_\_\_\_\_

8 Si la superficie de una esfera es  $576\pi \text{ cm}^2$ , ¿cuánto mide su diámetro?

R: \_\_\_\_\_

## Profundización

- 1 Una pelota de golf tiene 43 mm de diámetro y, en su interior, está formada por un corchón de goma enrollado y en el exterior por una capa de plástico de 1,5 mm de grosor.

a. ¿Cuál es el volumen de la capa exterior?

R: \_\_\_\_\_

b. ¿Cuál es la superficie de la parte interior?

R: \_\_\_\_\_

- 2 Una pelota de fútbol está formada por 12 pentágonos y 20 hexágonos regulares y puede ser modelada como una esfera de 22 cm de diámetro. Si para manufacturar una pelota de fútbol se considera su superficie más un 10% de ella para las costuras, ¿cuánto cuero se necesita?

R: \_\_\_\_\_

- 3 Alrededor del 80% de la superficie de la Tierra está cubierta por mares y océanos. Además, nuestro planeta puede ser modelado como una esfera cuyo volumen es aproximadamente  $1,08 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$ .

a. ¿Cuál es la superficie total de la Tierra?

R: \_\_\_\_\_

b. ¿Cuál es la superficie de la Tierra cubierta por agua?

R: \_\_\_\_\_

- 4 En el plano cartesiano grafica la recta  $x + y = 3$ , indicando los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados. Considerando esos puntos como los extremos del diámetro, dibuja un semicírculo, que gire en torno a la recta generando una esfera.

a. ¿Cuánto mide el diámetro del semicírculo?

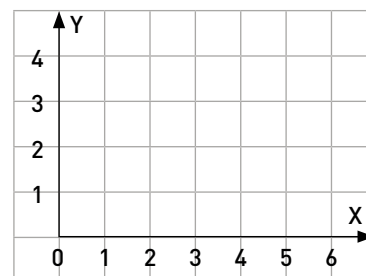
R: \_\_\_\_\_

b. ¿Cuál es la superficie de esta esfera?

R: \_\_\_\_\_

c. ¿Cuál es el volumen de la esfera?

R: \_\_\_\_\_

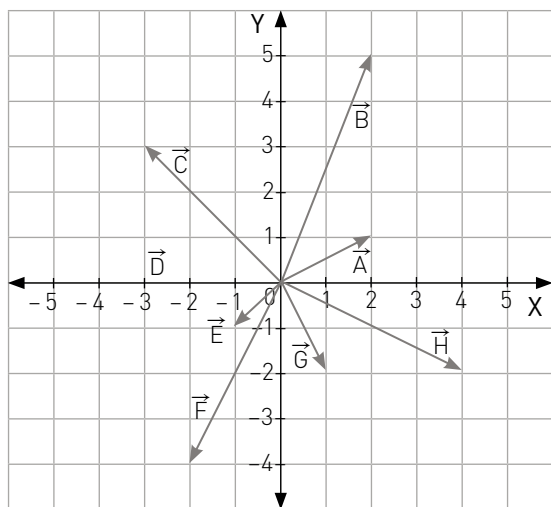


# Razones trigonométricas

Repasa algunos contenidos que utilizarás durante esta lección.

- 1 Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 cm y 9 cm, ¿cuánto mide la hipotenusa?  
R: \_\_\_\_\_
- 2 Si un cateto de un triángulo rectángulo mide 1 cm y la hipotenusa mide  $\sqrt{8}$  cm, ¿cuánto mide el otro cateto?  
R: \_\_\_\_\_
- 3 Marca los tríos de medidas que correspondan a los lados de triángulos rectángulos.
 

a. 2 cm, 3 cm, 5 cm _____	c. 12 cm, 16 cm, 20 cm _____
b. 3 cm, 4 cm, 5 cm _____	d. 15 cm, 36 cm, 39 cm _____
- 4 Una escalera de 5 metros se apoya contra un edificio. Si la base de la escalera se encuentra a 3 metros del edificio, ¿cuál es la distancia desde el piso hasta la parte superior de la escalera?  
R: \_\_\_\_\_
- 5 Dos polígonos son semejantes con una razón de semejanza 1,8. Si un lado de este polígono mide 2,4 cm, ¿cuánto mide el lado correspondiente en el polígono imagen?  
R: \_\_\_\_\_
- 6 Si dos polígonos son semejantes, con una razón de semejanza  $r$ , ¿cuál es la razón entre los perímetros de los polígonos?  
R: \_\_\_\_\_
- 7 Escribe las coordenadas de cada vector graficado.



- $\vec{A}$  = \_\_\_\_\_  
 $\vec{B}$  = \_\_\_\_\_  
 $\vec{C}$  = \_\_\_\_\_  
 $\vec{D}$  = \_\_\_\_\_  
 $\vec{E}$  = \_\_\_\_\_  
 $\vec{F}$  = \_\_\_\_\_  
 $\vec{G}$  = \_\_\_\_\_  
 $\vec{H}$  = \_\_\_\_\_

En esta lección de trigonometría trabajarás con triángulos rectángulos, por lo que es conveniente que repases el teorema de Pitágoras y su recíproco.

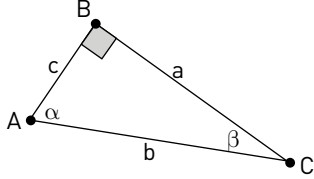
Las razones trigonométricas se basan en semejanza de triángulos rectángulos. Por ello, es adecuado que recuerdes la semejanza de figuras.

En el último tema de la lección se unirán vectores y trigonometría. Repasa lo que ya has aprendido de vectores.

→ Tema 1 ¿Qué son las razones trigonométricas?

Practico

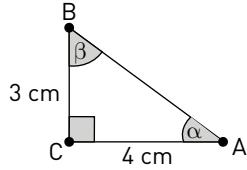
1 Completa las siguientes igualdades utilizando la información de la figura.



- a.  $\text{sen } (\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$       d.  $\text{sen } (\beta) = \underline{\hspace{2cm}}$   
 b.  $\text{cos } (\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$       e.  $\text{cos } (\beta) = \underline{\hspace{2cm}}$   
 c.  $\text{tg } (\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$       f.  $\text{tg } (\beta) = \underline{\hspace{2cm}}$

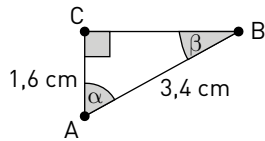
2 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de cada triángulo rectángulo. Luego, completa las tablas.

a.



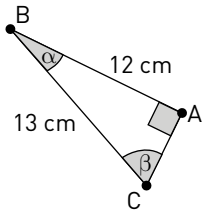
	$\alpha$	$\beta$
seno		
coseno		
tangente		

b.



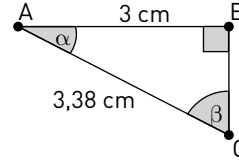
	$\alpha$	$\beta$
seno		
coseno		
tangente		

c.



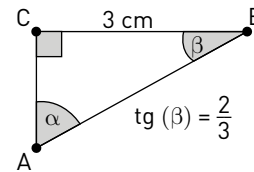
	$\alpha$	$\beta$
seno		
coseno		
tangente		

d.



	$\alpha$	$\beta$
seno		
coseno		
tangente		

3 Determina si las afirmaciones son verdaderas o falsas con respecto al triángulo ABC.



- a.  $\underline{\hspace{2cm}}$   $\text{cos } (\beta) = \sqrt{\frac{13}{3}}$   
 b.  $\underline{\hspace{2cm}}$   $\text{sen } (\alpha) = 3\sqrt{\frac{13}{3}}$   
 c.  $\underline{\hspace{2cm}}$   $\text{tg } (\alpha) = 1,5$   
 d.  $\underline{\hspace{2cm}}$   $\text{sen } (\beta) = \frac{2}{3}$   
 e.  $\underline{\hspace{2cm}}$  El segmento CA mide 6 cm.  
 f.  $\underline{\hspace{2cm}}$  La hipotenusa AB mide  $\sqrt{13}$ .

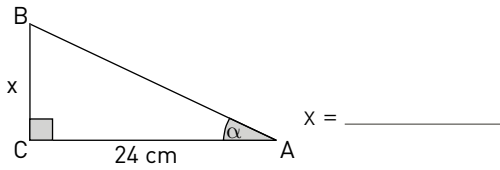
4 Con la ayuda de una calculadora, completa la siguiente tabla. Entrega tus resultados con dos dígitos decimales.

	$17^\circ$	$73^\circ$	$24^\circ$	$66^\circ$
seno				
coseno				

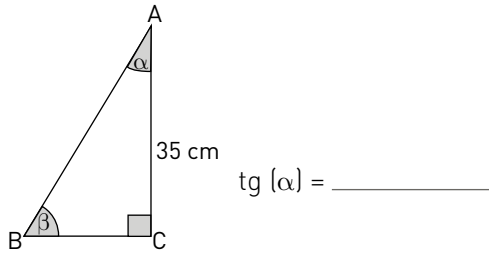
- a. ¿Qué relación hay entre los ángulos de las columnas primera y segunda?, ¿y entre los ángulos de la tercera y la cuarta?  
 R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Qué relación puedes observar entre el valor del seno de un ángulo y el de su complemento?, ¿y del coseno?  
 R: \_\_\_\_\_
- c. Generaliza tus resultados completando las siguientes igualdades.  
 $\text{cos } (90 - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$      $\text{sen } (90 - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$

- 5 Calcula el valor pedido con la información dada en cada caso.

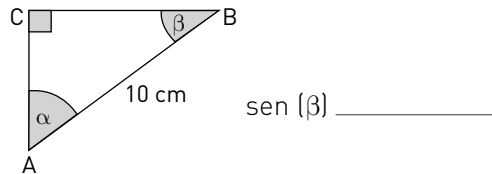
a.  $\text{sen} = 0,28$



b.  $\cos(\beta) = 0,324$

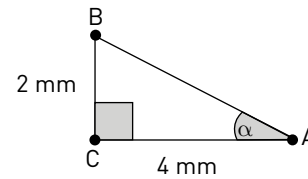


c.  $\text{tg}(\alpha) = 1,3$

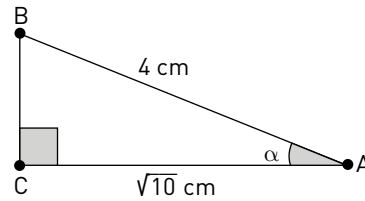


- 6 En cada uno de los siguientes ejercicios encuentra el valor de  $\text{sen}(\alpha)$  aproximado a tres dígitos decimales.

a.  $\text{sen}(\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$



b.  $\text{sen}(\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$

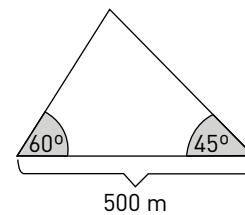


### Me desafío

**Nota:** Resuelve los siguientes problemas sin utilizar la calculadora.

- 1 Un volantín está sujeto al suelo por un hilo que mide 20 m. Si el ángulo de elevación del volantín es de  $30^\circ$ , ¿a qué altura se encuentra?  
R: \_\_\_\_\_
- 2 Un árbol proyecta una sombra de 15 m cuando el ángulo de elevación del sol es de  $60^\circ$ . Aproximando al metro, ¿cuál es la altura del árbol?  
R: \_\_\_\_\_
- 3 Una persona se encuentra a 200 m de un famoso edificio y el ángulo de elevación entre ella y el extremo superior de un edificio es de  $45^\circ$ . Aproximando al metro, ¿cuál es la altura del edificio?  
R: \_\_\_\_\_

- 4 Dos personas que se encuentran a 500 m de distancia observan un avión con ángulos de elevación de  $60^\circ$  y  $45^\circ$ , como lo muestra la figura.



- a. ¿A qué altura vuela aproximadamente el avión?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la distancia entre el avión y cada observador?  
R: \_\_\_\_\_

**Nota:** Resuelve los siguientes problemas utilizando la calculadora.

- 5 A 600 metros del borde de un acantilado se encuentra un bote. Desde él, y con un ángulo de elevación de  $47^\circ$  se observa el borde superior del acantilado. ¿Cuál es su altura?

R: \_\_\_\_\_

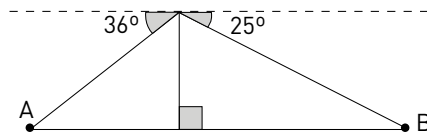
- 6 Un volantín está volando al extremo de 260 m de hilo que forma un ángulo de  $61^\circ$  con el suelo. ¿A qué altura se encuentra el volantín?

R: \_\_\_\_\_

- 7 Si desde un velero se observa la punta de un faro de 120 m de altura con un ángulo de elevación de  $40^\circ$ , ¿a qué distancia del faro se encuentra el velero?

R: \_\_\_\_\_

- 8 ¿Cuál es la distancia entre dos embarcaciones, A y B, si desde un acantilado a 32 m sobre el nivel del mar se observan con ángulos de depresión de  $36^\circ$  y  $25^\circ$ , respectivamente?



- 9 Un globo está sujeto al suelo con un hilo de 20 m. Si el ángulo de elevación del globo es de  $27^\circ$ , ¿a qué altura se encuentra?

R: \_\_\_\_\_

- 10 Un piloto observa que el ángulo de depresión del próximo aeropuerto es de  $15^\circ$ . Si el avión vuela a 350 m de altura, ¿a qué distancia se encuentra del aeropuerto?

R: \_\_\_\_\_

- 11 Determina la altura de un edificio si desde un punto situado a 20 m de su base se observa su punta con un ángulo de elevación de  $65^\circ$ .

R: \_\_\_\_\_

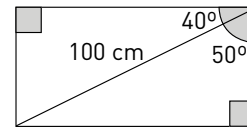
- 12 Un árbol de 12 m de altura proyecta una sombra de  $x$  m cuando el ángulo de elevación del sol es  $49^\circ$ . ¿Cuál es el valor de  $x$ ?

R: \_\_\_\_\_

- 13 Una rampa para sillas de ruedas forma un ángulo de  $10^\circ$  con el suelo y se alza 3 m verticalmente. ¿Qué distancia debe recorrer la silla para llegar desde la base al extremo superior de la rampa?

R: \_\_\_\_\_

- 14 La figura muestra un rectángulo cuya diagonal mide 100 cm. Calcula el largo y el ancho del rectángulo.



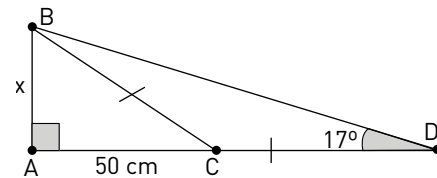
- 15 La diagonal menor de un rombo mide 40 mm y cada uno de sus ángulos obtusos mide  $130^\circ$ . Encuentra la medida de los lados del rombo.

R: \_\_\_\_\_

- 16 Cada ángulo basal de un triángulo isósceles mide  $50^\circ$  y la altura a la base mide 26 cm. Al centímetro más cercano, ¿cuánto mide la base del triángulo?

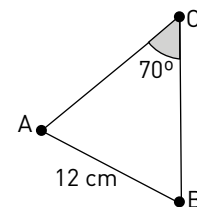
R: \_\_\_\_\_

- 17 Con la información de la figura encuentra el valor de  $x$ .



R: \_\_\_\_\_

- 18 La figura muestra un triángulo isósceles cuya base mide 12 cm y el ángulo del vértice,  $70^\circ$ . ¿Cuánto miden los lados del triángulo?



R: \_\_\_\_\_



Nombre de la habilidad trabajada en el Texto: \_\_\_\_\_

**1** ¿Qué significa esta habilidad para ti?

---

---

---

---

**2** Cuando escribes una expresión algebraica correspondiente a una situación, ¿consideras que estás utilizando la habilidad de representar? ¿Por qué?

---

---

---

---

**3** Contar con diferentes tipos de representación de una situación (un modelo físico, una expresión algebraica, una representación gráfica), ¿te facilita la resolución de un problema? Justifica tu respuesta.

---

---

---

---

**4** Resuelve el siguiente problema e indica los pasos en los cuales estás aplicando la habilidad de representar.

Un observador en un globo aerostático, que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de  $18^\circ$ . ¿A qué distancia del pueblo se encuentra el globo?

Realiza un esquema de la situación y luego resuelve.

---



## Uso de la calculadora

Antes de la aparición de las calculadoras y computadores, para realizar cálculos que involucraban razones trigonométricas las personas debían recurrir a libros que contenían tablas de valores, como la que se muestra a continuación.

$\alpha$	$\text{sen } (\alpha)$	$\text{cos } (\alpha)$	$\text{tg } (\alpha)$
$0^\circ$	0	1	0
$1^\circ$	0,017452	0,999848	0,017455
$2^\circ$	0,034899	0,999391	0,034921
$3^\circ$	0,052336	0,99863	0,052408
$4^\circ$	0,069756	0,997564	0,069927
$5^\circ$	0,087156	0,996195	0,087489

Sin lugar a dudas la calculadora ha facilitado el trabajo en trigonometría. Sin embargo, como ocurre con toda herramienta hay que conocerla, aprender a utilizarla y estar consciente de los posibles errores que pueden cometerse.

La primera recomendación es que utilices siempre la misma calculadora. De esta manera, sabrás cómo funciona ese modelo específico.

### 1 Utiliza la información de la figura para resolver los siguientes ejercicios.

- a. Con la ayuda de la calculadora, entrega los siguientes valores.

$$\text{sen } (22^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{cos } (68^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{tg } (22^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- b. Silvia calculó  $\text{cos } (68^\circ)$  y obtuvo 0,44014... ¿Qué error cometió?

R: \_\_\_\_\_

- c. ¿Cuál es el valor del cateto  $a$ ?

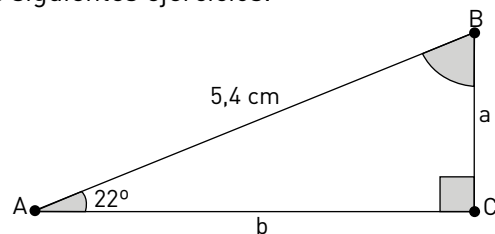
R: \_\_\_\_\_

- d. Nicolás resolvió el problema anterior de la siguiente manera.

$$\text{sen } (22^\circ) = \frac{a}{5,4} \rightarrow \text{sen } (22^\circ \cdot 5,4) = 0,8763066 \dots$$

¿Qué error cometió?

R: \_\_\_\_\_

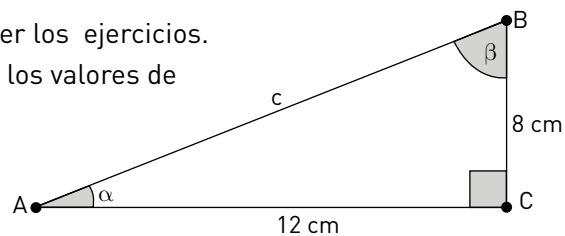


### 2 Utiliza la información de la figura para resolver los ejercicios.

- a. Con la ayuda de la calculadora encuentra, los valores de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ .

R: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



a. Andrés y Camila calcularon el valor del ángulo de la siguiente manera.

Andrés	Camila
$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{12}{8} / \operatorname{Aplicando} \operatorname{tg}^{-1}$ $\beta = 10,65454479\dots$	$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{12}{8} / \operatorname{Aplicando} \operatorname{tg}^{-1}$ $\beta = 56,30993247\dots$

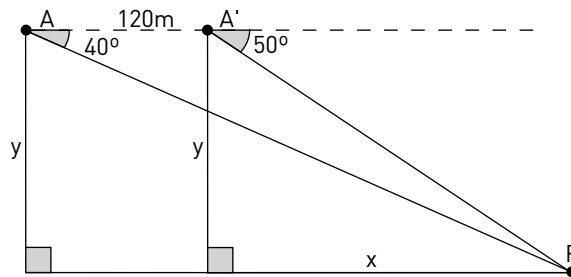
¿Quién tiene el resultado correcto? \_\_\_\_\_

¿Qué error cometió el estudiante que llegó a un resultado erróneo?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**3** Tomás y Matilda resolvieron el problema que se muestra a continuación. Determina cuál es el resultado correcto y explica por qué uno de ellos llegó a un resultado incorrecto si ambas estrategias están correctas.

Problema: Un águila en vuelo ve un ratón en el campo con un ángulo de depresión de  $40^\circ$ . Si al avanzar 120 m a la misma altura el ángulo de depresión al ratón varía a  $50^\circ$ , ¿a qué altura vuela el águila?



Tomás		Matilda	
$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}(50^\circ)$	$\frac{y}{x+120} = \operatorname{tg}(40^\circ)$	$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}(50^\circ)$	$\frac{y}{x+120} = \operatorname{tg}(40^\circ)$
$y = 1,2x$	$y = 0,8x + 96$	$y = x + \operatorname{tg}(50^\circ)$	$y = x \operatorname{tg}(40^\circ) + 120 \operatorname{tg}(40^\circ)$
$x = 240$	$y = 288$	$x = \frac{120 + \operatorname{tg}(40^\circ)}{\operatorname{tg}(50^\circ) - \operatorname{tg}(40^\circ)} = 285,526\dots$ $y = 340,276\dots$	
R: El águila vuela a 288 m de altura.		R: El águila vuela a 340 m de altura.	

Respuesta correcta: \_\_\_\_\_

Explicación del error: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

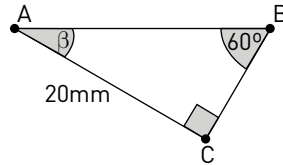
➔ Tema 2 ¿En qué se aplican las razones trigonométricas?

Practico

1 Completa las siguientes igualdades utilizando la información de la figura.

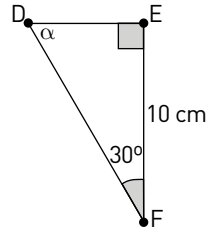
a.

AB = \_\_\_\_\_  
BC = \_\_\_\_\_  
 $\beta =$  \_\_\_\_\_



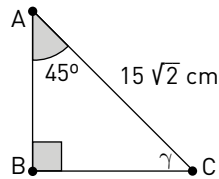
b.

DE = \_\_\_\_\_  
DF = \_\_\_\_\_  
 $\alpha =$  \_\_\_\_\_



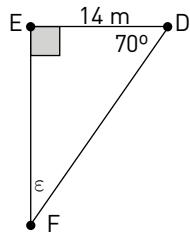
c.

AB = \_\_\_\_\_  
BC = \_\_\_\_\_  
 $\gamma =$  \_\_\_\_\_



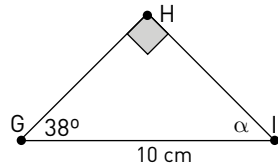
d.

DF = \_\_\_\_\_  
EF = \_\_\_\_\_  
 $\epsilon =$  \_\_\_\_\_



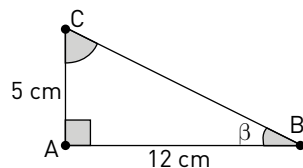
e.

GH = \_\_\_\_\_  
HI = \_\_\_\_\_  
 $\alpha =$  \_\_\_\_\_



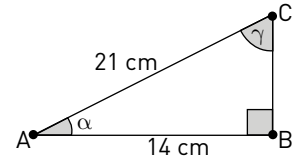
f.

CB = \_\_\_\_\_  
 $\beta =$  \_\_\_\_\_  
 $\alpha =$  \_\_\_\_\_



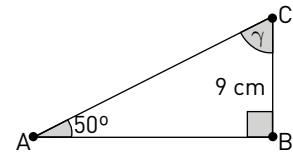
g.

CB = \_\_\_\_\_  
 $\beta =$  \_\_\_\_\_  
 $\alpha =$  \_\_\_\_\_

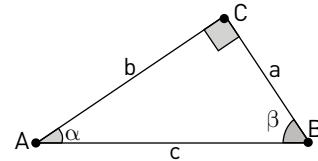


h.

AB = \_\_\_\_\_  
AC = \_\_\_\_\_  
 $\gamma =$  \_\_\_\_\_



2 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de cada triángulo rectángulo. Puedes ayudarte con la figura.



a.  $a = 415$  m y  $b = 290$  m.

R: \_\_\_\_\_

b.  $b = 25$  m y  $c = 33$  m.

R: \_\_\_\_\_

c.  $a = 43$  m y  $\beta = 22^\circ$ .

R: \_\_\_\_\_

d.  $b = 5,2$  m y  $\beta = 35^\circ$ .

R: \_\_\_\_\_

e.  $a = 5$  m y  $\beta = 42,7^\circ$ .

R: \_\_\_\_\_

f.  $b = 6$  m y  $\beta = 54,6^\circ$ .

R: \_\_\_\_\_

g.  $a = 7$  m y  $b = 4$  m.

R: \_\_\_\_\_

h.  $b = 3$  m y  $c = 5$  m.

R: \_\_\_\_\_

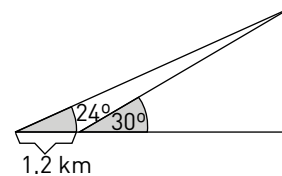
- 3** Considera el triángulo ABC rectángulo en C. Con los datos dados en cada caso, realiza los cálculos indicados. (Puedes guiarte con la figura del ejercicio anterior).
- a.  $AC = 3, BC = 4$   
 $(\text{sen } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$   
 $(\text{sen } \beta)^2 + (\text{cos } \beta)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$
- b.  $AC = 12, BC = 13$   
 $(\text{sen } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$   
 $(\text{sen } \beta)^2 + (\text{cos } \beta)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

- c. ¿Cuál es el valor de  $(\text{sen } 37^\circ)^2 + (\text{cos } 37^\circ)^2$ ?  
 R:  $\underline{\hspace{4cm}}$
- d. ¿Cómo podrías generalizar los resultados anteriores?  
 R:  $\underline{\hspace{4cm}}$   
 $\underline{\hspace{4cm}}$   
 $\underline{\hspace{4cm}}$   
 $\underline{\hspace{4cm}}$

**Me desafío**

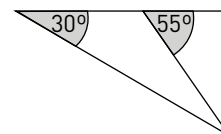
- 1** Si con cada escalón de una escalera se sube 14 cm y se recorre 28 cm horizontalmente, ¿qué ángulo forma la escalera con el suelo?  
 R:  $\underline{\hspace{4cm}}$
- 2** Halla el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 25 cm tiene como arco correspondiente uno de  $70^\circ$ .  
 R:  $\underline{\hspace{4cm}}$
- 3** Calcula el área de una parcela triangular, si dos de sus lados miden 90 m y 130 m, y forman entre ellos un ángulo de  $65^\circ$ .  
 R:  $\underline{\hspace{4cm}}$
- 4** La longitud del lado de un octógono regular es 15 m. Hallar los radios de la circunferencia inscrita y la circunscrita.  
 R:  $\underline{\hspace{4cm}}$
- 5** Calcular la longitud del lado y de la apotema de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 39 cm de radio.  
 R:  $\underline{\hspace{4cm}}$
- 6** Los pueblos A, B y C están unidos por carreteras. La distancia entre A y C es 8 km y entre B y C es 12 km. Si el ángulo que forman estas carreteras es  $90^\circ$ , ¿cuál es la distancia entre A y B?  
 R:  $\underline{\hspace{4cm}}$
- 7** La longitud del lado de un octógono regular es 10 m. ¿Cuál es el radio de la circunferencia circunscrita?  
 R:  $\underline{\hspace{4cm}}$

- 8** Calcula la longitud del lado de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 49 centímetros de radio.  
 R:  $\underline{\hspace{4cm}}$
- 9** Si los lados de un rombo miden 75 mm y uno de sus ángulos mide  $76^\circ$ , ¿cuánto mide la diagonal mayor del rombo?  
 R:  $\underline{\hspace{4cm}}$
- 10** Desde un punto situado en el suelo, el ángulo de elevación hasta la cima de una montaña es de  $20^\circ$ . Si desde un segundo punto, 1,2 km aún más lejos de la montaña, el ángulo de elevación es de  $24^\circ$ , ¿cuál es la altura de la montaña?



R:  $\underline{\hspace{4cm}}$

- 11** Un piloto de avión observa un punto en un terreno con un ángulo de depresión de  $30^\circ$  y 18 segundos más tarde lo observa con un ángulo de depresión de  $55^\circ$ . Si el avión lleva una velocidad de 500 km/h y vuela en forma horizontal, ¿a qué distancia del suelo está?



R:  $\underline{\hspace{4cm}}$

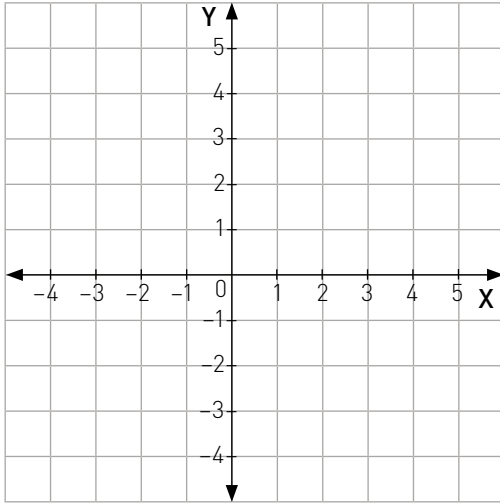
➔ Tema 3 ¿Cómo se determinan los componentes de un vector?

Practico

1 Realiza las actividades indicadas con los siguientes vectores:

$\vec{u} = (2,4)$  ;  $\vec{v} = (5, -3)$  ;  $\vec{w} = (-1,3)$  ;  $\vec{z} = (-3, -4)$

a. Grafica los vectores.



b. Indica en qué cuadrante se encuentra cada vector.

$\vec{u}$ : \_\_\_\_;  $\vec{v}$ : \_\_\_\_;  $\vec{w}$ : \_\_\_\_;  $\vec{z}$ : \_\_\_\_

c. Calcula los módulos de cada vector.

$|\vec{u}| =$  \_\_\_\_;  $|\vec{v}| =$  \_\_\_\_;  $|\vec{w}| =$  \_\_\_\_;  $|\vec{z}| =$  \_\_\_\_

d. Calcula la dirección de cada vector.

$\vec{u}$ : \_\_\_\_\_

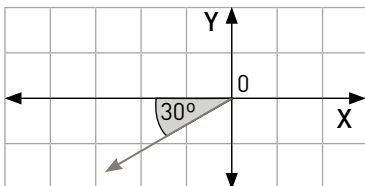
$\vec{v}$ : \_\_\_\_\_

$\vec{w}$ : \_\_\_\_\_

$\vec{z}$ : \_\_\_\_\_

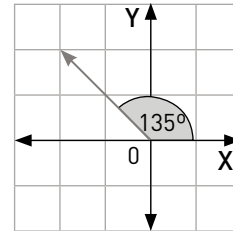
2 Con la información dada en cada caso, aplica la descomposición a cada vector.

a.  $|\vec{p}| = 25$  unidades



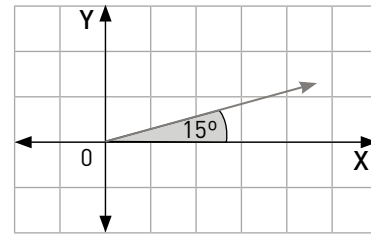
$\vec{p} = ( \quad , \quad )$

b.  $|\vec{u}| = 17$  unidades



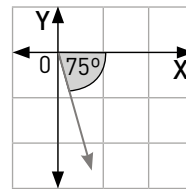
$\vec{u} = ( \quad , \quad )$

c.  $|\vec{v}| = 42$  unidades



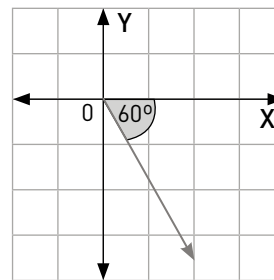
$\vec{v} = ( \quad , \quad )$

d.  $|\vec{z}| = 30$  unidades



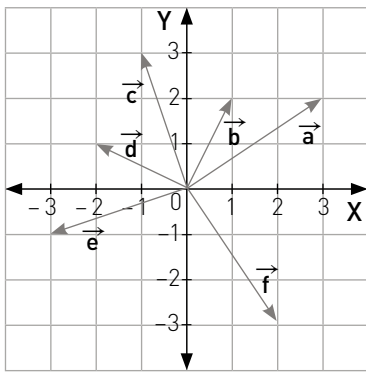
$\vec{z} = ( \quad , \quad )$

e.  $|\vec{w}| = 120$  unidades



$\vec{w} = ( \quad , \quad )$

- 3 Con la información del gráfico, calcula las proyecciones perpendiculares de cada vector.



- a.  $a_x =$  \_\_\_\_\_,  $a_y =$  \_\_\_\_\_  
 b.  $b_x =$  \_\_\_\_\_,  $b_y =$  \_\_\_\_\_  
 c.  $c_x =$  \_\_\_\_\_,  $c_y =$  \_\_\_\_\_  
 d.  $d_x =$  \_\_\_\_\_,  $d_y =$  \_\_\_\_\_  
 e.  $e_x =$  \_\_\_\_\_,  $e_y =$  \_\_\_\_\_  
 f.  $f_x =$  \_\_\_\_\_,  $f_y =$  \_\_\_\_\_

- 4 Utilizando la información del problema anterior, escribe cada vector dado de la forma  $\vec{v} = |\vec{v}| \cos(\alpha), |\vec{v}| \sin(\alpha)$

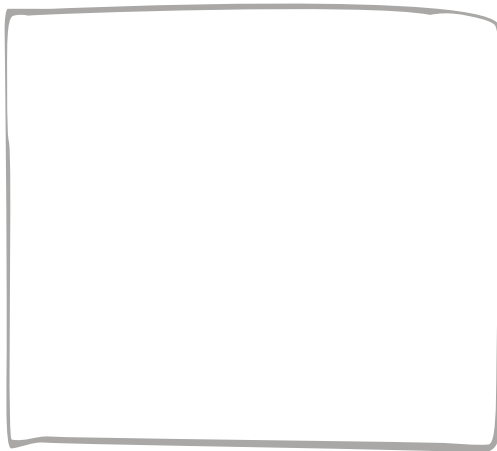
- a.  $\vec{a} = ($  \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ )  
 b.  $\vec{b} = ($  \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ )  
 c.  $\vec{c} = ($  \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ )  
 d.  $\vec{d} = ($  \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ )  
 e.  $\vec{e} = ($  \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ )  
 f.  $\vec{f} = ($  \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ )

- 5 Escribe los siguientes vectores como par ordenado.

- a.  $5 \cos(20^\circ), 5 \sin(20^\circ) =$  \_\_\_\_\_  
 b.  $3 \cos(45^\circ), 3 \sin(45^\circ) =$  \_\_\_\_\_  
 c.  $2 \cos(60^\circ), 2 \sin(60^\circ) =$  \_\_\_\_\_  
 d.  $-3 \cos(12^\circ), 3 \sin(12^\circ) =$  \_\_\_\_\_  
 e.  $-12 \cos(75^\circ), -12 \sin(75^\circ) =$  \_\_\_\_\_

**Me desafío**

- 1 Al patear un balón que está en el suelo, este se eleva con una rapidez de 15 m/s en un ángulo de  $60^\circ$ .  
 a. Realiza un diagrama de la situación dada.



- b. ¿Cuál es el vector velocidad?  
 R: \_\_\_\_\_

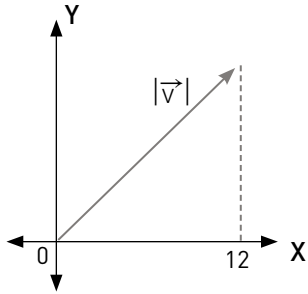
- 2 Una fuerza de magnitud 46 N es aplicada a un cuerpo en un ángulo de  $40^\circ$ .

- a. Realiza un diagrama de la situación dada.



- b. ¿Cuáles son las componentes de la fuerza?  
 R: \_\_\_\_\_

- 3 Un cohete es lanzado desde el suelo con una rapidez de 26 m/s. Determina la velocidad y el ángulo de salida según el sistema de referencia dado.



R: \_\_\_\_\_

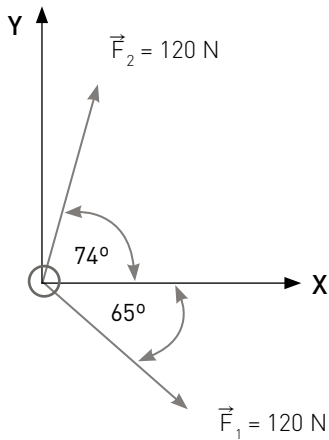
- 4 Un objeto se traslada en línea recta 5 m hacia el norte y luego 18 m hacia el este. ¿Cuál es la magnitud de su desplazamiento?

R: \_\_\_\_\_

- 5 Si las componentes de la velocidad de una partícula son  $V_x = -12$  m/s y  $V_y = 6$  m/s, ¿cuáles son su rapidez y su dirección?

R: \_\_\_\_\_

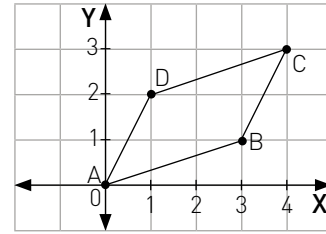
- 6 Sobre el anclaje indicado en la figura, actúan dos fuerzas tal como se indica. Determina la magnitud y dirección de la fuerza resultante.



Magnitud: \_\_\_\_\_

Dirección: \_\_\_\_\_

- 7 La figura muestra el paralelogramo ABCD.



- a. ¿Cuál es la medida de los ángulos del paralelogramo?

R: \_\_\_\_\_

- b. ¿Cuál es la medida de la diagonal AC?

R: \_\_\_\_\_

- c. ¿Cuál es el perímetro de la figura?

R: \_\_\_\_\_

- 8 Una avioneta despegue con una rapidez de 190 km/h en un ángulo de  $30^\circ$ .

Esboza la situación y calcula las componentes de la velocidad.



R: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



Reforzamiento

Según tus resultados en la evaluación de la lección del Texto, repasa los temas que consideres necesarios y luego resuelve los problemas de profundización.

Recuerda que:

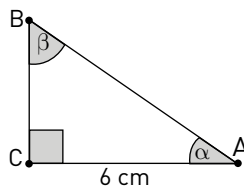
Seno es cateto opuesto dividido por hipotenusa, Coseno es cateto adyacente dividido por hipotenusa y Tangente es cateto opuesto dividido por cateto adyacente.

Para ayudarte, puedes usar SohCahToa.

Para resolver problemas trigonométricos es conveniente realizar un diagrama de la situación y luego decidir qué razón trigonométrica se debe utilizar.

Los vectores son una herramienta matemática muy utilizada en física para describir desplazamientos y fuerzas.  
Recuerda que un vector tiene magnitud y dirección.

- 1 En el triángulo ABC,  $\text{tg}(\beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  ¿Cuál es el valor de  $\text{sen } \alpha$ ?



R: \_\_\_\_\_

- 2 Una persona ubicada a cierta distancia de un edificio genera un ángulo de elevación de  $30^\circ$  desde sus pies a la parte más alta del edificio. Si se acerca 50 m, el ángulo de elevación es de  $45^\circ$ . ¿A qué distancia se encontraba antes de acercarse al edificio?

a. Realiza un diagrama de la situación dada.

b. ¿Qué razón o razones trigonométricas debes utilizar?

R: \_\_\_\_\_

c. ¿Cuál es la respuesta al problema?

R: \_\_\_\_\_

- 3 Una gaviota que vuela a 30 m de altura observa a un pez en la superficie del mar con un ángulo de depresión de  $60^\circ$ .

a. A qué distancia se encuentran los animales?

R: \_\_\_\_\_

b. Explica cómo resolviste este problema.

R: \_\_\_\_\_

- 4 Un objeto se traslada en línea recta 5 m hacia el sur y luego 12 m hacia el oeste. ¿Cuál es la magnitud de su desplazamiento?

R: \_\_\_\_\_

- 5 Si las componentes de la velocidad de una partícula son  $V_x = 32 \text{ m/s}$  y  $V_y = 8 \text{ m/s}$ , ¿cuáles son su rapidez y su dirección?

R: \_\_\_\_\_

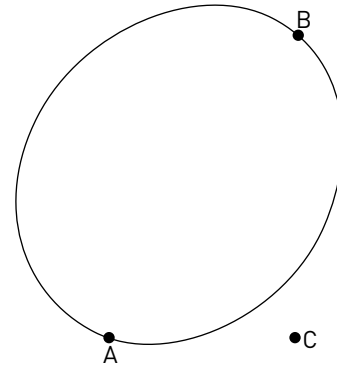
\_\_\_\_\_

## Profundización

- 1 El diagrama muestra un lago con dos embarcaderos, A y B, y un árbol en el punto C, a 65 m del embarcadero A. Si Pedro se para en C, mirando hacia A, debe girar en  $90^\circ$  para mirar a B. De igual manera, si se para en A mirando a C, debe girar en  $83^\circ$  para ver el embarcadero B.

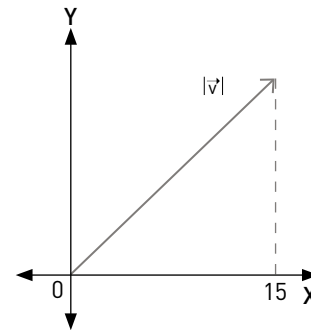
- a. Completa el diagrama con la información del problema.  
 b. Si un bote parte de A con rapidez constante de 32 km/h y sigue una trayectoria recta a B, ¿cuánto demorará en el viaje?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_



- 2 Un cohete es lanzado desde el suelo con una rapidez de 26 m/s. Determina la velocidad y el ángulo de salida según el sistema de referencia dado.

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_



- 3 A un cuerpo de masa 6 kg, que se encuentra apoyado en una superficie horizontal, se le aplica una fuerza de 25 N que forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal.

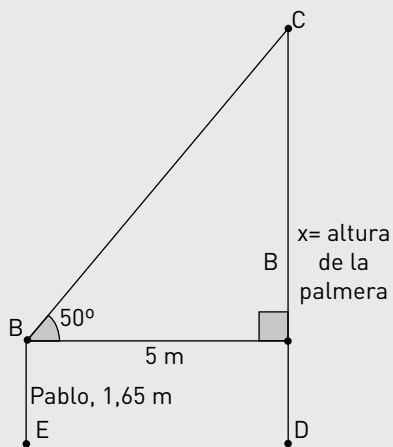
- a. Realiza un diagrama de la situación.

- b. Si el roce es despreciable y el cuerpo está originalmente en reposo, ¿qué distancia recorre en 10 segundos?

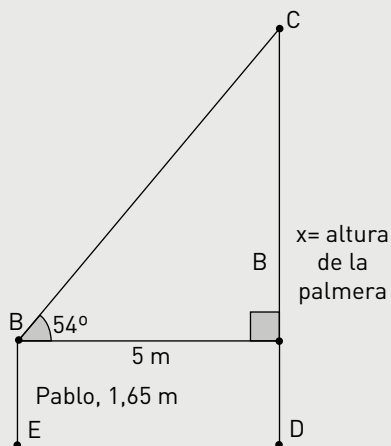
R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Reunidos en los mismos grupos con que realizaron la actividad del Texto, realicen las siguientes actividades.

Pablo y su grupo decidieron utilizar la actividad del Texto para medir la altura de la palmera del patio de su escuela. Pero Pablo cometió un error al medir el ángulo de elevación. Las figuras muestran cómo deberían haber sido y cómo fueron las medidas del grupo.



Mediciones correctas



Mediciones incorrectas

- 1 Calculen ambos valores de  $x$  (altura de la palmera) y redondéenlos a 4 dígitos decimales.

$x$  correcto = \_\_\_\_\_  $x$  incorrecto = \_\_\_\_\_

- 2 Con la fórmula siguiente y usando ambas medidas, calculen el error porcentual de la altura de la palmera.

$$\frac{\text{medida correcta} - \text{medida incorrecta}}{\text{medida correcta}} \cdot 100 = \underline{\hspace{2cm}}$$

¿Piensan que es aceptable ese porcentaje de error? ¿Por qué?

---



---

- 3 Romina, otro miembro del grupo de Pablo, enumeró algunos pasos que podrían haber seguido para aminorar el error. Marquen aquellos que les parezcan adecuado.

Medir varias veces.

Revisar los instrumentos de medición.

Cambiar a la persona que mide.

Medir algo más bajo.

Discutan en el grupo y anoten dos otras formas de aminorar el error en las medidas.

---



---

Reúnete con tres compañeros o compañeras y repasen los temas de esta unidad. Luego, realicen las siguientes actividades.

### ➔ Lección 7 - Tema 1 ¿Qué es una esfera?

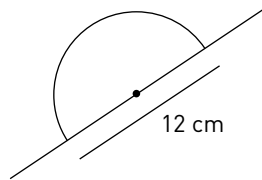


Escriban la respuesta a la pregunta del título de este tema.

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

- 1** Cada figura muestra una semicircunferencia que gira sobre una recta que contiene un diámetro. En cada caso, calculen la circunferencia y el área del círculo mayor de la esfera resultante, expresando los resultados en función de  $\pi$ .

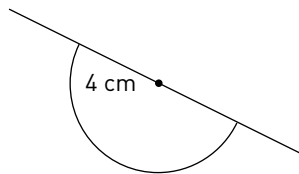
a.



Circunferencia: \_\_\_\_\_

Área del círculo: \_\_\_\_\_

b.



Circunferencia: \_\_\_\_\_

Área del círculo: \_\_\_\_\_

- 2** Resuelvan los siguientes problemas, utilizando la aproximación  $\pi \approx 3,14$ .

- a. Si la circunferencia mayor de una esfera mide 15,7 cm, ¿cuánto mide su radio?  
R: \_\_\_\_\_
- b. Si el área del círculo mayor de una esfera mide 32,1536 cm<sup>2</sup>, ¿cuánto mide su radio?  
R: \_\_\_\_\_
- c. Si la circunferencia mayor de una esfera mide 56,52 cm, ¿cuánto mide su área?  
R: \_\_\_\_\_
- d. Si el área del círculo mayor de una esfera mide 50,24 cm<sup>2</sup>, ¿cuánto mide su área?  
R: \_\_\_\_\_
- e. Si el área del círculo mayor de una esfera mide 24,6176 cm<sup>2</sup>, ¿cuánto mide su diámetro?  
R: \_\_\_\_\_

### ➔ Lección 7 - Tema 2 ¿Cómo se calcula el volumen de la esfera?



La fórmula para calcular el volumen de una esfera es  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ . Expliquen cómo se llega a esta fórmula.

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

- 1** Utilizando la fórmula, calculen el volumen de una esfera de acuerdo a la condición dada.


a.  $r = 5$  cm       $V =$  \_\_\_\_\_

b.  $d = 8,4$  cm       $V =$  \_\_\_\_\_


- 2** Una gota de agua es una esfera de 2 mm de diámetro. Si en un vaso se han depositado 1500 gotas de agua idénticas entre sí, ¿cuántos mililitros de agua hay en el vaso?

R: \_\_\_\_\_

➔ **Lección 7 - Tema 3 ¿Cómo se calcula el área de la esfera?**

 ¿Cuál es la fórmula del área de la esfera?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

 Imaginen que un compañero estuvo ausente cuando se dedujo esta fórmula. ¿Cómo se la explicarían para que pueda aplicarla?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**1** Utilizando la fórmula calculen el área de una esfera de acuerdo a la condición dada.


a.  $r = 3 \text{ cm}$        $V =$  \_\_\_\_\_

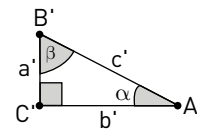
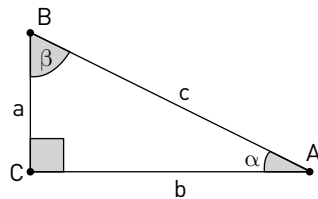
b.  $d = 6,2 \text{ cm}$        $V =$  \_\_\_\_\_

**2** La cúpula de una iglesia tiene forma semi-esférica, de diámetro 30 m. Si la pintura para cubrir su interior cuesta \$8000 el  $\text{m}^2$ , ¿cuánto costará pintarla?

R: \_\_\_\_\_

➔ **Lección 8 - Tema 1 ¿Qué son las razones trigonométricas?**

 ¿Explica por qué la razón  $a : b$  tiene el mismo valor que  $a' : b'$  y por qué este valor se mantendrá en cualquier triángulo que tenga los mismos ángulos.



R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**1** Utilizando la información del primer triángulo de la pregunta anterior, completa las siguientes igualdades.

a.  $\text{sen}(\alpha) =$  \_\_\_\_\_      d.  $\text{sen}(\beta) =$  \_\_\_\_\_

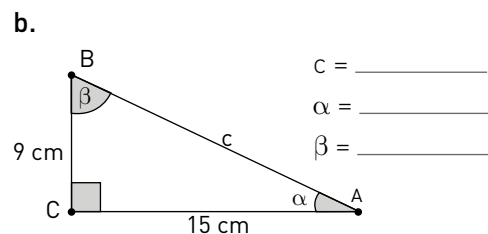
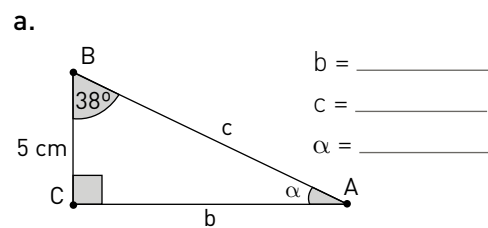
b.  $\text{cos}(\alpha) =$  \_\_\_\_\_      e.  $\text{cos}(\beta) =$  \_\_\_\_\_

c.  $\text{tg}(\alpha) =$  \_\_\_\_\_      f.  $\text{tg}(\beta) =$  \_\_\_\_\_

**2** Completa la siguiente tabla con los valores exactos de cada razón.

	30°	45°	60°
Seno			
Coseno			

**3** Resuelve los siguientes triángulos.



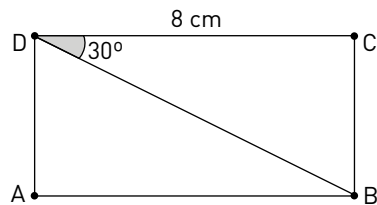
➔ **Lección 8 - Tema 2** ¿En qué se aplican las razones trigonométricas?

🕒 ¿Cuáles son los pasos recomendados para resolver un problema de trigonometría?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

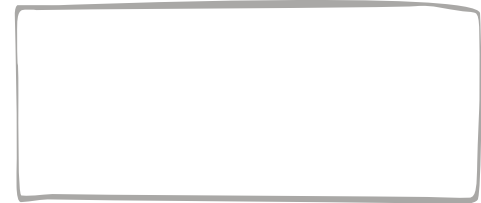
- 1** La luz de un faro ilumina a un barco que está a 350 m de la base del faro. Si el ángulo entre el faro y el rayo de luz es de  $30^\circ$ , ¿cuál es la longitud del rayo?  
 R: \_\_\_\_\_

- 2** En el rectángulo de la figura, ¿cuál es el área del triángulo ABD?  
 R: \_\_\_\_\_



- 3** Sobre una torre de 15 metros de altura se ubica un guarda parque. Desde allí puede observar, a su izquierda y con un ángulo de depresión de  $60^\circ$ , una familia de cururos. Si mira hacia la derecha y con un ángulo de  $50^\circ$ , puede ver un zorro culpeo.  
 R: \_\_\_\_\_

a. Construye un diagrama con la situación dada.



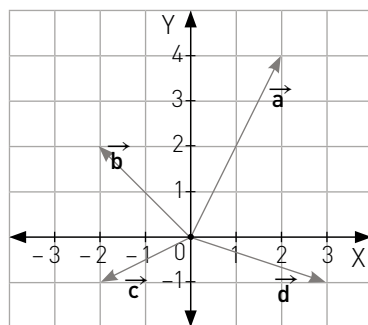
- b. A qué distancia se encuentran los cururos del zorro?  
 R: \_\_\_\_\_

➔ **Lección 8 - Tema 3** ¿Cómo se determinan los componentes de un vector?

🕒 Cuando se representa el vector  $\vec{p}$  con sus coordenadas, ¿qué información nos entrega?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

- 1** Calcula las coordenadas y el módulo de cada vector graficado.



$\vec{a} = (\underline{\quad}, \underline{\quad})$ ;  $|\vec{a}| = \underline{\quad}$   
 $\vec{b} = (\underline{\quad}, \underline{\quad})$ ;  $|\vec{b}| = \underline{\quad}$   
 $\vec{c} = (\underline{\quad}, \underline{\quad})$ ;  $|\vec{c}| = \underline{\quad}$   
 $\vec{d} = (\underline{\quad}, \underline{\quad})$ ;  $|\vec{d}| = \underline{\quad}$

- 2** Utilizando el mismo gráfico de la pregunta anterior, resuelve los siguientes ejercicios.

a. Calcula el ángulo que forma cada vector y el eje Y.

$\mathbf{a} = \underline{\quad}$ ,  $\mathbf{b} = \underline{\quad}$ ,  $\mathbf{c} = \underline{\quad}$ ,  $\mathbf{d} = \underline{\quad}$

b. Escribe las coordenadas de cada vector utilizando los ángulos encontrados en a.



$\vec{a} = \underline{\quad}$

$\vec{b} = \underline{\quad}$

$\vec{c} = \underline{\quad}$

$\vec{d} = \underline{\quad}$

De acuerdo a los resultados que obtuviste en la evaluación de esta Unidad en el Texto, repasa cada tema y resuelve los ejercicios y problemas.

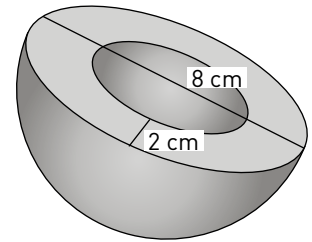
<p>Lección 7, Tema 1</p>	<p>Reconocen la esfera como lugar geométrico y como cuerpo de revolución.</p>	<p><b>1</b> Dibuja en tu cuaderno cada una de las siguientes situaciones y determina cuál de ellas genera una esfera.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>La rotación de un círculo en torno a una recta tangente a él.</li> <li>La rotación de un círculo en torno a una recta que contiene a su diámetro.</li> <li>La rotación de un círculo en torno a una recta que contiene a una cuerda cualquiera.</li> <li>La rotación de un semicírculo en torno a una recta que contiene a un radio cualquiera.</li> </ol> <p><b>2</b> Si se modela el planeta Júpiter como una esfera de radio 69 911 km, ¿cuánto mide el contorno de su ecuador? R: _____</p>
<p>Lección 7, Tema 2</p>	<p>Relacionan medidas de contenidos en envases con forma de cono, cilindro y esfera, que tienen el mismo radio y cuya altura es igual al diámetro.</p>	<p><b>3</b> Un cilindro de vidrio se derritió y con todo el material obtenido se construyó un cono y una esfera. La altura del cilindro es igual al diámetro basal y su volumen es <math>1758 \text{ cm}^3</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Si el área basal y la altura del cono son iguales a las correspondientes del cilindro, ¿cuál es el volumen del cono? R: _____</li> <li>Si el diámetro de la esfera es igual a la altura del cilindro, ¿cuál es su volumen? R: _____</li> </ol> <p><b>4</b> Se tienen una esfera, un cilindro y un cono de igual radio basal. Los volúmenes de estos cuerpos son <math>1420 \text{ cm}^3</math>, <math>2130 \text{ cm}^3</math> y <math>710 \text{ cm}^3</math> respectivamente. ¿Qué puedes concluir respecto a las alturas de los tres cuerpos? Justifica tu respuesta. R: _____</p>
<p>Lección 7, Tema 2</p>	<p>Reconocen que el volumen del cono es un cuarto del volumen de la esfera, si el radio y la altura son iguales en ambas figuras 3D.</p>	<p><b>5</b> Se tiene una esfera de radio <math>(x - 4)</math> cm y un cono de radio basal y altura igual al radio de la esfera. Calcula el volumen de cada uno.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>Volumen = _____</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Volumen = _____</p> </div> </div> <p>¿Qué relación encuentras entre ambas expresiones? R: _____</p> <p><b>6</b> Un perfume se vende en un envase esférico que contiene 250 ml. Si se decide producir un nuevo envase cónico cuya altura y radio basal es igual al radio de la esfera, ¿cuánto perfume contiene el nuevo envase? R: _____</p>

## Lección 7, Tema 2

Aplican las fórmulas de volumen para resolver problemas geométricos, científicos y de la vida diaria.

- 7** Una máquina utiliza piezas semiesféricas huecas en el centro, tal como muestra la figura. ¿Cuál es su volumen?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_



- 8** El área de la superficie de un cubo es  $600 \text{ cm}^2$ . Si una esfera está inscrita en él, ¿cuál es el volumen que no ocupa la esfera en el cubo?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

- 9** ¿Cuáles son las dimensiones aproximadas de la caja de menor superficie en la que se puede guardar una esfera de 5 L de volumen?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

- 10** Una esfera de volumen  $288\pi \text{ cm}^3$  está inscrita en un cilindro. ¿Cuál es el área del cilindro?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

- 11** Pedro y Julia deben encontrar el radio de una esfera sabiendo que dicha esfera está inscrita en un cubo.

- Pedro dice que, si se conoce el área del cubo, puede solucionar el problema.
- Julia dice que, si se conoce la diagonal de una cara del cubo, puede solucionar el problema.

¿Quién tiene razón? Justifica tu respuesta.

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

## Lección 7, Tema 3

Aplican las fórmulas de superficie para resolver problemas geométricos, científicos y de la vida diaria.

- 12** Si el volumen de una esfera es  $288\pi \text{ cm}^3$ , ¿cuál es el área de su superficie?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

- 13** Si numéricamente el volumen de una esfera es un tercio de su área, ¿cuál es la medida de su radio?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

- 14** ¿Cuál es el área de una esfera inscrita en un cubo cuyo volumen es  $64 \text{ cm}^3$ ?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

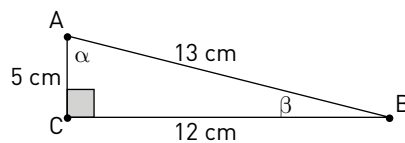
- 15** ¿Cómo varía el área de una esfera si su diámetro disminuye a la mitad?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_



Resuelven triángulos en ejercicios rutinarios; es decir, determinan todos sus ángulos y la medida de todos sus lados.

**16** Calcula las razones trigonométricas en el siguiente triángulo.



- a.  $\text{sen}(\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\text{cos}(\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\text{tg}(\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$   
 $\text{sen}(\beta) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\text{cos}(\beta) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\text{tg}(\beta) = \underline{\hspace{2cm}}$

**17** En el triángulo ABC el ángulo en C es recto, el lado a mide 415 m y b mide 280 m. Encuentra las medidas del tercer lado y de los ángulos del triángulos.

R: \_\_\_\_\_

Resuelven problemas de la vida cotidiana, de geometría y de ciencias naturales, aplicando las razones trigonométricas.

**18** Si  $\alpha$  es la medida de un ángulo interior agudo de un triángulo rectángulo, tal que  $\text{tg}(\alpha) = \frac{3}{4}$  y la longitud de la hipotenusa es 10 cm, ¿cuál es el perímetro del triángulo?

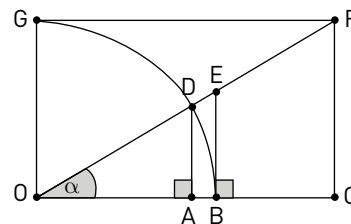
R: \_\_\_\_\_

**19** Si la hipotenusa de un triángulo mide 20 cm y  $\text{sen}(\beta) = 0,643$ , ¿cuál es el valor de  $\text{cos}(\beta)$  y  $\text{tg}(\beta)$ .

R: \_\_\_\_\_

**20** La figura representa parte de una circunferencia de radio 1 cm. Si los triángulos AOD, BOE y COF son semejantes y  $\text{cos} = 0,86$ , calcula las medidas de:

- a. OA =         
 b. OC =         
 c. AD =         
 d. BE =         
 e. OE =         
 f. OF =



**21** Entre las casas de Ignacio y Sara hay una torre de telefonía. Si ellos observan la punta de la torre con ángulos de elevación de  $45^\circ$  y  $60^\circ$  respectivamente y si la distancia entre las casas es 130 m, ¿cuál es la altura de la torre telefónica? Realiza un diagrama de la situación.

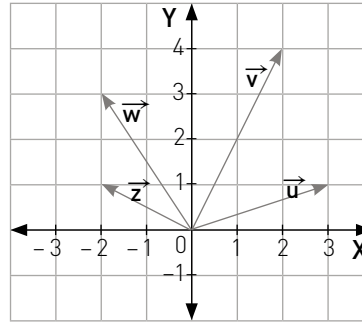


R: \_\_\_\_\_

Representan vectores, utilizando seno y coseno.

Utilizan las razones trigonométricas para componer (descomponer) vectores.

**22** Observa el gráfico siguiente y resuelve los ejercicios.



a. Escribe las componentes de cada vector utilizando pares ordenados.

$$\vec{u} = (\underline{\quad}, \underline{\quad}), \vec{v} = (\underline{\quad}, \underline{\quad}), \vec{w} = (\underline{\quad}, \underline{\quad}), \vec{z} = (\underline{\quad}, \underline{\quad})$$

b. Calcula la magnitud de cada vector.

$$|\vec{u}| = \underline{\quad}, |\vec{v}| = \underline{\quad}, |\vec{w}| = \underline{\quad}, |\vec{z}| = \underline{\quad}$$

c. Calcula el ángulo menor formado por cada vector y el eje X.

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

d. Escribe cada vector utilizando las razones trigonométricas.

$$\vec{u} = (\underline{\quad}, \underline{\quad}), \vec{v} = (\underline{\quad}, \underline{\quad})$$

$$\vec{w} = (\underline{\quad}, \underline{\quad}), \vec{z} = (\underline{\quad}, \underline{\quad})$$

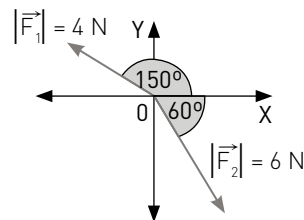
**23** Si un objeto se traslada en línea recta 8 m hacia el sur y luego 10 m, hacia el oeste, ¿cuál es la magnitud de su desplazamiento?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**24** Si las componentes de la velocidad de una partícula son  $V_x = 32 \text{ m/s}$  y  $V_y = 8 \text{ m/s}$ , ¿cuáles son su rapidez y su dirección?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**25** Según la información, ¿cuál es la fuerza resultante aplicada al cuerpo según las magnitudes y direcciones dadas?

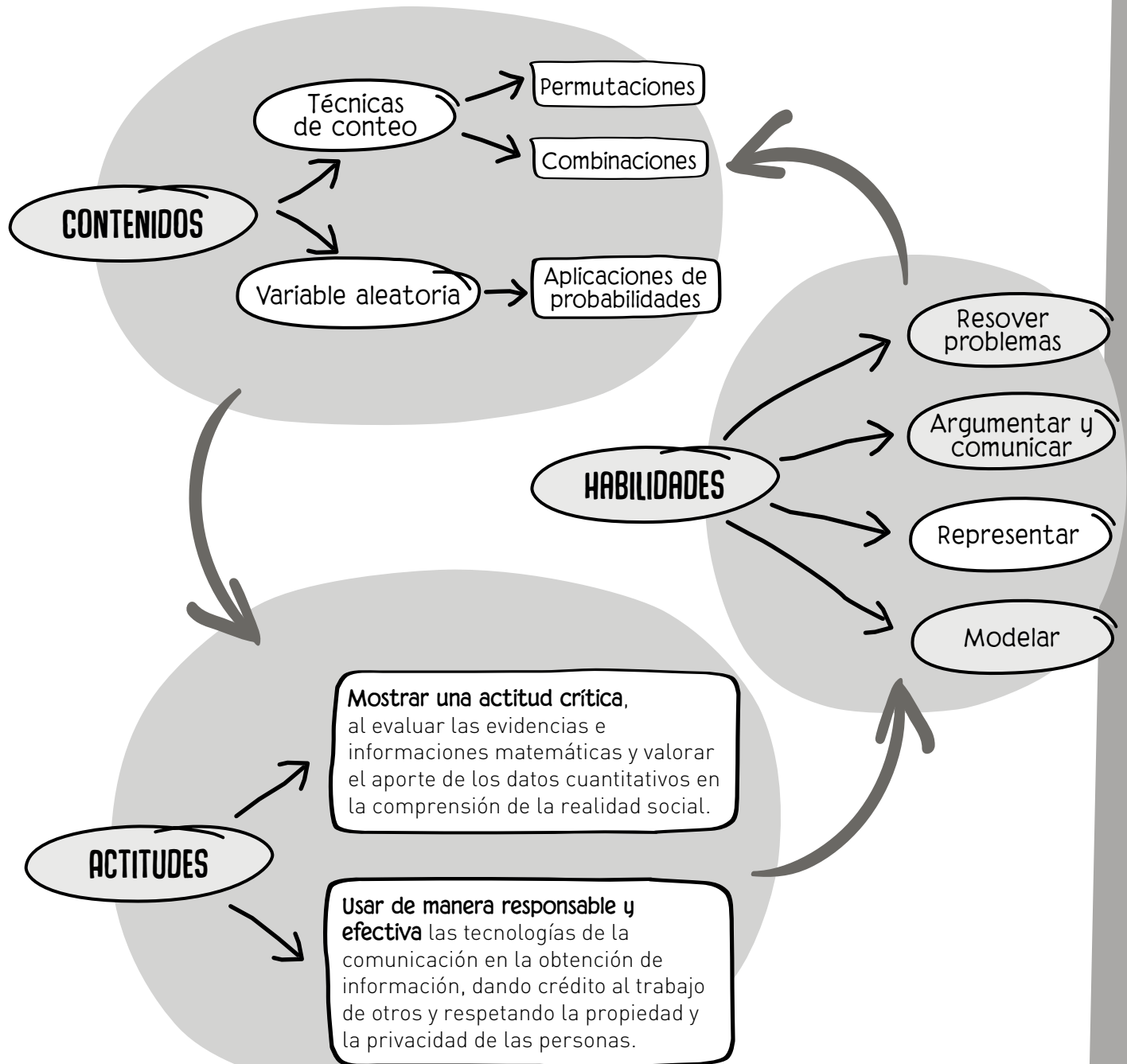


R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

# UNIDAD 4

# PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Antes de comenzar a trabajar observa el siguiente esquema que muestra los principales conceptos que estudiarás en esta unidad, las habilidades que desarrollarás y las actitudes que deberás mantener para alcanzar tus metas.



## Técnicas de conteo

Repasa algunos contenidos que utilizarás durante esta lección.

- 1 Representa en un diagrama de árbol los siguientes experimentos.
  - a. Lanzar una moneda tres veces.
  - b. Lanzar una moneda y, si sale cara, volver a lanzar.
  - c. Lanzar un dado y, si sale par, lanzar una moneda.
- 2 Representa en un diagrama de árbol las siguientes situaciones.
  - a. Se desea combinar tres tipos de poleras con tres tipos de pantalón.
  - b. Se desea conocer las combinaciones posibles para un menú con dos opciones de plato de fondo y tres de postre.
- 3 Esteban quiere retornar a su casa después de unas felices vacaciones. Para llegar hasta la estación de buses tiene cuatro opciones de camino y, una vez en la estación, cuenta con tres líneas de buses que lo llevan de regreso a su ciudad. Representa, en un diagrama de árbol, todas las opciones que tiene para regresar a su casa.
- 4 Para volar de la ciudad A a la B una línea aérea debe realizar al menos una de tres escalas en las ciudades C, D y E. Escribe una lista de todas las formas de llegar de A a B.  
R: \_\_\_\_\_
- 5 Analiza cada experimento. Luego, escribe una E si es equiprobable y una X si no lo es.
  - a. \_\_\_\_\_ Lanzar una moneda cargada.
  - b. \_\_\_\_\_ Lanzar un dado en forma de dodecaedro regular.
  - c. \_\_\_\_\_ El resultado final de un campeonato de fútbol.
- 6 Utilizando la regla de Laplace, calcula las probabilidades de los eventos propuestos.
  - a. Obtener cara al lanzar una moneda.  
Casos favorables: \_\_\_\_\_  
Casos posibles: \_\_\_\_\_  
R: \_\_\_\_\_
  - b. Obtener un número impar lanzando un dado de 6 caras.  
Casos favorables: \_\_\_\_\_  
Casos posibles: \_\_\_\_\_  
R: \_\_\_\_\_
  - c. Sacar una pelota de color verde de una caja que posee tres pelotas de cada color (rojo, verde y blanco).  
Casos favorables: \_\_\_\_\_  
Casos posibles: \_\_\_\_\_  
R: \_\_\_\_\_

Al estudiar y aplicar combinatoria es importante organizar los datos, por ejemplo en un diagrama de árbol. De esta manera, es más fácil visualizar todos los posibles resultados de un experimento.

Para aplicar combinatoria en el cálculo de la probabilidad de un evento debes recordar la regla de Laplace y las condiciones que debe cumplir un experimento para poder aplicarla.

## Tema 1 ¿Cuándo se aplica el principio multiplicativo?

### Practico

1 Resuelve los siguientes ejercicios.

- $3! =$  \_\_\_\_\_
- $4! =$  \_\_\_\_\_
- $8! - 4! =$  \_\_\_\_\_
- $2! + 5! =$  \_\_\_\_\_
- $\frac{6!}{4!} =$  \_\_\_\_\_
- $\frac{8!}{10!} + \frac{9!}{10!} =$  \_\_\_\_\_

2 Analiza la información de la siguiente situación. Luego, responde las preguntas.

En una reserva natural hay siete ejemplares de lechuza, tres de cóndor y cinco de águila.

- Si se quiere elegir un ejemplar de las aves, ¿de cuántas maneras se puede seleccionar?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿De cuántas formas posibles se pueden seleccionar tres aves, una de cada especie?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿Qué diferencia hay entre las preguntas planteadas en a y b?  
R: \_\_\_\_\_

3 Un estudiante, que debe llevar algunos materiales para la clase de Arte, tiene que decidir entre cuatro colores de pinturas acrílicas y otros seis colores de acuarelas.

- ¿Cuántas opciones tiene si debe escoger un solo color?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿De cuántas formas posibles se pueden seleccionar dos colores, uno de cada tipo?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿Qué diferencia hay entre las preguntas planteadas en a y b?  
R: \_\_\_\_\_

4 Un pintor debe escoger dos colores diferentes de pintura para una pared de oficina. Si dispone de 5 colores: amarillo claro, verde limón, celeste, rosado y blanco, ¿de cuántas formas distintas puede pintar la pared?

- Completa el esquema con el primer y segundo color.

\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_  
1º Color    2º Color

- Responde el problema.

R: \_\_\_\_\_

5 Un establecimiento decide enviar a un par de estudiantes a una conferencia de líderes juveniles, para lo cual se ha decidido seleccionar algunos presidentes de curso. Si en el grupo de los presidentes hay 3 hombres y 5 mujeres.

- ¿De cuántas formas distintas se pueden seleccionar dos estudiantes?

R: \_\_\_\_\_

- ¿De cuántas formas distintas se pueden seleccionar las parejas si necesariamente deben ser un hombre y una mujer?

R: \_\_\_\_\_

6 En un colegio se ofrecen 3 talleres de arte y 5 talleres deportivos. Si un estudiante debe escoger un taller de cada tipo, ¿cuántas opciones tiene?

R: \_\_\_\_\_

7 Dos tiendas tienen distintas cantidades de ofertas: la primera tiene 6 tipos de ofertas y la segunda, solo 2.

- Si una persona escogerá una oferta de cada tienda, ¿cuántas combinaciones puede hacer?

R: \_\_\_\_\_

- ¿Qué principio utilizaste para responder la pregunta anterior?

R: \_\_\_\_\_

## Me desafío

- 1** Marcela debe contestar una prueba que consta de 15 preguntas con alternativas. Sin embargo, antes de empezar se le comunica que debe seleccionar solo 7 preguntas de las propuestas. ¿Cuántas combinaciones de preguntas tiene Marcela para escoger?  
R: \_\_\_\_\_
- 2** Un país quiere modificar el formato de las patentes vehiculares debido al incremento de vehículos en las ciudades. Para ello, cuentan con dos propuestas: la primera es utilizar letras sin repetición y dos dígitos con repetición; la segunda consiste en usar tres letras con repetición y dos dígitos sin repetición. ¿Cuál de las dos propuestas recomendarías tú? (Considera 26 letras y 10 dígitos).  
R: \_\_\_\_\_
- 3** Mariano quiso, después de mucho tiempo, ingresar a su perfil de Facebook, pero no recuerda con exactitud su clave, no obstante tiene claro que esta se componía de 4 dígitos diferentes. ¿Entre cuántas combinaciones numéricas deberá escoger Mariano para ingresar a su perfil de Facebook?  
R: \_\_\_\_\_
- 4** El profesor de Matemática le recomendó dos libros a Marco para preparar su examen. Cuando este llega a la biblioteca advierte que no recuerda los nombres de los autores, pero sí los temas de los libros. Si en la biblioteca tienen 13 libros de uno de los temas y 5 del otro, ¿ante cuántas combinaciones se enfrentará Marco para escoger los libros que necesita?  
R: \_\_\_\_\_
- 5** Una fábrica de trenes ensambla partes de acuerdo a las necesidades de cada empresa que los contrata. Si dispone de 8 lotes de vagones para pasajeros, 6 lotes de vagones para carga y 4 locomotoras, ¿cuántas combinaciones pueden ensamblar un tren que debe tener un lote de cada tipo y una cabina?  
R: \_\_\_\_\_
- 6** Raúl debe construir una maqueta para su proyecto: Para la base tiene tres posibles materiales (cartón, madera o zinc), para las paredes tiene dos opciones (cartón piedra o palitos de helado) y para el techo cuenta con dos opciones (plástico o papel periódico).
- a.** ¿De cuantas formas es posible seleccionar los materiales, si necesariamente debe escoger uno para cada parte de la maqueta?  
R: \_\_\_\_\_
- b.** Escribe de cuántas formas es posible seleccionar los materiales si ya decidió hacer la base con madera.  
R: \_\_\_\_\_
- c.** Escribe todas las posibilidades de maqueta que impliquen el uso de zinc y palitos de helado.  
R: \_\_\_\_\_
- 7** Un arqueólogo se percató de que se mezclaron los fósiles de tres individuos de diferentes especies, de las cuales poseía los mismos restos óseos (fémur, cráneo y tibia).
- a.** ¿De cuantas maneras se pueden agrupar los fósiles?  
R: \_\_\_\_\_
- b.** ¿De cuántas maneras tiene de agrupar correctamente los fósiles?  
R: \_\_\_\_\_
- c.** Si toma un cráneo, ¿cuántas posibilidades tiene de equivocarse de fémur y de tibia?  
R: \_\_\_\_\_
- d.** Si ha acertado en el cráneo y en el fémur, ¿cuántas opciones de equivocarse le quedan?  
R: \_\_\_\_\_

## Tema 2 ¿Qué son las permutaciones y las combinaciones?

### Practico

1 Calcula el valor de cada permutación.

- $P(5) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $P(4) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $P(9) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $P(6) = \underline{\hspace{2cm}}$

2 Calcula el valor de cada variación.

- $V(5,2) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $V(6,4) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $V(10,8) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $Vr(15,3) = \underline{\hspace{2cm}}$

3 Determina el valor de  $n$  o  $k$  según corresponda.

- $V(7,k) = 2520$      $k = \underline{\hspace{2cm}}$
- $V(n,3) = 336$      $n = \underline{\hspace{2cm}}$
- $Vr(4,k) = 16$      $k = \underline{\hspace{2cm}}$
- $V(9,k) = 72$      $k = \underline{\hspace{2cm}}$
- $Vr(n,3) = 512$      $k = \underline{\hspace{2cm}}$
- $V(n,4) = 360$      $k = \underline{\hspace{2cm}}$

4 Calcula el valor de cada combinatoria.

- $C(5,2) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $C(10,8) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $C(6,4) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $C(12,3) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $C(15,10) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $C(7,1) = \underline{\hspace{2cm}}$

5 Expresa el resultado en términos de  $n!$

- De una baraja de 20 cartas de un juego de rol, se extraen cartas una a una sin reposición. ¿Cuántas son las formas posibles de extraer las cartas?  
R:  $\underline{\hspace{4cm}}$
- En una tómbola se encuentran 10 pelotas numeradas del 0 al 9. Si se extrae cada una sin reposición, ¿de cuántas formas se pueden ordenar las pelotas?  
R:  $\underline{\hspace{4cm}}$

6 Analiza las situaciones de la columna izquierda y únelas al tipo de problema que corresponde.

a.	Ordenar 5 objetos	Permutaciones
b.	Formar parejas con 10 objetos	
c.	Escoger 3 objetos entre 4 y ordenarlos	Combinaciones
d.	Escoger 3 objetos entre 4	Variaciones

7 Analiza cada situación y realiza las actividades indicadas.

- ¿De cuántas formas se puede escribir una palabra con la letras de la palabra murciélago?  
- Elige el tipo de situación a la que corresponde.  
Permutación - Variación - Combinación  
- Escribe la expresión que permite encontrar el resultado pedido.  $\underline{\hspace{2cm}}$   
- Calcula la respuesta.  $\underline{\hspace{2cm}}$
- Si Benjamín desea ordenar 9 libros en su repisa, ¿de cuántas formas puede hacerlo?  
- Elige el tipo de situación a la que corresponde.  
Permutación - Variación - Combinación  
- Escribe la expresión que permite encontrar el resultado pedido.  $\underline{\hspace{2cm}}$   
- Calcula la respuesta.  $\underline{\hspace{2cm}}$
- En un condominio se deben elegir 5 personas entre 12, para que formen parte de la administración, ¿cuántos grupos pueden resultar?  
- Elige el tipo de situación a la que corresponde.  
Permutación - Variación - Combinación  
- Escribe la expresión que permite encontrar el resultado pedido.  $\underline{\hspace{2cm}}$   
- Calcula la respuesta.  $\underline{\hspace{2cm}}$

## Me desafío

- 1** Considera los números 1, 3, 5, 7 y 9.  
¿Cuántos números de 2 cifras diferentes se pueden formar?  
R: \_\_\_\_\_
- 2** Después de desarmar su teclado, Carlos se quedó solo con algunas teclas:  
A – S – D – F – G – H – J.
- a.** Si las dispone horizontalmente, ¿de cuántas formas las podría ordenar?  
R: \_\_\_\_\_
- b.** Si A y S siempre deben quedar juntas, ¿de cuántas formas se podrían ordenar las teclas?  
R: \_\_\_\_\_
- 3** Juan tiene en su cocina una repisa para 6 frascos de aliños y condimentos.  
¿De cuántas formas se pueden ordenar los frascos en la repisa?  
R: \_\_\_\_\_
- 4** Érica no se sabe el RUT de su hija, sin embargo, recuerda que comienza con 21 y que termina con K. Su hija le dice que los dígitos faltantes son los siguientes: 7, 8, 3, 2, 4 y 6. ¿Cuántos números de RUT puede armar Érica independiente de si son o no válidos?  
R: \_\_\_\_\_
- 5** En un liceo se está preparando una feria científica. Para facilitar la circulación de los estudiantes y visitantes se decidió colocar a la izquierda de la sala y en fila los 15 experimentos. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los experimentos?  
R: \_\_\_\_\_
- 6** Los productores de una película chilena tienen 20 butacas reservadas para los críticos en la noche del estreno. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar los críticos?  
R: \_\_\_\_\_
- 7** Luisa tiene 10 libros distintos de los cuales quiere elegir 4 para las vacaciones. ¿Cuántas selecciones puede hacer?  
R: \_\_\_\_\_
- 8** Para la colación escolar, Juan debe escoger un jugo y un sándwich. El jugo puede ser de piña, naranja o manzana; el sándwich puede ser de ave, jamón o queso. ¿Entre cuántas colaciones puede escoger Juan?  
R: \_\_\_\_\_
- 9** Se lanza 3 veces un dado de 6 caras y se anota el número de puntos obtenidos. Ana dice que hay 18 resultados posibles. ¿Está Ana en lo correcto? Justifica tu respuesta.  
R: \_\_\_\_\_
- 10** Quince estudiantes participan en una competencia de ortografía en la que se premian los cinco primeros lugares. ¿Cuántas son las formas de premiación posibles?  
R: \_\_\_\_\_
- 11** Un profesor desea hacer diferentes formas de un examen reordenando las 8 preguntas que este debe contener, ¿con cuántas formas puede contar el profesor?  
R: \_\_\_\_\_
- 12** En un campeonato de básquetbol participan 10 equipos. Si en la primera ronda todos los equipos deben enfrentarse entre sí, ¿cuántos partidos se jugarán?  
R: \_\_\_\_\_
- 13** Para el concurso literario organizado por municipalidad se elegirán como jurados 3 de los 9 profesores de Lenguaje que trabajan en ella. ¿De cuántas maneras se puede realizar la elección?  
R: \_\_\_\_\_
- 14** ¿Cuántos triángulos distintos se pueden formar con los vértices de un trapecioide?  
R: \_\_\_\_\_



## Tema 3 ¿En qué se aplican las combinaciones?

### Practico

- 1 Las vocales se clasifican en abiertas (a, e y o) y cerradas (i y u).
  - a. ¿De cuántas formas se pueden escoger dos vocales cualesquiera?  
R: \_\_\_\_\_
  - b. ¿De cuántas maneras se pueden escoger dos vocales abiertas?  
R: \_\_\_\_\_
  - c. ¿De cuántas maneras se puede escoger una abierta y una cerrada?  
R: \_\_\_\_\_
  - d. ¿Cuál es la probabilidad de escoger dos vocales abiertas?  
R: \_\_\_\_\_
  - e. ¿Cuál es la probabilidad de escoger una vocal abierta y una cerrada?  
R: \_\_\_\_\_
  
- 2 Jacinta, Sofía, Iván, Tomás, Paz y Rodrigo se organizarán en parejas, cada una de las cuales estudiará uno de los temas que abarcará la prueba de Historia.
  - a. ¿Cuántas parejas diferentes se pueden formar?  
R: \_\_\_\_\_
  - b. Si una pareja se elige al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté compuesta por dos mujeres?  
Casos favorables: \_\_\_\_\_  
Casos posibles: \_\_\_\_\_  
R: \_\_\_\_\_
  - c. Si una pareja se elige al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté compuesta por un hombre y una mujer?  
Casos favorables: \_\_\_\_\_  
Casos posibles: \_\_\_\_\_  
R: \_\_\_\_\_
  
- 3 Damián quiere construir una palabra con o sin sentido, que tenga cuatro consonantes y tres vocales.
  - a. ¿De cuántas formas es posible construir la palabra?  
R: \_\_\_\_\_
  - b. Si la primera letra debe ser consonante, ¿de cuántas formas es posible construir la palabra?  
R: \_\_\_\_\_
  - c. Si Damián elige las letras al azar, ¿cuál es la probabilidad que la palabra comience con una consonante?  
R: \_\_\_\_\_
  
- 4 Sandra, Jacinta, Marta, Luis, Álvaro y Diego se presentan para los 3 cargos de la directiva de curso.
  - a. ¿Cuántas directivas diferentes podrían formarse?  
R: \_\_\_\_\_
  - b. ¿Cuál es la probabilidad de que la directiva esté compuesta solo por hombres?  
R: \_\_\_\_\_
  - c. ¿Cuál es la probabilidad de que la directiva esté compuesta por una mujer y dos hombres?  
R: \_\_\_\_\_
  
- 5 Ana quiere ordenar sus libros de Historia, Física, Matemática, Inglés y Lenguaje en una repisa.
  - a. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerlo?  
R: \_\_\_\_\_
  - b. ¿Cuál es la probabilidad de que el primero sea el de Matemática?  
R: \_\_\_\_\_

## Me desafío

- 1** Se lanzan 3 monedas y se anota la cantidad de caras y sellos en cada lanzamiento.
- a. Completa la tabla con el número de casos para cada resultado posible.
- |              |   |   |   |   |
|--------------|---|---|---|---|
| N° de sellos | 0 | 1 | 2 | 3 |
| N° de casos  |   |   |   |   |
- b. Si se lanzan las monedas, ¿cuál es la probabilidad de que salgan 2 sellos y una cara?  
R: \_\_\_\_\_
- c. ¿Cuál es la probabilidad de que salga a lo menos un sello?  
R: \_\_\_\_\_
- 2** En un curso, formado por 22 niñas y 18 niños, se realiza la elección de los dos delegados al centro de alumnos.
- a. ¿Cuántos resultados posibles tiene la elección?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que los elegidos sean de distinto sexo?  
R: \_\_\_\_\_
- c. ¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidas dos niñas?  
R: \_\_\_\_\_
- 3** De una bolsa, en que hay nueve tarjetas numeradas del 1 al 9, se sacan simultáneamente 3 tarjetas al azar y se forma un número.
- a. ¿Cuántos números se pueden formar?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuántos de esos números son pares?  
R: \_\_\_\_\_
- c. ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea par?  
R: \_\_\_\_\_
- d. ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea mayor que 500?  
R: \_\_\_\_\_
- 4** En una empresa trabajan 15 profesionales: 6 en el departamento de Marketing, 6 en Informática y 3 en Recursos Humanos. La dirección de la empresa decide llamar aleatoriamente a tres de ellos para organizar reuniones bipartitas.
- a. ¿Cuál es la probabilidad de que cada departamento esté representado en la reunión?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas sean de Informática y uno de Recursos Humanos?  
R: \_\_\_\_\_
- 5** Éiris contiene 7 colores.
- a. ¿De cuántas formas pueden mezclarse los colores tomándolos de tres en tres?  
R: \_\_\_\_\_
- b. Si se elige al azar una de las mezclas, ¿cuál es la probabilidad de que en ella esté presente el color azul?  
R: \_\_\_\_\_
- 6** Se seleccionan al azar las letras de la palabra COMPLETA. ¿Cuál es la probabilidad de formar la palabra PLECOMTA?  
R: \_\_\_\_\_
- 7** Mariana tiene 3 lápices a tinta y 4 lápices de grafito. Si quiere llevar a su colegio 4 lápices en total y los selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que escoja 2 lápices de tinta?  
R: \_\_\_\_\_
- 8** Un entrenador dispone de 22 jugadores para formar un equipo de fútbol.
- a. ¿Cuántas alineaciones de 11 jugadores puede hacer?  
R: \_\_\_\_\_
- b. Si el entrenador forma un equipo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que Juan, uno de los jugadores, esté en ese equipo?  
R: \_\_\_\_\_

Reforzamiento

Según tus resultados en la evaluación de la lección, repasa los temas.

Si no recuerdas la fórmula para calcular las permutaciones, utiliza un diagrama de árbol o piensa en casillas que puedes ir llenando de la forma indicada en el problema.

Antes de comenzar a resolver un problema debes fijarte si los elementos pueden reponerse o no.

Aprende a identificar si se trata de una permutación o una combinación, para ello pregúntate si importa o no el orden de los elementos en cada selección.

**1** José recuerda que los 4 dígitos de la clave de su candado son diferentes y que los dos últimos dígitos son menores que 4. ¿Cuántas opciones tiene de equivocarse de número? (Utiliza un diagrama del árbol si es necesario.)

R: \_\_\_\_\_

**2** En mi velador tengo 4 libros que deseo poner uno sobre otro.

a. ¿De cuántas formas es posible hacerlo?

R: \_\_\_\_\_

b. Si me regalan un libro más, ¿de cuántas formas es posible ordenarlos?

R: \_\_\_\_\_

**3** Identifica el error en cada afirmación. Luego, corrígelo.

a. La elección de cinco vocales con repetición es  $5!$

Error: \_\_\_\_\_

Corrección: \_\_\_\_\_

b. Las letras de la palabra "cinco" se puede ordenar con o sin sentido en 120 formas, manteniendo la última vocal.

Error: \_\_\_\_\_

Corrección: \_\_\_\_\_

c. Si se extraen tres bolitas de una caja con 3 blancas, 2 rojas y 4 verdes, existen 24 posibilidades de resultados.

Error: \_\_\_\_\_

Corrección: \_\_\_\_\_

**4** En una heladería se dispone de 9 variedades diferentes de helado: 3 de frutos tropicales, 2 de frutos cítricos y 4 tipos de chocolate.

a. Estela debe decidir 3 sabores de helado, ¿Cuántas maneras tiene para combinar su helado?

R: \_\_\_\_\_

b. Si quiere un sabor de cada variedad, ¿de cuántas maneras puede combinar su helado?

R: \_\_\_\_\_

**5** Diez pelotas numeradas del 0 al 9 se encuentran en una tómbola. Si se toman cinco pelotas una tras otra y se ordenan, ¿cuántos números de cinco cifras se pueden obtener, considerando que el primer número no puede ser cero?

R: \_\_\_\_\_

## Profundización

**1** Para la prueba final de 5000 metros de un torneo interescolar clasificaron los siguientes competidores: 4 representantes de la Región Metropolitana, 11 de la Región de Los Ríos, 6 de la Región de Arica y Parinacota, 2 de la Región de Los Lagos y 2 de la Región del Maule.

a. Si en la competencia se premia a los tres primeros lugares, ¿cuántos podios distintos se pueden dar al término de la competencia?

R: \_\_\_\_\_

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer lugar sea de la Región de los Lagos, el segundo de la Región de Arica y Parinacota y el tercero de cualquier otra región?

R: \_\_\_\_\_

**2** Una familia, formada por los padres y cuatro hijos, van al teatro y se sientan en seis butacas consecutivas.

a. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse?

R: \_\_\_\_\_

b. ¿Cuál es la probabilidad de que los padres se sienten en los extremos?

R: \_\_\_\_\_

**3** A un congreso asisten 60 personas de las cuales 40 solo hablan francés y 20 solo castellano. ¿Cuántos diálogos pueden establecerse sin intérprete?

R: \_\_\_\_\_

**4** Todas las personas que asisten a una reunión se estrechan la mano, una vez con cada persona. Si hubo 105 apretones, ¿cuántas personas asistieron?

R: \_\_\_\_\_

**5** Con las letras E, R, S, O y B se forman palabras de 5 letras, con o sin sentido.

a. ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar si se permite su repetición?

R: \_\_\_\_\_

b. Si se elige al azar una de estas palabras, ¿cuál es la probabilidad de que las letras no estén repetidas?

R: \_\_\_\_\_

Lección  
**10**

## Variable aleatoria

Repasa algunos contenidos que utilizarás durante esta lección.

**1** A partir del experimento definido y un posible evento, determina los elementos involucrados.

a. Experimento: Lanzar un dado dos veces.

Evento: Obtener el mismo número en los dos lanzamientos.

Posibles resultados del evento.

R: \_\_\_\_\_

Posibles resultados del complemento.

R: \_\_\_\_\_

b. Experimento: Lanzar una moneda dos veces.

Evento: Obtener por lo menos una cara.

Posibles resultados del evento.

R: \_\_\_\_\_

Posibles resultados del complemento.

R: \_\_\_\_\_

**2** Si la probabilidad de que Agustín gane un televisor en una rifa es  $\frac{1}{8}$ , ¿cuál es la probabilidad de que no gane el televisor?

R: \_\_\_\_\_

**3** La probabilidad de que Gonzalo gane en una máquina de azar es de  $\frac{1}{100}$ . ¿Cuál es la probabilidad de que gane en la máquina dos veces seguidas?

R: \_\_\_\_\_

**4** De una caja en que hay 2 pelotas rojas y 3 blancas, se extrae una pelota al azar. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una pelota roja?, ¿cuál es la probabilidad de no obtener una pelota de ese color?

R: \_\_\_\_\_

**5** De una caja con 6 fichas rojas y 4 azules, se extraen dos fichas consecutivas, sin reponer la primera extracción. Calcula la probabilidad pedida.

a. Que las dos fichas sean azules.

R: \_\_\_\_\_

b. Que las dos fichas sean rojas.

R: \_\_\_\_\_

c. Que la primera ficha sea roja y la segunda sea azul.

R: \_\_\_\_\_

Al estudiar una distribución de probabilidades, recuerda la relación entre un evento y su complemento.

Para poder avanzar en el estudio de las probabilidades, debes asegurarte de recordar el cálculo de la probabilidad de un evento compuesto.

## → Tema 1 ¿Qué es una variable aleatoria?

### Practico

- 1 Define la variable de cada experimento.
  - a. Experimento: Lanzar un dado hasta que salga un número par.  
Variable X: \_\_\_\_\_
  - b. Experimento: Medir el tiempo de espera, en segundos, en una caja de supermercado.  
Variable X: \_\_\_\_\_
  - c. Experimento: Contar los autos que pasan por una calle concurrida en el horario de 8:00 a 12:00 horas.  
Variable X: \_\_\_\_\_
  - d. Experimento: Determinar la cantidad de productos defectuosos antes de su venta.  
Variable X: \_\_\_\_\_
  - e. Experimento: Medir la temperatura, en grados Celsius, a las 12:00 horas durante una semana.  
Variable X: \_\_\_\_\_
  - f. Experimento: Extraer 3 caramelos de menta de una bolsa que contiene 5 de menta y 3 de miel.  
Variable X: \_\_\_\_\_
  
- 2 Determina el rango o recorrido correspondiente a cada experimento según la variable.
  - a. Experimento: Observar el color de ojos de los 3 hijos de 6 familias.  
X: Número de hijos que tienen ojos café.  
Recorrido: \_\_\_\_\_
  - b. Experimento: Estudiar la cantidad de autos estacionados en una cuadra con a lo más 9 espacios para estacionar.  
X: Número de autos estacionados de color rojo.  
Recorrido: \_\_\_\_\_
  
- 3 Analiza el experimento y luego responde las preguntas.  
En una tómbola hay 10 bolitas marcadas con un dígito del 0 al 9 sin repetirse. Se extraen 3 bolitas y se las devuelve a la tómbola cada vez.
  - a. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?  
R: \_\_\_\_\_
  - b. ¿Cuál es el recorrido de la variable X: número de bolitas marcadas con números primos?  
R: \_\_\_\_\_
  - c. ¿Puede la variable tomar el valor 4?  
¿Por qué?  
R: \_\_\_\_\_
  - d. ¿Qué significa que la variable pueda tomar el valor 0?  
R: \_\_\_\_\_
  - e. ¿Qué significa que la variable pueda tomar el valor 3?  
R: \_\_\_\_\_
  
- 4 De la misma tómbola del problema anterior se extraen las 3 bolitas, esta vez sin reponerlas, hasta obtener un 9.
  - a. ¿Cuál es el espacio muestral?  
R: \_\_\_\_\_
  - b. ¿Cuál es la diferencia con el espacio muestral anterior?  
R: \_\_\_\_\_
  - c. ¿Cuál es el recorrido de la variable Y: número de extracciones hasta obtener un 9? ¿En qué se diferencia con la anterior variable?  
R: \_\_\_\_\_
  - d. ¿Qué diferencia hay entre extraer las bolitas sin reposición y extraerlas con reposición?  
R: \_\_\_\_\_

**Me desafío**

- 1** Al conserje de un edificio le avisaron que al menos uno de cinco departamentos tenía una fuga de gas. Antes de llamar a bomberos debe determinar el número de departamentos que presentan el problema.
- a. ¿Qué valores puede tomar la variable aleatoria  $X$ : número de departamentos con fuga?  
R: \_\_\_\_\_
- b. Si los departamentos son los A, B, C, D y E, ¿cuáles son los casos posibles para  $X = 3$ ?  
R: \_\_\_\_\_
- c. ¿Cuántos son los casos correspondientes a  $2 \leq X < 4$ ?  
R: \_\_\_\_\_
- d. Si la variable aleatoria fuera el número de departamentos sin fuga, ¿varían los valores del dominio? Justifica tu respuesta  
R: \_\_\_\_\_

- 2** En la bodega de un supermercado hay 500 paquetes de cereales. Para averiguar si están en condiciones de ser comercializadas se eligen al azar 20 paquetes y se revisan.
- a. ¿Qué porcentaje de las cajas se revisa?  
R: \_\_\_\_\_
- b. María dice que hay  $\frac{500!}{20!480!}$  maneras distintas de elegir los 20 paquetes que se revisarán. ¿Es correcta su afirmación? Justifica tu respuesta.  
R: \_\_\_\_\_
- c. Una vez que las cajas se revisan, se clasifican en B (buenas) y V (vencidas). Completa un diagrama de árbol que ilustre los casos posibles después de revisar la tercera caja.



- d. ¿Cuántos posibles resultados hay después de revisar las 20 cajas?  
R: \_\_\_\_\_
- e. Tomás dice que para el resultado de solo 3 cajas vencidas y 17 buenas hay 6840 casos. ¿Cómo llegó a ese resultado?  
R: \_\_\_\_\_

- 3** Un seguro médico elige al azar a 6 de sus clientes y registra si lo utilizaron o no durante el último mes.

- a. Con la variable aleatoria  $X$ , definida como el número de clientes que utilizaron el seguro, completa la siguiente tabla.

X							
Nº de casos							

- b. ¿Cuántos son los casos correspondientes a  $0 \leq X \leq 3$ ?  
R: \_\_\_\_\_

- 4** Analiza la siguiente situación. Luego, realiza las actividades y compara tus respuestas con tus compañeros.

En una estación hay 6 pasajeros que están esperando un tren que tiene igual número de vagones.

- a. Define una variable aleatoria  $X$  relacionada con la situación dada.  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Qué valores puede tomar la variable aleatoria definida antes?  
R: \_\_\_\_\_

- 5** La tabla muestra dos características de los 40 estudiantes de un curso.

	Hombres	Mujeres
Usan anteojos	6	4
No usan anteojos	12	18

Define dos variables aleatorias relacionadas con la situación dada.

- X: \_\_\_\_\_  
Y: \_\_\_\_\_

## → Tema 2 ¿Cuál es la probabilidad de una variable aleatoria?

### Practico

**1** Analiza cada afirmación. Luego, escribe V o F según corresponda. Corrige cuando sea necesario.

a. (\_\_\_\_) El valor de la suma asociada a las probabilidades de una variable aleatoria siempre es 1.

\_\_\_\_\_

b. (\_\_\_\_) El valor de una variable aleatoria no puede ser cero.

\_\_\_\_\_

c. (\_\_\_\_) Si una variable aleatoria  $X$  tiene como recorrido  $\{1, 2, 3, 4\}$ , el valor que toma  $X = 0$  es 0.

\_\_\_\_\_

d. (\_\_\_\_) La probabilidad de un solo valor de la variable aleatoria puede ser 1.

\_\_\_\_\_

**2** Analiza cada tabla. Luego, encuentra el valor de  $a$  y crea una situación que pueda ser representada por esos valores.

a.

$x_i$	0	1
$P(X = x_i)$	0,5	$a$

Situación: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

b.

$x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,4	$2a$	$a$

Situación: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

c.

$x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	$3a$	$a : 2$	0,3

Situación: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

d.

$x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$2 + 3a$	$2a - 1,5$	0,3

Situación: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**3** Analiza el enunciado. Luego, responde.

Un estudio sobre enfermedades genéticas registra en algunas familias el número hijos que tienen enfermedades hereditarias. La tabla muestra las probabilidades de cada caso.

Variable  $X$ : Número de hijos con alguna enfermedad hereditaria.

$x_i$	0	1	2	3 o más
$P(X = x_i)$	0,4	0,25	0,2	0,15

a. Identifica el recorrido de la variable.

R: \_\_\_\_\_

b. ¿Qué valor tiene la variable si la probabilidad es 0,25?

R: \_\_\_\_\_

c. ¿Cuál es la probabilidad de que en una familia haya un hijo con alguna enfermedad hereditaria?

R: \_\_\_\_\_

d. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia haya tenido más de un hijo con alguna enfermedad hereditaria?

R: \_\_\_\_\_

e. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia haya tenido al menos dos hijos con alguna enfermedad hereditaria?

R: \_\_\_\_\_

f. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia haya tenido a lo más un hijo con alguna enfermedad hereditaria?

R: \_\_\_\_\_

**4** Determina y explica el error que aparece en la siguiente tabla.

$x_i$	0	1	2	3 o más
$P(X = x_i)$	0,4	0,5	0,3	0,15

R: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



**Me desafío**

**1** Jazmín le propone a Fernando lanzar una moneda tres veces consecutivas. Si el resultado es cara, se le asignará el valor 1; de lo contrario se le asignará el valor 2. El experimento lo realizarán por separado y compararán el total de puntos obtenidos por cada uno.

a. Define la variable aleatoria involucrada.

R: \_\_\_\_\_

b. Determina el recorrido de la variable.

R: \_\_\_\_\_

c. Completa la tabla de probabilidades asociadas al recorrido de la variable aleatoria.

$x_i$				
$P(X = x_i)$				

d. Jazmín afirma que la probabilidad de obtener un total de 6 puntos es menor que la probabilidad de obtener solo 3 puntos. ¿Estás de acuerdo con la afirmación? Justifica.

R: \_\_\_\_\_

**2** Benjamín realiza dos experimentos diferentes y obtiene los siguientes resultados.

Experimento 1:

$x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	a	-b	0,7

Experimento 2:

$y_i$	1	2	3
$P(Y = y_i)$	2a	-b	0,3

a. Obtén los valores de a y b.

a = \_\_\_\_\_

b = \_\_\_\_\_

b. ¿Cuál es la probabilidad de que  $X = 2$ ?

R: \_\_\_\_\_

c. ¿Cuál es la probabilidad de que  $Y = 2$ ?

R: \_\_\_\_\_

d. ¿Cuál es la probabilidad de que  $X < 3$ ?

R: \_\_\_\_\_

**3** Dadas las variables aleatorias completa las tablas.

a. X: Número de caras obtenidas después del lanzamiento de 2 monedas.

Recorrido: \_\_\_\_\_

$x_i$			
$P(X = x_i)$			

b. X: Número de cartas rojas obtenidas tras sacar dos cartas sin reposición de un naipe inglés.

Recorrido: \_\_\_\_\_

$x_i$			
$P(X = x_i)$			

c. X: Número de cartas negras obtenidas tras sacar dos cartas con reposición de un naipe inglés.

Recorrido: \_\_\_\_\_

$x_i$			
$P(X = x_i)$			

d. X: Número de bolitas rojas obtenidas de dos extracciones consecutivas, sin reposición, de una caja que contiene tres bolitas rojas, dos azules y una blanca.

Recorrido: \_\_\_\_\_

$x_i$			
$P(X = x_i)$			

e. Considera la variable anterior pero reponiendo las bolitas después de cada extracción.

Recorrido: \_\_\_\_\_

$x_i$			
$P(X = x_i)$			

f. X: Número de veces que se extrae un número primo de una tómbola con bolitas marcadas con dígitos del 0 al 9. Considere que se hicieron tres extracciones con reposición.

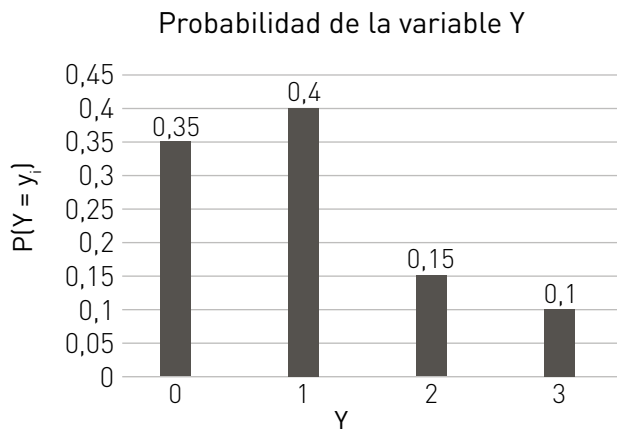
Recorrido: \_\_\_\_\_

$x_i$			
$P(X = x_i)$			

➔ Tema 3 ¿Cómo se grafica la distribución de una variable aleatoria?

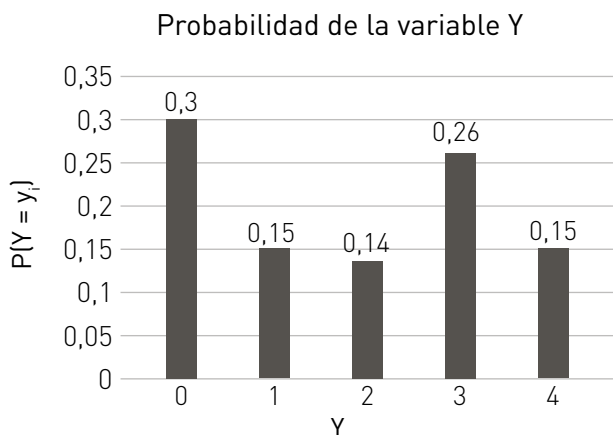
Practico

1 Analiza el gráfico. Luego, completa la tabla.



$y_i$				
$P\{Y = y_i\}$				

2 Analiza el gráfico. Luego, realiza las actividades propuestas.



a. Completa la siguiente tabla.

$y_i$				
$P\{Y = y_i\}$				

b. Escribe el recorrido de la variable.

Recorrido: \_\_\_\_\_

c. ¿Para qué valor de X se tiene la mayor probabilidad?

R: \_\_\_\_\_

d. ¿Para qué valor de X se tiene la menor probabilidad?

R: \_\_\_\_\_

e. ¿Cuál es la probabilidad de  $X = 2$ ?

R: \_\_\_\_\_

f. ¿Cuál es la probabilidad de  $X > 2$ ?

R: \_\_\_\_\_

g. ¿Cuál es la probabilidad de  $X < 3$ ?

R: \_\_\_\_\_

3 Elabora un gráfico que represente las probabilidades asociadas a la variable.

$z_i$	0	1	2	3
$P\{Z = z_i\}$	0,35	0,2	0,3	0,15

4 Elabora una tabla y un gráfico de las siguientes situaciones.

a. Número de caras obtenidas tras lanzar una moneda tres veces.

b. Número de veces que se obtiene una carta de pinta roja tras la extracción de dos cartas sin reposición de un naipe inglés.

- 5** Completa la tabla y representa en un gráfico la distribución de la variable aleatoria propuesta. Luego, marca V si la afirmación es verdadera o F si es falsa. Justifica tu decisión.

Experimento: Se escogen cajas con seis unidades de bebidas.

X: Cantidad de bebidas mal etiquetadas por caja.

$x_i$							
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

- a. El recorrido de la variable es.

$$\left\{ 0, \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12} \right\}$$

(\_\_\_\_) ¿Por qué?

R: \_\_\_\_\_

- b.  $P(X > 6) = 1$

(\_\_\_\_) ¿Por qué?

R: \_\_\_\_\_

- c.  $P(X = 0) = 6$

(\_\_\_\_) ¿Por qué?

R: \_\_\_\_\_

- d. Si  $X = 5$ , su probabilidad asociada es 0,25.

(\_\_\_\_) ¿Por qué?

R: \_\_\_\_\_

- e. La probabilidad de encontrar una caja con tres o cuatro botellas mal etiquetadas es de 0,416 aproximadamente.

(\_\_\_\_) ¿Por qué?

R: \_\_\_\_\_

- f. La probabilidad de encontrar una caja con dos botellas mal etiquetadas es menor que la probabilidad de encontrar una caja con cinco botellas mal etiquetadas.

(\_\_\_\_) ¿Por qué?

R: \_\_\_\_\_

### Me desafío

- 1** Una empresa en la que hay cuatro computadores por oficina está interesada en hallar aquellas máquinas cuya licencia de antivirus se encuentre expirada.

Se sabe que:

- La probabilidad de que una oficina tenga todos los computadores sin antivirus es la misma probabilidad de que todos aún la tengan activa.
- La probabilidad de que se encuentre una oficina que tenga expirada la licencia en uno, dos o tres computadores es 0,6 y cada una por separado tiene la misma probabilidad de no tener antivirus.

- a. Define la variable aleatoria involucrada.

X: \_\_\_\_\_

- b. Determina el recorrido de la variable.

R: \_\_\_\_\_

- c. Completa la tabla.

$x_i$					
$P(X = x_i)$					

- d. ¿Cuál es la probabilidad asociada a  $X = 0$ ?

R: \_\_\_\_\_

- e. Explica la expresión  $P(X = 3) = 0,2$ .

R: \_\_\_\_\_

- f. ¿Cuál es la probabilidad de escoger una oficina con tres computadores sin licencia de antivirus?

R: \_\_\_\_\_

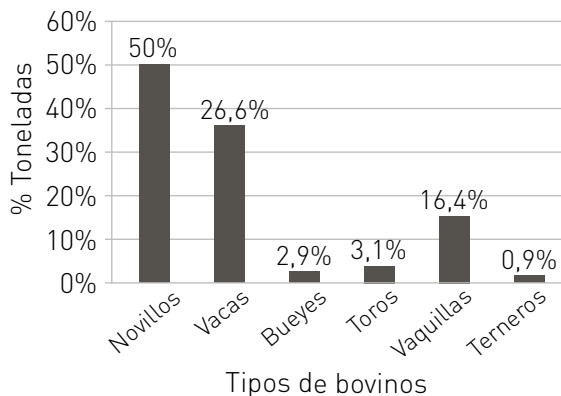
- g. ¿Cuál es la probabilidad de que una oficina tenga a lo más un computador sin antivirus?

R: \_\_\_\_\_

- h. Con la tabla elabora un gráfico que represente la variable aleatoria planteada.

- 2 Analiza cada afirmación relativa al gráfico. Luego, escribe V o F según corresponda.

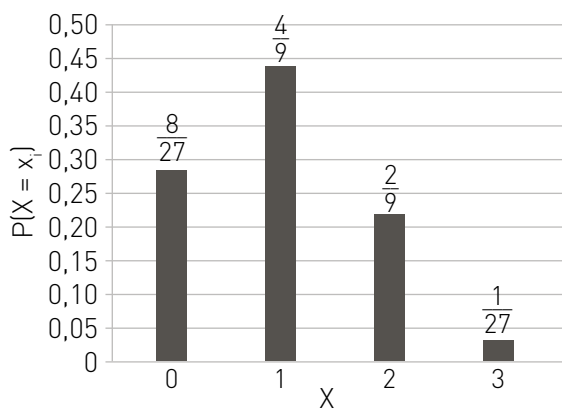
Producción nacional de carne en varas de ganado bovino año 2009



- a. ( ) La probabilidad de producir carne proveniente de la categoría novillos es la más alta.
- b. ( ) La probabilidad de que la producción provenga de la categoría vaquillas es aproximadamente 0,16.
- c. ( ) Las categorías bueyes y toros equivalen al 10 % de la producción.

- 3 Marca la variable que fue representada en el siguiente gráfico.

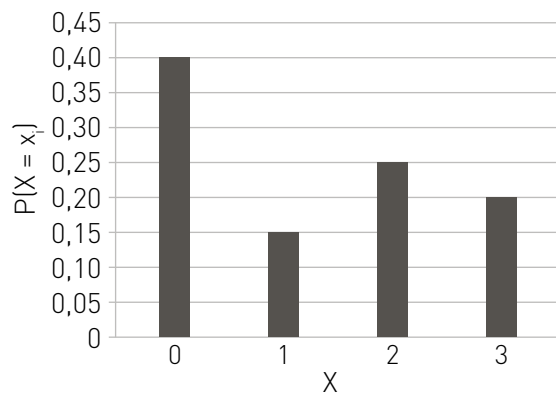
Probabilidad variable aleatoria X



- d. ( ) Cantidad de "1" que contiene un número de 3 cifras formado con los dígitos 1, 2 y 3 con repetición.
- e. ( ) Cantidad de bolitas extraídas hasta obtener una numerada con un "1" de una urna con 3 bolitas numeradas con 1, 2 y 3 con reposición.

- 4 Escribe 5 conclusiones correctas que se desprendan del siguiente gráfico.

Probabilidad variable aleatoria X



- a. \_\_\_\_\_
- b. \_\_\_\_\_
- c. \_\_\_\_\_
- d. \_\_\_\_\_
- e. \_\_\_\_\_

- 5 Construye un gráfico y escribe 5 conclusiones correctas que se desprendan de él.

$x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	0,30	10%	0,4



- a. ¿Cuál es la probabilidad cuando  $X < 2$ ?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la probabilidad cuando  $X > 2$ ?  
R: \_\_\_\_\_
- c. Matías dijo que para calcular la respuesta de b. podía restar de 1 la respuesta de a. ¿Por qué Matías está equivocado?  
R: \_\_\_\_\_
- d. ¿Qué valor se debe asignar a  $x_i$  si se sabe que  $P(X \leq x_i) = 0,5$ ?  
R: \_\_\_\_\_



En el Texto hiciste el gráfico de una distribución de probabilidad utilizando una hoja de cálculo. Pero qué otras posibilidades nos ofrece ese programa, en este taller partirás de lo que aprendiste en el Texto e investigarás en las opciones de gráfico del programa.

En una feria hay un puesto que tiene 3 ruletas, una es roja, otra verde y la última azul. Cada una está dividida en 15 partes iguales, algunas con un número 1, otras con un número 2, 3 o 4. La siguiente tabla muestra las probabilidades de que salga cada número en cada una de las ruletas.

Ruleta	1	2	3	4
Roja	0,25	0,3	0,15	0,3
Verde	35 %	40 %	10 %	15 %
Azul	0,25	0,25	0,25	0,25

1 Definan una variable aleatoria para cada ruleta.

X: \_\_\_\_\_

Y: \_\_\_\_\_

Z: \_\_\_\_\_

2 Completen una tabla para cada variable definida en 1.

$X = x_i$				
$P(X = x_i)$				

$Y = y_i$				
$P(Y = y_i)$				

$Z = z_i$				
$P(Z = z_i)$				

3 Siguiendo los pasos indicados en el texto, grafiquen cada una de las distribuciones.

- 4 Se quiere que las barras de cada gráfico coincidan con el color de la ruleta.

¿Qué deben hacer para cambiar el color?

R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

- 5 Investiga cómo puedes cambiar los gráficos de barras a un gráfico de puntos.

¿Cuál tipo te resulta más adecuado para la información que muestran?

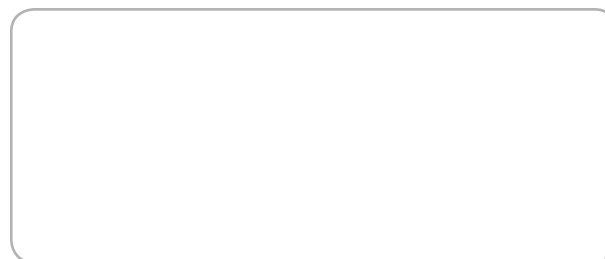
R: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

- 6 Haz una tabla resumen de las tres variables y sus respectivas probabilidades.

Ruleta	P(1)	P(2)	P(3)	P(4)
X				
Y				
Z				

- 7 Con la tabla anterior haz un solo gráfico de barras que muestre las tres variables y explica cómo lo hiciste.

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_



- 8 A continuación encontrarás varias preguntas, responde cada una de ella y además indica cuál gráfico (de los cuatro que hiciste) es el más adecuado para encontrar la respuesta a cada una de las preguntas.

- a. Si una persona quiere apostar al número 4, ¿qué ruleta debe escoger?

R: \_\_\_\_\_

Gráfico: \_\_\_\_\_

- b. ¿Qué ruleta debe escoger si apuesta al número 2?

R: \_\_\_\_\_

Gráfico: \_\_\_\_\_

- c. Si escogió la ruleta 2, ¿qué número le conviene escoger?

R: \_\_\_\_\_

Gráfico: \_\_\_\_\_

- d. ¿Tiene alguna ventaja escoger la ruleta 3 sobre las otras ruletas?

R: \_\_\_\_\_

Gráfico: \_\_\_\_\_

Reforzamiento

Según tus resultados en la evaluación de la lección, repasa los temas que consideres necesarios.

Recuerda que para un experimento aleatorio se pueden definir diferentes variables. Una vez definida esta se puede determinar su recorrido.

Una vez que se tiene el recorrido de una variable aleatoria se puede calcular la probabilidad correspondiente a cada valor.

Las variables aleatorias se pueden representar tanto en una tabla como en un gráfico de barras.

- 1 Determina una posible variable del siguiente experimento y su respectivo recorrido.

Experimento: Lanzar dos dados y restar sus resultados.

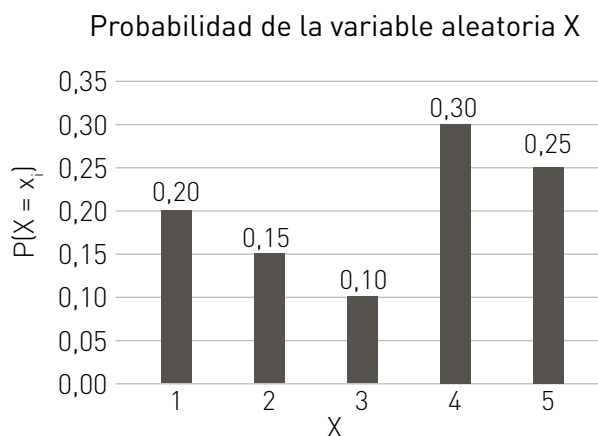
- a. Variable X: \_\_\_\_\_  
 Recorrido de X: \_\_\_\_\_

- 2 La variable aleatoria X está definida como la cantidad de cuadernos que llevan estudiantes de segundo medio en su mochila los días miércoles en un determinado establecimiento.

$x_i$	0	1	2	3	4 o más
$P(X = x_i)$	0,05	0,1	0,5	0,3	0,05

- a. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a un estudiante sin cuaderno?  
 R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar alumnos que lleven más de dos cuadernos?  
 R: \_\_\_\_\_

- 3 Identifica el error en cada afirmación con respecto al gráfico. Luego, corrígelo.



- a. \_\_\_\_\_  $P(X = 4) \leq P(X = 3)$   
 Error: \_\_\_\_\_  
 Corrección: \_\_\_\_\_
- b. \_\_\_\_\_  $P(X = 0,3) = 4$   
 Error: \_\_\_\_\_  
 Corrección: \_\_\_\_\_
- c. \_\_\_\_\_ El recorrido de la variable aleatoria es  $\{0,2; 0,15; 0,1; 0,3; 0,25\}$   
 Error: \_\_\_\_\_  
 Corrección: \_\_\_\_\_

## Profundización

- 1 Analiza el siguiente experimento. Luego, responde.

Jorge se hace un test para saber si tiene hipertensión. El test es muy efectivo y tiene dos posibles resultados: positivo o negativo. Se sabe que una persona con características similares a Jorge tiene una probabilidad de 0,8 de que el resultado salga negativo.

- a. Define la variable aleatoria involucrada.

R: \_\_\_\_\_

- b. Determina el recorrido de la variable.

R: \_\_\_\_\_

- c. Elabora una tabla que represente las probabilidades asociadas a la variable aleatoria.

--

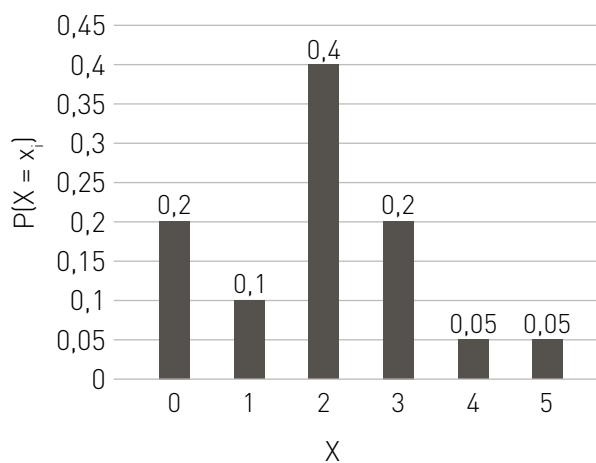
Ahora, imagínate que también existe una tercera probabilidad asociada al error del test de un 1%, quedando la probabilidad de que salga positivo en 19%.

- d. Elabora una tabla que incluya dicha probabilidad dentro de la variable.

--

- 2 Analiza el gráfico. Luego, realiza las actividades.

Probabilidad de la variable aleatoria X



- a. Determine el recorrido de la variable aleatoria.

R: \_\_\_\_\_

- b. ¿Cuál es la probabilidad asociada al valor  $X = 0$ ?

R: \_\_\_\_\_

- c. ¿Cuál es la probabilidad asociada a  $X > 3$ ?

R: \_\_\_\_\_

- d. ¿Puede la variable aleatoria tomar el valor 6? Justifique.

R: \_\_\_\_\_

- e. Completa la tabla.

$x_i$						
$P(X = x_i)$						



# 11

## Probabilidades

Repasa algunos contenidos que utilizarás durante esta lección.

**1** Analiza cada situación y marca M si corresponde a un principio multiplicativo o A si corresponde a un principio aditivo. Luego, resuelve.

a. \_\_\_\_\_ En una pizzería se disponen de tres tipos de carnes y cuatro tipos de vegetales. ¿De cuántas formas se puede pedir una pizza si estas llevan un ingrediente de cada tipo?

R: \_\_\_\_\_

b. \_\_\_\_\_ ¿De cuántas formas se puede abrigar los pies una persona si cuenta con tres pares de zapatillas y dos pares de botas?

R: \_\_\_\_\_

c. \_\_\_\_\_ Una tienda de ropa tiene una oferta de "2x1" para los clientes que compren un sombrero y un accesorio. ¿De cuántas formas se puede hacer uso de la oferta si la tienda dispone de cinco tipos de sombreros y seis de accesorios?

R: \_\_\_\_\_

d. \_\_\_\_\_ ¿De cuántas formas se puede sacar una bolita de una urna en la que hay dos bolitas rojas y tres azules?

R: \_\_\_\_\_

Para poder enfrentar diversos problemas que vinculan las probabilidades con fenómenos reales, debes tener clara la diferencia entre principio multiplicativo y principio aditivo.

**2** Calcula el valor de las siguientes combinatorias.

a.  $P(4) =$  \_\_\_\_\_

d.  $V(5, 4) =$  \_\_\_\_\_

b.  $P(6) =$  \_\_\_\_\_

e.  $C(5, 2) =$  \_\_\_\_\_

c.  $V(12, 8) =$  \_\_\_\_\_

f.  $C(10, 7) =$  \_\_\_\_\_

**3** En su refrigerador, Mónica guarda manzanas, peras, plátanos, duraznos, piña y frutillas. Si con tres tipos de fruta ella puede hacer un postre, ¿de cuántas formas puede elegir los ingredientes?

R: \_\_\_\_\_

**4** En un torneo de ajedrez participan 30 concursantes. ¿Cuántas parejas se pueden formar para la primera etapa?

R: \_\_\_\_\_

**5** Pedro desea regalarle dos libros a Sara para su cumpleaños. Si cuenta con una lista de 10 libros que saben que son del gusto de Sara, ¿de cuántas formas puede hacer Pedro su regalo?

R: \_\_\_\_\_

**6** Un electricista debe unir 5 conexiones a 5 terminales. Si lo hiciera al azar, ¿de cuántas maneras podría realizarlo?

R: \_\_\_\_\_

Las permutaciones, variaciones y combinaciones son herramientas de conteo que te permitirán calcular los posibles resultados de un evento para determinar su probabilidad.

## → Tema 1 ¿Cómo se aborda la probabilidad en los medios de comunicación?

### Practico

- 1** El consumo de alcohol en adolescentes es un hábito preocupante y alarmante en nuestro país. Un estudio del *Servicio Nacional para la Prevención y Rehabilitación del Consumo de Drogas y Alcohol* muestra la proporción de adolescentes, de octavo básico a cuarto medio, que iniciaron un precoz consumo de alcohol (antes de los 15 años), clasificado según año y sexo.

Evolución de la precocidad y edad de inicio del consumo de alcohol, según sexo.			
Serie	Total	Hombre	Mujer
2001	67,4 %	67,4 %	67,4 %
2003	70,5 %	71,0 %	70,1 %
2005	69,1 %	68,9 %	69,3 %
2007	68,5 %	68,4 %	68,5 %
2009	68,3 %	68,2 %	68,3 %
2011	66,2 %	66,7 %	66,1 %
2013	65,4 %	66,1 %	64,8 %
2015	65,9 %	65,5 %	64,3 %

(SENDA, Chile: Décimo Primer Estudio Nacional de Drogas en Población Escolar de Chile, 2015)

<http://www.senda.gob.cl/wp-content/uploads/2015/07/Informe-Ejecutivo-ENPG-2014.pdf>

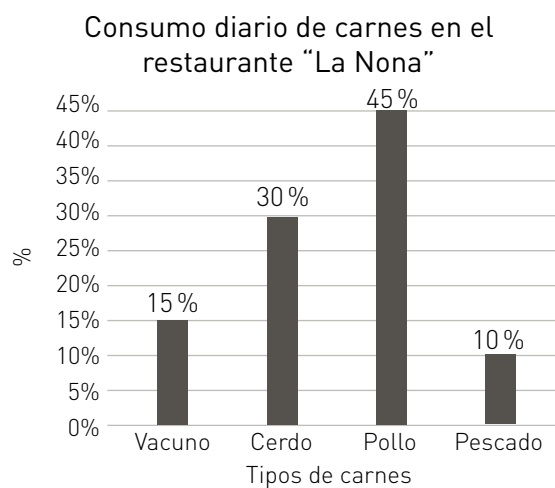
- a. ¿En qué año hubo la misma cantidad de hombres y mujeres que consumieron alcohol precozmente?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que en el 2015 una mujer ya se haya iniciado el consumo de alcohol?  
R: \_\_\_\_\_
- c. ¿En qué año existió la mayor probabilidad de encontrar estudiantes que habían consumido alcohol por primera vez antes de los 15 años?  
R: \_\_\_\_\_

- d. ¿Cuál era la probabilidad, el año 2003, de encontrar un hombre que ya había consumido alcohol antes de los 15 años?

R: \_\_\_\_\_

- 2** Analiza las afirmaciones con respecto al gráfico propuesto. Luego, marca V o F según corresponda.

El restaurante "La Nona" está interesado en conocer los niveles de consumo de las carnes en su local para definir las próximas promociones.



- a. \_\_\_\_\_ La probabilidad de que una persona consuma cerdo en el restaurante es la más alta.
- b. \_\_\_\_\_ El 40% del consumo de carnes en el restaurante es Cerdo o Pescado.
- c. \_\_\_\_\_ La probabilidad de que una persona consuma vacuno en el restaurante es de 0,15.
- d. \_\_\_\_\_ El pescado es la carne menos consumida en el restaurante.
- e. \_\_\_\_\_ La probabilidad de que una persona consuma cerdo o vacuno es la misma de que consuma pollo.

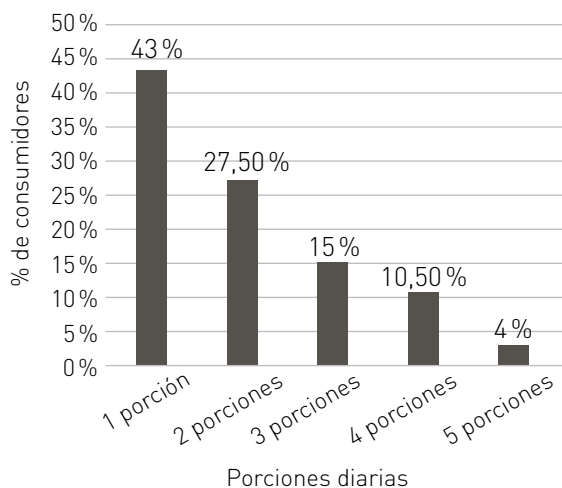
**Me desafío**

**1** La diabetes se ha convertido en una enfermedad que genera gran preocupación en Chile, puesto que el 10% de la población la padece. La prevalencia de dicha enfermedad se ha visto favorecida por los altos índices de sedentarismo (cerca del 89%), por el aumento del sobrepeso (que alcanza el 67% de la población) y por el incremento de la obesidad infantil (uno de cuatro niños hoy tiene obesidad). (Ministerio de Salud, 2015).

- a. ¿Qué causas pueden favorecer la prevalencia de la diabetes en Chile?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que un niño o niña padezca obesidad infantil?  
R: \_\_\_\_\_
- c. ¿Cuál de las dos causas de la diabetes tiene más posibilidades de estar presente en la población chilena?  
R: \_\_\_\_\_

**2** Una organización dedicada a la vida saludable ha hecho un estudio sobre el consumo recomendado de frutas. A continuación, se presentan los porcentajes de personas de una comuna que consumen hasta cinco porciones diarias de fruta.

Porcentaje de personas que hasta 5 porciones diarias de frutas en una Comuna



- a. ¿Puedes sacar alguna conclusión observando a primera vista el gráfico?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que en esa comuna una persona consuma 4 o 5 porciones de frutas?  
R: \_\_\_\_\_

**3** A continuación, se presenta una tabla que muestra la concentración de hombres y mujeres en distintas ramas de actividades remuneradas. Analiza y responde.

Concentración de personas ocupadas, por sexo, según rama de actividad económica.		
Rama de actividad	Concentración	
	Hombre	Mujer
Industrias manufactureras	9%	12,4%
Comercio	22,2%	17,6%
Actividades de alojamiento	5,6%	2,7%
Administración pública	5,6%	5,9%
Enseñanza	14,6%	4,4%
Actividades de atención de salud	8,5%	2,5%
Actividades de los hogares	12%	1,6%
Otras ramas	22,4%	52,8%

(INE, Chile: Género e Ingresos, 2015)  
[http://www.ine.cl/genero/files/estadisticas/pdf/documentos/161228\\_enfoque\\_de\\_genero\\_e\\_ingresos\\_2016.pdf](http://www.ine.cl/genero/files/estadisticas/pdf/documentos/161228_enfoque_de_genero_e_ingresos_2016.pdf)

- a. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar mujeres en una actividad relacionada con el comercio?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre realice alguna actividad de enseñanza?  
R: \_\_\_\_\_

## → Tema 2 ¿Cómo se aplica la probabilidad en la toma de decisiones?

### Practico

- 1 La siguiente tabla muestra la probabilidad de ganancia según el tipo de fondo que en dos empresas de inversiones.

	Básico	Premium	Plus
Empresa A	8,5 %	9,3 %	14,6 %
Empresa B	8,8 %	9,1 %	14,9 %

- a. ¿En qué empresa es más conveniente invertir? Justifica tu respuesta.

R: \_\_\_\_\_

- b. Si un cliente desea invertir en un fondo premium, ¿qué empresa le conviene?

R: \_\_\_\_\_

- c. Si tú fueras un cliente, ¿qué empresa y tipo de fondo escogerías?

R: \_\_\_\_\_

- 2 Una empresa diseñadora de máquinas de azar le vende a un casino dos tipos de máquinas:

- En la máquina A la probabilidad de ganar el premio mayor es cercana al 3,5% y la de perder es cercana al 95,5%.
- En la máquina B se tiene una probabilidad de un 4,3% de ganar el premio mayor y 95,2% de perder.

- a. ¿En qué máquina te conviene jugar si quieres ganar el premio grande?

R: \_\_\_\_\_

- b. ¿En cuál máquina te conviene jugar si sólo te interesa ganar algún premio?

R: \_\_\_\_\_

- 3 La tabla muestra las probabilidades de ganancia y pérdida de 5 fondos de inversión distintos de un banco.

Fondo	A	B	C	D	E
% ganancia	15 %	20 %	12 %	18 %	25 %
% pérdida	45 %	50 %	28 %	32 %	45 %

- a. Entre el fondo A y el E, ¿cuál le conviene a un inversionista?

R: \_\_\_\_\_

- b. Si el interés de aquel es mantener su dinero, ¿en qué fondo le conviene invertir?

R: \_\_\_\_\_

- c. ¿Qué fondo debe escoger si quiere asumir el menor riesgo de pérdida?

R: \_\_\_\_\_

- d. Si decide asumir el riesgo de pérdida, ¿qué fondo conviene más?

R: \_\_\_\_\_

- e. Si solo puede escoger entre los fondos B y D, ¿cuál es más conveniente?

R: \_\_\_\_\_

- 4 En la final de un concurso de magos hay tres finalistas empatados. Para decidir quién debe ser el ganador, cada uno tendrá un mazo de treinta cartas con diferentes colores y una persona del público deberá escoger una carta de cada mazo. Si esta es azul, el mago correspondiente es el ganador.

Las probabilidades de obtener cada color se presentan en la siguiente tabla.

Mago	Rojo	Amarillo	Azul	Verde
A	0,25	0,35	0,15	0,25
B	0,1	0,4	0,25	0,25
C	0,3	0,2	0,3	0,2

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que solo el mago A gane la prueba?

R: \_\_\_\_\_

- b. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres obtengan el mismo color?

R: \_\_\_\_\_

- c. Si fueras juez del concurso, ¿qué color escogerías para que fuese más justa la elección del ganador?

R: \_\_\_\_\_

- d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una carta roja o amarilla del mago B?

R: \_\_\_\_\_

**Me desafío**

- 1** Una empresa de cámaras de seguridad tiene a la venta dos tipos de máquinas.
- La cámara A tiene una pequeña pérdida de calidad de imagen a la luz, cercana al 3,2%, sin embargo, la precisión de la cámara es de un 90,4%.
  - La cámara B pierde un 2,8% en su calidad de imagen a la luz y tiene una precisión de 89,9%.
- a. La administración de un edificio desea comprar una docena de cámaras y les interesa su precisión. ¿Cuál de los dos modelos les recomendarías?  
R: \_\_\_\_\_
- b. Si a los dueños de una tienda les interesa obtener de la cámara una mejor imagen a la luz del día, ¿cuál les recomendarías?  
R: \_\_\_\_\_
- 2** Un reponedor de un supermercado embaló mal 5 cajas, mezclando tarros de duraznos vencidos con los que no lo estaban. La siguiente tabla muestra el número de tarros vencidos por caja.

N° de caja	I	II	III	IV	V
N° tarros por caja	12	15	13	11	12
N° de tarros vencidos por caja	1	4	5	4	5

- a. Si están realizando un control de calidad en el mismo supermercado, ¿cuál de las cajas se debería escoger para que sea menos grave el error del reponedor? Justifica.  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la caja que se debería escoger para decir que fue un grave error el cometido por el reponedor?  
R: \_\_\_\_\_
- c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un tarro vencido en la quinta caja?  
R: \_\_\_\_\_
- d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un tarro vencido en la segunda o tercera caja?  
R: \_\_\_\_\_

- 3** Un grupo de amigos se extravía en un camino durante la noche. En el GPS advierten que hay dos rutas para llegar hasta su destino. Además, este les entrega una información útil: la ruta A tiene un proporción del camino, cercana al 32,6%, en mal estado y solo en un 45,3% de este hay luz; la ruta B tiene en mal estado el 40,7% del camino, pero tiene iluminado el 62,9% de este.
- a. Si al dueño del auto le interesa cuidar su auto y no exponerlo a algún daño, ¿cuál ruta deberías escoger?  
R: \_\_\_\_\_
- b. Si el conductor se percata de que se ha dañado un foco del auto. ¿Cuál ruta le conviene utilizar?  
R: \_\_\_\_\_
- c. ¿Cuál de las dos rutas escogerías tú? Justifica tu respuesta.  
R: \_\_\_\_\_

- 4** Un terminal cuenta con tres líneas de buses que a la misma hora parten su recorrido hacia el mismo destino. Cada una de ellas cuenta con buses con diferentes características. La siguiente tabla muestra las probabilidades de encontrarse un bus con alguna de ellas.

	Línea de Buses		
	A	B	C
Música	0,2	0,52	0,15
Televisión	0,72	0,1	0,8
Asientos premium	0,3	0,45	0,35

- a. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un bus con música de la línea B?  
R: \_\_\_\_\_
- b. Si a un pasajero le interesa irse en un asiento premium, ¿cuál de las tres líneas le recomendarías utilizar?  
R: \_\_\_\_\_
- c. Si un pasajero prefiere la línea de buses C, ¿cuál es la probabilidad de que acceda a un bus con asiento Premium?  
R: \_\_\_\_\_

## → Tema 3 ¿Cómo puede interpretarse la probabilidad?

### Practico

- 1 Identifica en cada situación el tipo de probabilidad involucrada (subjettiva, frecuencial o clásica). Justifica.
  - a. La probabilidad de obtener una nota mayor que 6,0 en una prueba para la que no estudié es de un 5%.  
R: \_\_\_\_\_
  - b. La probabilidad de hacer un gol en el último minuto del partido es 0,01.  
R: \_\_\_\_\_
  - c. A partir de las cosechas de años anteriores, si llueve en noviembre, la probabilidad de tener pérdidas en la producción de frutillas es de un 10%.  
R: \_\_\_\_\_
  - d. Al lanzar un dado la probabilidad de obtener un número impar es 0,5.  
R: \_\_\_\_\_
  - e. El 31% de la contaminación ambiental que sufre una ciudad se debe a la calefacción a leña de las viviendas.  
R: \_\_\_\_\_
- 2 Analiza cada una de las afirmaciones propuestas. Luego, marca V o F según corresponda. Justifica tu respuesta.
  - a. La interpretación probabilística subjettiva se basa en la frecuencia de ocurrencia de un suceso.  
(\_\_\_\_) ¿Por qué? \_\_\_\_\_
  - b. Después de un estudio acabado sobre el cáncer, las probabilidades obtenidas resultan tener una interpretación frecuencial.  
(\_\_\_\_) ¿Por qué? \_\_\_\_\_
  - c. El lanzamiento de una moneda tiene asociada probabilidades con interpretaciones clásicas.  
(\_\_\_\_) ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- 3 Crea una situación para cada tipo de interpretación probabilística.
  - a. Interpretación probabilística clásica.  
R: \_\_\_\_\_
  - b. Interpretación probabilística frecuencial.  
R: \_\_\_\_\_
  - c. Interpretación probabilística subjettiva.  
R: \_\_\_\_\_
- 4 Una creencia popular en zonas rurales del país afirma que una noche muy calurosa puede anunciar un sismo de mediana o fuerte intensidad.
  - a. ¿Cómo crees que surgió esta afirmación?  
R: \_\_\_\_\_
  - b. ¿Crees que esta información es suficiente para afirmar la presencia de un sismo? Justifica.  
R: \_\_\_\_\_
  - c. ¿Qué tipo de interpretación probabilística está presente en la situación? Justifica.  
R: \_\_\_\_\_
- 5 Algunas personas de la tercera edad dicen que cuando les duele alguna extremidad del cuerpo, sin alguna causa aparente, es muy probable que llueva.
  - a. ¿Cómo crees que surgió esta afirmación?  
R: \_\_\_\_\_
  - b. ¿Qué tipo de interpretación probabilística está presente en la situación? Justifica.  
R: \_\_\_\_\_

## Me desafío

**1** Identifica el error en cada afirmación. Luego, corrígelo.

a. Si recurres al conocimiento de una persona para investigar sobre un fenómeno azaroso, se podría tratar de una interpretación probabilística clásica.

Error: \_\_\_\_\_

Corrección: \_\_\_\_\_

b. La principal diferencia entre la interpretación probabilística clásica y la frecuentista es que una es subjetiva y la otra se centra en la regla de Laplace.

Error: \_\_\_\_\_

Corrección: \_\_\_\_\_

c. Se puede afirmar que el conteo de ocurrencias de un evento específico está asociado a la interpretación probabilística subjetiva.

Error: \_\_\_\_\_

Corrección: \_\_\_\_\_

d. Si la variable de estudio de un experimento es "Número de hijos con enfermedades crónicas", es conveniente dar a los resultados una interpretación probabilística clásica.

Error: \_\_\_\_\_

Corrección: \_\_\_\_\_

**2** Completa la siguiente tabla destacando las diferencias y las similitudes de la interpretación subjetiva con respecto a las otras interpretaciones probabilísticas.

	Diferencias	Similitudes
Clásica		
Frecuentista		

¿Existe alguna diferencia o similitud entre la interpretación clásica y la frecuentista?

R: \_\_\_\_\_

**3** Crea dos situaciones que involucren alguna de las interpretaciones probabilísticas. Luego, justifica por qué cumple cada una las condiciones para ser una de ellas.

a. R: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Justificación: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

b. R: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Justificación: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**4** Hernán ha decidido realizar un estudio sobre el cambio climático por el que está atravesando nuestro planeta. En una primera instancia decidió recurrir a su profesor de Ciencias, quien le afirmó que el cambio climático se debía a los altos índices de contaminación. No satisfecho con la respuesta, decidió investigar sobre algunos estudios que le entregaran información sobre el tema. Tras varias horas de investigación encontró un estudio que revelaba una interpretación probabilística frecuencial.

a. ¿Qué tipo de interpretación probabilística entregó el profesor de Hernán?

R: \_\_\_\_\_

b. ¿Qué característica debió haber cumplido el estudio que encontró Hernán para que fuera considerado una interpretación probabilística frecuencial?

R: \_\_\_\_\_

c. Investiga y describe un estudio sobre el cambio climático en el que se entreguen probabilidades asociadas a una interpretación como la que Hernán encontró.

R: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Taller de habilidades

## Resolver problemas

- 1 En cada unidad del Texto se ha realizado un taller de tres de las cuatro habilidades matemáticas. Entrega, con tus palabras una descripción de cada una de ellas.

Unidad 1  
Modelar



Unidad 2  
Argumentar y comunicar



Unidad 3  
Representar



- 2 ¿Qué significa para ti la habilidad de resolver problemas?

---



---



---



---

- 3 Cuando resuelves un problema, ¿utilizas solo la habilidad de resolución de problemas o recurres a otras? Justifica tu respuesta.

---



---



---



---

- 4 Resuelve el siguiente problema y explica cómo llegaste a la respuesta, paso a paso.

Un artesano vende 5 collares, de los cuales 2 tienen un defecto. Un turista compra dos collares al azar. Define la variable aleatoria asociada al número de collares defectuosos comprados, su función de probabilidad y determina la probabilidad de que haya comprado solo un collar defectuoso.

---



---



---



---



---



---



Reforzamiento

Según tus resultados en la evaluación de la lección, repasa los temas que consideres necesarios.

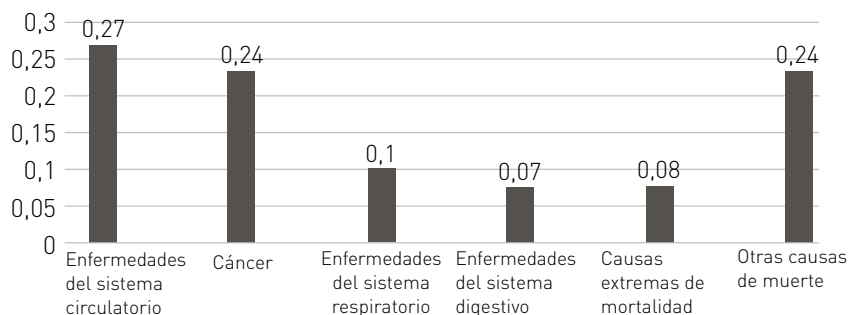
Es necesario que tengas la capacidad de interpretar de diferentes formas la información que te entregan los medios de comunicación.

No solo los medios de comunicación utilizan información asociada a las probabilidades. También es necesario que seas capaz de decidir a partir de datos que te respaldan.

- 1 Identifica el error en cada afirmación con respecto al gráfico. Luego, corrígelo.

A continuación se presenta un gráfico que hace referencia a un estudio realizado por el INE sobre las mayores causas de muerte entre 2011 y 2014 en Chile.

Mayores causas de muerte entre el 2011 y el 2014



- a. La probabilidad de que una persona, entre los años 2011 y 2015, haya muerto de cáncer es de un 2,4%.  
Error: \_\_\_\_\_  
Corrección: \_\_\_\_\_
- b. La enfermedad con menor probabilidad de muerte son las relacionadas con el sistema respiratorio.  
Error: \_\_\_\_\_  
Corrección: \_\_\_\_\_
- c. La probabilidad de que una persona haya muerto por causas externas o por otras causas es de un 0,0192.  
Error: \_\_\_\_\_  
Corrección: \_\_\_\_\_

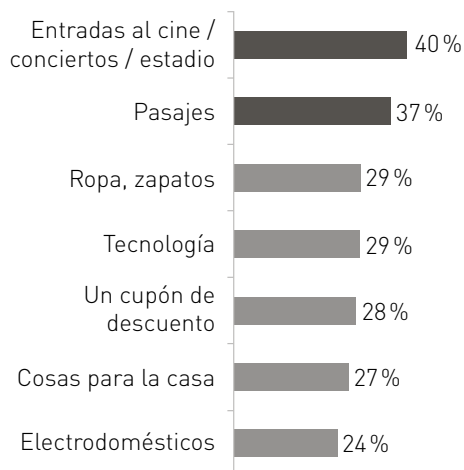
- 2 La siguiente tabla presenta dos aerolíneas y las probabilidades asociadas a algunas características como seguridad, mantención y comodidad durante el viaje.

	Seguridad	Mantención	Comodidad
Aerolínea A	0,78	67%	0,67
Aerolínea B	0,8	0,55	60%

- a. ¿Cuál de las aerolíneas escogerías si te interesa una mayor seguridad?  
R: \_\_\_\_\_
- b. Si no te interesa la mantención de la aerolínea, ¿cuál de las dos es más conveniente?  
R: \_\_\_\_\_

## Profundización

- 1 Un estudio de la empresa Gfk Adimark afirma que el 22% de los chilenos han comprado por Internet el año 2016. El siguiente gráfico revela las principales compras realizadas por chilenos por medio de Internet.



- a. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un chileno que haya comprado tecnología durante 2016?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que un chileno haya comprado electrodomésticos por internet el año 2016?  
R: \_\_\_\_\_
- c. ¿Cuál es la compra más recurrente por internet?  
R: \_\_\_\_\_
- d. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un chileno durante el año 2016 que haya comprado ese producto?  
R: \_\_\_\_\_
- 2 Para un concurso se dispone de 3 cajas, en cada una de las cuales hay 10 fichas marcadas con una estrella o con un círculo. Las reglas del juego indican que un participante deberá escoger un símbolo y luego seleccionar una de las cajas: si de ella obtiene una ficha marcada con el símbolo escogido, gana el premio mayor. A continuación, se muestran las probabilidades de obtener cualquiera de los dos símbolos según la caja.

	Caja 1	Caja 2	Caja 3
Estrellas	0,4	0,3	0,8
Círculos	0,6	0,7	0,2

- a. ¿Cuál de las cajas sería conveniente escoger si se seleccionó anteriormente el símbolo de estrella?  
R: \_\_\_\_\_
- b. Si se seleccionó la caja 1, ¿cuál de los dos símbolos hubiera sido necesario escoger para tener mayor probabilidad de obtener el premio mayor?  
R: \_\_\_\_\_

Reúnete con el mismo grupo con que realizaste la actividad del Texto y realicen las siguientes actividades.

El experimento que realizaron en el Texto tiene algunas variaciones, como las que se muestran a continuación.

El objetivo que deben ponerse es ser capaces de explicar la situación, por ejemplo, a un compañero o compañera que haya faltado a la clase y que saque conclusiones sin analizar toda la información involucrada en la situación.

- 1** En un hospital comparten una pieza tres pacientes: Ana, Belén y Carla. Ana escuchó conversar a las enfermeras que esa tarde una de ellas será dada de alta y podrá ir a casa.

Ana trata de convencer a la enfermera para que le diga quien se va, pero ella le responde que no puede, solo la doctora puede hacerlo. Finalmente la enfermera le dice "Belén no será dada de alta". Ana vuelve a su pieza muy contenta porque ahora su probabilidad de ser dada de alta es del 50%, ya que solo hay dos candidatos: Carla y ella.

¿Es correcta la reacción de Ana? Justifiquen su respuesta.

---



---

- 2** Juan tiene 3 panes, 2 de ellos tienen queso y uno tiene queso y jamón, sin mostrárselos le ofrece uno a Pedro, este escoge uno pero le dice a Juan que lo ayude porque realmente quiere el de jamón y queso. Juan escoge uno de los otros y le muestra que solo tiene queso y le pregunta si quiere cambiar su elección o la mantiene. ¿Qué debe hacer Pedro?

- a. ¿Qué debe hacer Pedro? Justifiquen su respuesta.

---



---

- b. Reproduzcan 15 veces el experimento con tarjetas, dos marcadas Q y una QJ y completen la tabla con los resultados propios y los de los otros grupos.

	Q	QJ	Total
Cambia			
No cambia			
Total			

- c. Comparen los resultados obtenidos en esta experiencia con la obtenida en la del Texto.

---



---

- 3** La próxima vez que escuchen o lean conclusiones sobre resultados que involucran probabilidades, ¿qué actitud tendrán?

---



---

Reúnete con tres compañeros o compañeras y repasen los temas de esta unidad. Luego, realicen las siguientes actividades.

### → Lección 10 - Tema 1 ¿Cuándo se aplica el principio multiplicativo?



Escriban la respuesta a la pregunta del título de este tema.

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**1** Si dispongo de 3 pares de guantes, 6 bufandas y 2 chaquetas, ¿de cuántas maneras me puedo abrigar?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**2** Si en una biblioteca hay 6 libros de matemática y 5 de física, todos de diferentes autores, ¿de cuántas maneras se pueden escoger 2 libros de diferentes materias?

R: \_\_\_\_\_

### → Lección 10 - Tema 2 ¿Qué son las permutaciones y las combinaciones?

**3** ¿Cuál es la diferencia entre permutaciones y combinatorias?

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**4** ¿De cuántas formas es posible ordenar una colección de 8 estampillas?

R: \_\_\_\_\_

**5** Si un equipo de música reproduce aleatoriamente 11 canciones diferentes.

¿De cuántas formas es posible escuchar estas canciones?

R: \_\_\_\_\_

### → Lección 10 - Tema 3 ¿En qué se aplican las combinaciones?

**6** ¿Qué características debe cumplir un problema para ser resuelto por una combinatoria?

R: \_\_\_\_\_

**7** En un curso hay 9 mujeres y 7 hombres. Se escogen 3 representantes del curso.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean del mismo sexo?

R: \_\_\_\_\_

b. ¿Cuál es la probabilidad de que se escojan dos mujeres y un hombre?

R: \_\_\_\_\_

➔ **Lección 11 - Tema 1 ¿Qué es una variable aleatoria?**

**8** ¿Qué es una variable aleatoria y cómo identificarla?

R: \_\_\_\_\_

**9** Definan la variable de cada experimento propuesto.

a. Experimento: En un banco se mide el tiempo de espera, en minutos, en una caja de pago.

Variable: \_\_\_\_\_

b. Experimento: Obtener de una tómbola, con bolitas numeradas del 1 al 20, solo números divisibles por cinco.

Variable: \_\_\_\_\_

➔ **Lección 11 - Tema 2 ¿Cuál es la probabilidad de una variable aleatoria?**

**10** ¿Cuál es la relación que existe entre la probabilidad de un evento y su variable aleatoria?

R: \_\_\_\_\_

**11** Dos de cinco bolitas numeradas del 1 al 5 son extraídas aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las dos bolitas sea un número impar formado por dos números primos?

R: \_\_\_\_\_

**12** La probabilidad de que una compañía de calefacción tenga pérdidas según el trimestre está dada en la siguiente tabla. ¿Cuáles podrían ser los valores de  $x_3$  y  $x_4$ ?

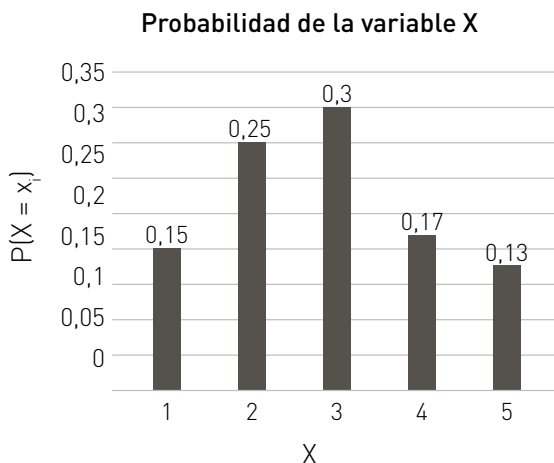
$X = x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,45	0,22		

➔ **Lección 11 - Tema 3 ¿Cómo se grafica la distribución de una variable aleatoria?**

**13** Describan los elementos para construir un gráfico de una variable aleatoria.

R: \_\_\_\_\_

**14** Analicen el gráfico. Luego, respondan.



a. Completen la tabla.

$x_i$	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$					

b. ¿Cuál es la probabilidad cuando  $X > 3$ ?

R: \_\_\_\_\_

c. ¿Qué valor toma la variable cuando la probabilidad es igual a 0,17?

R: \_\_\_\_\_

## ➔ Lección 12 - Tema 1 ¿Cómo se aborda la probabilidad en los medios de comunicación?

- 15** Nombren un cuidado que se debe tener al leer en los medios de comunicación si estos involucran probabilidades.

R: \_\_\_\_\_

- 16** Se realizó un estudio con respecto al consumo de pescado en Chile en el que se obtuvieron los siguientes resultados.

	Mujeres	Hombres
Pescado enlatado	84 %	84 %
Pescado fresco	77 %	83 %
Pescado congelado	38 %	37 %

- a.** ¿Cuál es la probabilidad de elegir al azar a una persona y que esta sea un hombre que consume pescado fresco?

R: \_\_\_\_\_

- b.** ¿Cuál de los tipos pescados conservado es más consumido por mujeres que por hombres?

R: \_\_\_\_\_

## ➔ Lección 12 - Tema 2 ¿Cómo se aplica la probabilidad en la toma de decisiones?

- 17** ¿Por qué las probabilidades resultan útiles para la toma de decisiones?

R: \_\_\_\_\_

- 18** Los límites de inversión máximos y mínimos permitidos para las AFP en Chile varían según la siguiente tabla.

	Límite máximo	Límite mínimo
Fondo A	80 %	40 %
Fondo B	60 %	25 %
Fondo C	40 %	15 %
Fondo D	20 %	5 %
Fondo E	5 %	0 %

- a.** Si les interesa invertir en un fondo donde hay más riesgo, ¿cuál fondo deberían escoger?

R: \_\_\_\_\_

- b.** Si se sienten inseguros de invertir su dinero en estas fechas, ¿cuál de los fondos no implica prácticamente ningún riesgo?

R: \_\_\_\_\_

## ➔ Lección 12 - Tema 3 ¿Cómo puede interpretarse la probabilidad?

- 19** Describan las características principales de cada interpretación probabilística.

R: \_\_\_\_\_

- 20** Analicen cada afirmación e identifiquen el tipo de interpretación probabilística involucrada.

- a.** La probabilidad de que el equipo de básquetbol de mi establecimiento gane la final de un campeonato es de un 30,6 %.

Recorrido: \_\_\_\_\_

- b.** Tras un análisis de mercado, la probabilidad de que un negocio de alimento para mascotas sea exitoso en cierta localidad es de un 78,9 %.

Recorrido: \_\_\_\_\_

De acuerdo a los resultados que obtuviste en la evaluación de esta Unidad en el Texto, repasa cada tema y resuelve los ejercicios y problemas.

<p>Lección 10, Tema 1</p>	<p>Realizan permutaciones de hasta cinco elementos, con material concreto o pictóricamente.</p>	<p><b>1</b> En una farmacia hay analgésicos de 4 marcas distintas, antiinflamatorios de 6 marcas e inhaladores de 2 marcas distintas. Si un cliente debe comprar una caja de cada tipo de estos medicamentos, ¿de cuántas formas es posible que el farmacéutico los escoja? R: _____</p>
<p>Lección 10, Tema 1</p>	<p>Aplican el término <math>n!</math> en la resolución de problemas azarosos.</p>	<p><b>2</b> Se tiene una tómbola con cinco bolitas numeradas del 1 al 5.  <b>a.</b> ¿Cuántos números de cinco cifras es posible formar si se extraen al azar las bolitas? R: _____  <b>b.</b> Si las bolitas estuvieran numeradas del 0 al 4, ¿existe alguna diferencia en la cantidad de números formados con cinco cifras? Justifica. R: _____</p>
<p>Lección 10, Tema 2 y 3</p>	<p>Combinan las permutaciones con el sorteo al azar, con o sin reposición.</p>	<p><b>3</b> En 5 tarjetas se escribe cada una de las letras de la palabra AMOR.  <b>a.</b> Usando todas las tarjetas, ¿cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar? R: _____  <b>b.</b> Si se elige una palabra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que comience con A? R: _____</p>
<p>Lección 10, Tema 2 y 3</p>	<p>Resuelven problemas de juegos de azar y de la vida cotidiana, aplicando combinatoria y permutaciones.</p>	<p><b>4</b> Una ruleta consiste en ocho partes iguales numeradas del 1 al 8. ¿Cuál es la probabilidad de que al rodar la ruleta ocho veces no salga ningún número repetido? R: _____  <b>5</b> ¿Cuál es la probabilidad de que, al rodar la ruleta dos veces, se obtengan los mismos números? R: _____</p>
<p>Lección 11, Tema 1</p>	<p>Definen variables aleatorias finitas en experimentos aleatorios.</p>	<p><b>6</b> Define la variable aleatoria involucrada y determina si es una variable finita o infinita. Justifica tu respuesta.  <b>a.</b> Experimento: Se observa el poder adquisitivo de empresarios en base al número de inversiones realizadas el último semestre. Variable: _____ R: _____  <b>b.</b> Experimento: Se lanza una ruleta para observar el número de veces que sale el color rojo. Variable: _____ R: _____</p>

Determinan los valores que puede tomar la variable aleatoria finita.

- 7** Determina el recorrido de cada variable.
- a. X: Número de perros por departamento en un edificio que no permite más de tres mascotas.  
Recorrido: \_\_\_\_\_
- b. Y: Número de aviones descompuestos en una aeropuerto en el que como máximo puede haber 16 máquinas en mal estado.  
Variable: \_\_\_\_\_

Determinan las probabilidades de una variable aleatoria aplicando la terminología  $P(X = x_i)$ .

- 8** Completa la tabla con las probabilidades de la variable definida.

Experimento: Lanza una moneda tres veces al aire.

Variable: Número de veces que se obtiene una cara.

$x_i$					
$P(X = x_i)$					

Aplican correctamente la terminología  $X = x_i$ , en la cual los  $x_i$  representan los valores que puede tomar la variable aleatoria.

- 9** Analiza la siguiente tabla. Luego, responde.
- Experimento: Lanza una moneda tres veces al aire.
- Variable: Número de veces que se obtiene una cara.

$x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,55	0,2	a

- a. ¿Cuál es el valor de a?  
a: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la probabilidad asociada al valor de  $X < 4$ ?  
R: \_\_\_\_\_

Elaboran tablas y gráficos para representar la distribución de una variable aleatoria finita.

- 10** Un estudio sobre los accidentes ocurridos en una calle del centro de una comuna a una hora determinada arrojó los siguientes resultados: la probabilidad de que no se produzca un choque es de 18,5%; de que se produzca solo un choque es de 52,3% y de que se produzcan dos choques es de 15,2%.

- a. Define la variable aleatoria.  
R: \_\_\_\_\_
- b. Determina el recorrido de la variable aleatoria.  
R: \_\_\_\_\_
- c. Construye una tabla reconociendo el recorrido de la variable y sus probabilidades asignadas según el estudio.



$x_i$					
$P(X = x_i)$					

- d. Construye un gráfico que muestra la información anterior.



Identifican artículos de diarios o revistas, cuyo contenido se relaciona con probabilidades.

- 11** La Encuesta Nacional Bicentenario, realizada en conjunto por la Universidad Católica y Gfk Adimark, ha entregado datos sobre el uso frecuente de redes sociales durante el año 2016. A continuación se expresan sus resultados según edad y sexo del encuestado.

	Total			18-24 años	25-34 años	35-44 años	45-54 años	+55 años
WhatsApp	72	70	74	88	84	71	71	34
Facebook	59	57	61	86	69	52	53	25
Instagram	24	20	28	46	26	13	6	8
Twitter	19	20	17	23	24	17	10	10
LinkedIn	9	8	11	10	12	7	7	3

- ¿Cuál es el rango de edad que utiliza más la red social WhatsApp?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es el rango de edad que utiliza menos la red social Instagram?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la probabilidad de encontrar, durante 2016, una persona que tenga entre 45 a 54 años y utilice Facebook?  
R: \_\_\_\_\_

Reconocen situaciones en las cuales se utilizan datos azarosos para planificar proyectos.

- 12** Un agrónomo evalúa la posibilidad de plantar paltos en una zona cercana a la costa centro-sur de Chile. Sin embargo, dicha zona ha sufrido una serie de sequías durante los últimos tres años. Los resultados de un estudio que señala la probabilidad de sequías en dos comunas colindantes se muestran en la siguiente tabla.

	Año 2015	Año 2016	Año 2017
Comuna A	0,55	0,48	0,43
Comuna B	0,36	0,42	0,44

- ¿Durante qué año hubo más alta probabilidad de encontrar estas zonas en sequía?  
R: \_\_\_\_\_
- ¿Cuál de las dos comunas es más recomendable para plantar paltos el año 2016?  
R: \_\_\_\_\_
- Observando la secuencia de probabilidades de cada comuna según el año, ¿qué comuna es más recomendable seleccionar para la ejecución del proyecto?  
R: \_\_\_\_\_

Transfieren resultados de experimentos azarosos a situaciones de la vida real.

- 13** En el mercado existen 5 tipos diferentes de un producto. La tabla muestra la probabilidad de que cada uno falle antes de 1 año de uso. Si todos tienen el mismo precio, ¿cuál comprarías? Justifica tu respuesta.

Tipo de producto	A	B	C	D	E
Probabilidad	0,18	31%	0,35	40%	0,25

R: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Aplican las reglas multiplicativa, aditiva y de la combinatoria de probabilidades para tomar decisiones que involucran frecuencias relativas de procesos de producción, de seguridad, etc.

- 14** El registro del número de tornillos defectuosos por caja se muestra en la siguiente tabla.

X	frecuencia
0	4
1	4
2	3
3	1

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que de un lote de 12 cajas se obtenga a lo más un tornillo defectuoso?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuál es la probabilidad de escoger una caja con tres tornillos defectuosos?  
R: \_\_\_\_\_
- c. ¿Es recomendable seguir produciendo tornillos de la misma forma? Justifica tu respuesta.  
R: \_\_\_\_\_

Comparan resultados obtenidos de manera probabilística teórica, resultados basados en creencias y resultados estimativos.

- 15** Analiza cada una de las interpretaciones probabilísticas y determina si corresponde a una interpretación clásica, frecuencial o subjetiva.

- a. La probabilidad de que en un partido de tenis pierda el competidor local es de un 18,5%.  
R: \_\_\_\_\_
- b. Según estudios biológicos, la probabilidad de que de padres que tienen ojos de color café nazca un niño de ojos azules es de 6,26%.  
R: \_\_\_\_\_

- 16** En el sur de Chile suele decirse “norte claro, sur oscuro: aguacero seguro”, cuando un sistema frontal se desplaza desde el sur –que está oscuro por la presencia de nubes– hacia el norte –que está claro por la ausencia de estas.

- a. ¿Cómo crees que surgió esta expresión?  
R: \_\_\_\_\_
- b. ¿Qué tipo de interpretación probabilística representa? Justifica.  
R: \_\_\_\_\_

## Unidad 1: Números

### Lección 1: Números reales

1.

	N	Z	Q
100	€	€	€
$\frac{1}{5}$	∉	∉	€
-46	∉	€	€
-0,8	∉	∉	€
7	€	€	€
0,64	∉	∉	€
0	∉	€	€

- 2.
- $\frac{23}{3}$
  - $\frac{8}{5}$
  - 13
  - 3
  - 116
  - 315
  - 12

3.

a.

3	-10	4
0	-1	-2
-6	8	-5

b.

7	12	5
6	8	10
11	4	9

c.

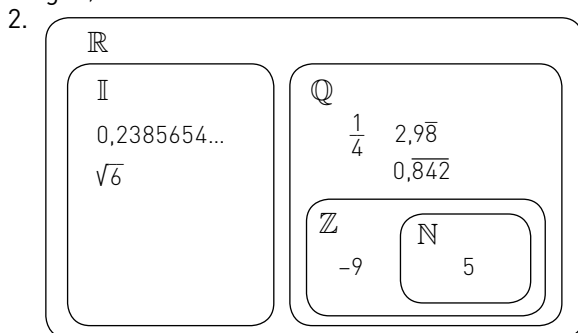
0	6	-3
-2	1	4
5	-4	2

- 4.
- $-\frac{1}{10}$
  - $\frac{1893}{451}$
  - $\frac{32}{27}$
  - $-\frac{59}{102}$
  - $\frac{2599}{700}$

#### Pág. 6

**Tema 1** ¿Existen números que no sean racionales?

- 1.
- 0,13
  - 0,142857
  - 0,375
  - 0,34246575
  - 0,592
  - 0,021276595...
  - 0,428571



- 3.
- Racionales: b, d, e, f  
Irracionales: a, c, g

- 4.
- b. X
- 5.
- F
  - F
  - V
  - V

- F
- V
- F

#### Pág. 7

- 1.
- Irracional
  - Irracional
  - No siempre es Irracional
  - Irracional
  - Irracional
  - No siempre es Irracional
  - Irracional, pero no se mantiene la proporción.
2.  $\sqrt{2} = 1,4142135623731$ , Hipaso tenía la razón
3.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  a es Irracional
4.  $V = 8000 \text{ cm}^3$ , diagonal =  $20\sqrt{3}$  cm. La diagonal es irracional
5.  $2\pi$
- 6.

Clausura: no cumplen, la suma y el producto entre dos irracionales no necesariamente es irracional.

Conmutatividad: cumplen por ejemplo: ..

Asociatividad: cumplen por ejemplo:

$$(\varphi + \pi) + e = \varphi + (\pi + e); (\varphi \cdot \pi) \cdot e = \varphi \cdot (\pi \cdot e)$$

Elemento neutro: cumplen por ejemplo:

$$\pi + 0 = \pi; \varphi \cdot 1 = 1 \cdot \varphi$$

Elemento inverso: cumple por ejemplo:

$$\pi - \pi = 0; \varphi \cdot \frac{1}{\varphi} = 1$$

7.

$$\varphi^2 = \varphi + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1$$

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} =$$

$$\frac{2 + 2\sqrt{5} + 4}{4} =$$

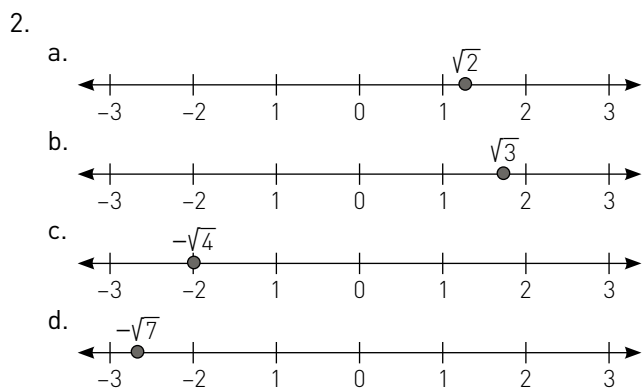
$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1$$

#### Pág. 8

**Tema 2** ¿Cómo se aproxima y ordenan los números irracionales?

1.

a.	$\sqrt{17}$	$4 < \sqrt{17} < 5$	4,1231...
b.	$-\sqrt{5}$	$-3 < -\sqrt{5} < -2$	-2,236...
c.	$\sqrt{8}$	$2 < \sqrt{8} < 3$	2,828...
d.	$-\sqrt{3}$	$-2 < -\sqrt{3} < -1$	-1,732...
e.	$-\sqrt{63}$	$-8 < -\sqrt{63} < -7$	-7,937...
f.	$-\sqrt{34}$	$-6 < -\sqrt{34} < -5$	-5,8309...
g.	$\sqrt{10}$	$2 < \sqrt{10} < 3$	3,162...



3.  $-\sqrt{57}$ ,  $-e$ ,  $-\frac{\sqrt{13}}{5}$ ,  $\frac{\sqrt{5}}{6}$ ,  $\sqrt{8}$ ,  $\pi$ ,  $\sqrt{11}$

- 4.
- $2 < \sqrt{6} < 3$
  - $2 < \sqrt{8} < 3$
  - $4 < \sqrt{17} < 5$
  - $-8 < -\sqrt{63} < -7$
  - $-5 < -\sqrt{21} < -4$

- 5.
- Respuesta variable, por ejemplo:  $\sqrt{6}$ ,  $\sqrt{7}$ ,  $e$ ,  $\pi$
  - Respuesta variable, por ejemplo:  $\frac{e}{2}$ ,  $\frac{\pi}{3}$
  - Respuesta variable, por ejemplo:  $e$
  - Respuesta variable, por ejemplo:  $e$ ,  $\pi$
  - Respuesta variable, por ejemplo: 2,93249758472...

- 6.
- <
  - >
  - >
  - <
  - <
  - <
  - <

- 7.
- 3,74
  - 1,32
  - 1,03
  - 2,10
  - 1,41

- 8.
- 2,450
  - 7,072
  - 5,197
  - 0,268
  - 1,937

**Pág. 9**

- 1.
- 22,8 u
  - 11,47 u
  - 28,97 u
2. 3,8%
3.  $\sqrt{11}$  m
4.  $\sqrt{2}$  cm
5.  $6\sqrt{3}$  cm
6. 17,04 litros
7.  $\frac{2}{3}\sqrt{15\pi}$  cm
8.  $118 + 8\sqrt{61}$  cm<sup>2</sup>
9. Aumenta 9 veces

10.  $2\sqrt{3}$  cm

11. No es posible medir exactamente los valores obtenidos, se debe expresar con el menor valor decimal posible de medir según cada unidad.

**Pág. 10**

**Tema 3** ¿Cómo se puede calcular con números reales?

1.

- $3\sqrt{6}$
- $6\sqrt{5}$
- $7a\sqrt{5}$
- $\frac{2}{9}\sqrt{6}$
- $\frac{1}{5b}$

2.

- 8
- $5\sqrt{5}$
- 20
- $14a^2$
- 30x

3.

- $\frac{12}{5}$
- 16
- 5
- 6
- $\frac{3}{x}$

4.

- $4\sqrt{2}$
- 4
- $4\sqrt{2} - \frac{1}{14}$
- $2\sqrt{3}$
- $\frac{223}{500}$
- $4a - 11b^2$
- $-16x^2 - 2xy^2$

5.

- $2\sqrt{10} - 2\sqrt{15} - 2\sqrt{5}$
- $\frac{22\sqrt{6} - 18}{33}$
- $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{7}}{\sqrt{14}}$
- $2 - 2\sqrt{5}$
- 9
- $\frac{-4\sqrt{15}}{15}$
- $\frac{\sqrt{2}}{90}$

6.

- $x = 1$
- $x = \frac{49}{9}$
- $x = 54$
- $x = \frac{41}{48}$
- $x = -9$
- $x = 0$

7. No. Se verifican las mismas reglas establecidas, es decir que no pueden obtenerse diferentes resultados de las mismas operaciones dependiendo del conjunto numérico en el que estas se realizan.

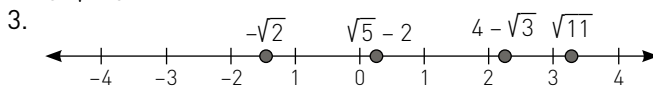
## Pág. 11

- cd
  - $b^2 + d$
  - $\frac{a-b}{a^2b^2} = \frac{a-b}{2b^2} = \frac{a-b}{3a^2}$
  - $\frac{b}{c+a^6} = \frac{b}{c+4a^2}$
  - $\frac{b^2c^2+a^2d}{ac^2-b^2}$
- No;  $\sqrt{2+3} = \sqrt{5} = 2,236\dots \neq \sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,146\dots$
  - No;  $\sqrt{5-3} = \sqrt{2} = 1,414\dots \neq \sqrt{5} - \sqrt{3} = 0,504\dots$
  - No;  $\sqrt{2} \cdot 3 = 4,242\dots \neq \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} = 2,449\dots$
  - Si
  - No,  $a - 2\sqrt{ab} + b$
- $120\sqrt{3} \text{ cm}^3$
- $L = 0,745 \text{ m}$
  - $4,485 \text{ m}$
- Manuela
- $6\sqrt{2} \text{ cm}$
- Casa de  $10\sqrt{42} \text{ m}$  y Piscina de  $6\sqrt{70} \text{ m}$ .
  - $18480 \text{ m}^2$

## Pág. 12

### ¿Cómo voy?

- $\frac{9}{5}$  Racional
  - $\sqrt{7} - 2$  Irracional
  - $\frac{23}{12} - \sqrt{6}$  Irracional
  - $\sqrt{13}$  Irracional
  - 8 Racional
- $2\sqrt{13}$
  - $4\sqrt{7}$
  - $\sqrt{145}$



4.

Número	Aproximación		
	Defecto	Exceso	Redondeo
$9 - \sqrt{21}$	4,41	4,42	4,42
$\sqrt{8} - \sqrt{34}$	8,65	8,66	8,66
$\frac{-\sqrt{3} - \sqrt{17}}{5}$	-1,18	-1,17	-1,17

## Pág. 13

- La superficie de mercurio es  $74,012 \text{ km}^2$ . La razón entre sus superficies es de  $0,1477$ .
- $3,028$  galones por los que se necesitan al menos 4 galones.
- Del piso 30 demora 3,87 segundos y del piso 45 demora 4,74 segundos.
- $\frac{17}{120}$

## Pág. 14

### Lección 2: Potencias

- $17^3$
  - $2^7$
  - $3^7$
  - $5^6$
  - $4^5$
  - $21^4$
- 7776
  - 128
  - 6561
  - 6561
  - 248832
  - 3375
- 5
  - 6
  - 5
  - $5,4^{-17}$
- $7^{14}$
  - $3^8$
  - $6^{-3}$
  - $\left(\frac{1}{2}\right)^4$
  - $\left(\frac{1}{2}\right)^6$
  - $2^6$
  - $\left(\frac{1}{10}\right)^{30}$
- 17:26 h
  - 625 personas

## Pág. 15

### Tema 1 ¿Cuáles son las raíces enésimas? ¿Cómo se calculan?

- 3
  - 81
  - $\frac{1}{4}$
  - 8
  - $\frac{3}{8}$
  - $\frac{2}{5}$
- F, raíces con índice par dan como resultado un valor positivo.
  - F, raíces con índice par no pueden tener radicando negativo.
  - F, la raíz cubica de 8 es 2.
  - F, la raíz cubica de -1000 es -10.
  - V
  - F, la raíz cubica de -125 es -5.
- Racional
  - Irracional
  - Racional
  - Racional
  - Racional
  - Irracional

- 4.
- $(-1)^7$
  - $\sqrt[5]{-1024}$
  - $6^3$
  - $\sqrt[4]{64}$
  - $(-9)^3$
  - $\sqrt[6]{729}$
  - $\sqrt[4]{10000}$
  - $5^4$
  - $(-2)^3$
- 5.
- 2
  - 64
  - 1
  - 5
  - 7
  - 4096
  - 3
- 6.
- $\sqrt{100} = 10$
  - $\sqrt[3]{-8} = -2$
  - $\sqrt[5]{-243} = -3$
  - $\sqrt[4]{625} = 5$
- 7.
- $\sqrt[6]{64} = 2$
  - $\sqrt[4]{2401} = 7$
  - $\sqrt[6]{\frac{1}{729}} = \frac{1}{3}$

#### Pág. 16

- $10\sqrt[3]{30}$  m
- $56,25$  cm<sup>2</sup>
- 9 m
- 3 cm
- $110,592$  cm<sup>3</sup>
- $5\sqrt{3}$  cm de arista y  $20\sqrt{3}$  cm de perímetro.
- $(21\sqrt[3]{4} + 28\sqrt[3]{2})$  cm<sup>2</sup> de área y  $(20\sqrt[3]{2} + 8)$  cm de perímetro
- $5\sqrt{3}$  cm
- 12,4 cm de ancho y  $10\pi$  cm de largo.
- 2
- 16 cm
- $5\sqrt{3}$  cm
- fórmula: 2,3448..., calculadora: 2,4662...
  - fórmula: 3,1746..., calculadora: 3,2396...
  - fórmula: 2,477..., calculadora: 2,6207...
- El 1° tiene  $6\sqrt{6}$  m<sup>2</sup>; El 2° tiene  $3\sqrt{10}$  m<sup>2</sup>

#### Pág. 17

**Tema 2** ¿Cuál es la relación entre las raíces enésimas y las potencias de exponente racional?

- $\sqrt[3]{25^2} = \sqrt[3]{5^6}$
  - $\sqrt[5]{45^2}$
  - $\sqrt[9]{32^4}$
  - $\sqrt[7]{\left(\frac{2}{3}\right)^5}$
  - $\sqrt[3]{(65xy)^4}$
  - $\sqrt[13]{(a+8)^6}$
  - $\sqrt[4]{(x+y)^5}$
- $2\frac{5}{4}$
  - $9\frac{3}{2} = 3^3$
  - $3\frac{2}{5}$
  - $(a-1)\frac{6}{7}$
  - $(x+8)\frac{5}{9}$
  - $(x-y)\frac{b}{9}$
  - $(x^2 + 2xy + y^2)\frac{1}{p} = (x+y)\frac{2}{p}$
- $6\frac{3}{8}$
  - $\sqrt[8]{2^9}$
  - $2^{12}$
  - 3
  - 2
  - $\sqrt[7]{15}$
  - $\sqrt{2}$
- $\sqrt[6]{6^{13}}$
  - $\sqrt[20]{5^{31}}$
  - $\sqrt[28]{\left(\frac{7}{9}\right)^{67}}$
  - $\sqrt[10]{a^{17}}$
  - a
  - $\sqrt[35]{\left(\frac{6}{15}\right)^{43}} = \sqrt[35]{\left(\frac{2}{5}\right)^{43}}$
- $\sqrt[12]{54^{19}}$
  - $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{45}\right)}$
  - $\sqrt[70]{\left(\frac{1}{10}\right)^{41}}$
  - $\sqrt[21]{\left(\frac{1}{x}\right)^5}$
  - $\sqrt[7]{(ab)^{11}}$
  - $\sqrt[8]{(x-5)^5}$
- V
  - F.  $7\sqrt{3} = \sqrt{147}$
  - F.  $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{40}$
  - V

## Pág. 18

- Por ejemplo: a y b deben tener raíces cuadradas exactas.
- No siempre, el cociente de a y b debe ser positivo y tener una raíz cubica exacta.
- $\sqrt[3]{\frac{5^6}{5^3+1}}$
- $\frac{128}{\sqrt[5]{5+1}}$
- 3
- 24,64 cm<sup>3</sup>
- $(783,75\pi + 1596) \text{ m}^2$
- 31,62 años
- $6^{-5-\frac{3}{4}-3} = 6^{\frac{15}{4}-3} = 6^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{216}$
- 10 horas
- 4 años
- 100 años
  - No, ya que siempre queda una fracción pequeña del elemento.

## Pág. 19

**Tema 3** ¿Qué son los logaritmos?, ¿Cómo se calculan?

- $\log_2 8 = 3$
  - $\log_7 2401 = 4$
  - $\log_3 243 = 5$
  - $\log_{0,6} 0,216 = 3$
  - $\log_{32} 2 = 0,2$
  - $\log_{343} 7 = \frac{1}{3}$
  - $\log_5 \frac{15625}{729} = 6$
  - $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{1024} = 5$
- $5^2 = 25$
  - $2^6 = 64$
  - $7^5 = 16807$
  - $0,25^2 = 0,0625$
  - $17^0 = 1$
  - $125^{\frac{2}{3}} = 25$
  - $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$
- $\log_5 1 = x \rightarrow 5^x = 1 \rightarrow x = 0$ , Base de exponente 0 es 1.
  - No se puede, base 1 elevado a cualquier valor es 1.
  - No se puede, argumento negativo.
  - No se puede,  $\log 0$  no está definido.
- |       |                  |
|-------|------------------|
| a. 7  | d. $\frac{3}{2}$ |
| b. 4  | e. 3             |
| c. -3 | f. 3             |
- |        |                  |
|--------|------------------|
| a. 5   | f. -4            |
| b. 0,5 | g. $\frac{1}{8}$ |
| c. 3   |                  |
| d. 4   |                  |
| e. 4   |                  |

6.

- 2
- 0
- $\frac{35}{2}$
- $\frac{7}{2}$
- 20
- 2
- $\frac{15}{4}$

## Pág. 20

- $3 \log 2 + 2 \log 3 = 1,86$
  - $2 \log 5 - \log 2 = 1,1$
  - $\frac{\log 3 + \log 5}{2 \log 7} = 0,694$
  - $2 \log 5 + 2 \log 7 = 3,1$
  - $3 \log 3 - \log 17 - \log 7 = -0,64$
  - $\frac{\log 2 + \log 3 + \log 5}{\log 17} = 1,203$
  - $\log 7 + 2 \log 2 + \log 3 - 2 \log 5 = 0,53$
  - $\log 17 + 2 \log 2 + \log 7 = 2,68$
  - $\log 17 + \log 3 - \log 5 = 1,01$
- $3y + x$
- pH = 2,2, sustancia ácida.
  - pH = 3,42, sustancia ácida.
- $[\text{H}_3\text{O}^+] = 2,51 \cdot 10^{-7}$
  - $[\text{H}_3\text{O}^+] = 1 \cdot 10^{-8}$
- 22,5 años
- 12,77
- 276,7%
- El riesgo se eleva al cuadrado.
- 0,22 g/L de alcohol.
- 8,18 ml
  - 6 horas

## Pág. 21

### Taller TIC

- 5
  - $=0,5 \cdot (A1+31/A1)$
  - Desde A5 el valor es el mismo.
  - 5,567764363
  - Desde A4 el valor es el mismo.
  - Sucede lo mismo.
  - El valor final es negativo.
- 8,48528137, el valor es el mismo.
- Pregunta abierta.

**Pág. 22**

4. Pasos en el computador.
4. Entre 2 y 3 cambia signo.
5. Entre 2,3 y 2,4.
6. Repetir el proceso entre 2,3 y 2,4.
7. 2,35
8. Empezar entre -4 y -3 y entre -1 y 0.
9.
  - a. 4,582576
  - b. 12,569805
10.
  - a. 0 y 1,44
  - b. 1,26

**Pág. 23****Tema 4** ¿En qué se aplican los logaritmos?

1.
  - a. 2
  - b. -18
  - c. 4
  - d. 5
  - e. 49
  - f. -32
2.
  - a.  $\log_a bc$
  - b.  $\log_a + \log_b$
  - c.  $\log_x \frac{y}{z}$
  - d.  $\log_a m - \log_a n$
  - e.  $\log b^a$
  - f.  $\frac{1}{a} \log b$
  - g.  $\log 2 + \log m - \log n$
  - h.  $\frac{1}{n}(\log a + \log b - \log c)$
  - i.  $m(\log x - \log y)$
  - j.  $n(\log a + \log b) - \log x - \log y$
  - k.  $\frac{1}{5}(\log p + \log q - 2 \log r - \log s)$
  - l.  $\frac{1}{3} \log m + \frac{1}{2} \log n$
3.
  - a. V
  - b. F
  - c. F
  - d. V
  - e. F
  - f. F
  - g. V
  - h. V
  - i. F
4.
  - a.  $\log_2 \frac{42}{9} = \log_2 \frac{14}{3}$
  - b.  $\log_2 \frac{27}{144} = \log_2 \frac{3}{16}$
  - c.  $\log_3 (6^8 \cdot 15)$
  - d.  $\log_a xyz$
  - e.  $\log_x \frac{b}{ac}$
  - f.  $\log_n \frac{x^2}{y^3 z^{10}}$
  - g.  $\log \left( \frac{d^c}{b^a g^e} \right)$

5.

- a. 31
- b. Vacío
- c.  $2\sqrt{3}$
- d. 5
- e.  $47 - \sqrt{1918}$  y  $47 + \sqrt{1918}$
- f. 11
- g. Vacío
6.  $\log_{ab} (a^{-1} b)$
7.  $x = 2048$
8. Porque la base es negativa.

**Pág. 24**

1.  $10^{10,57}$
2.  $1,5^\circ$
3.  $1,44 \cdot 10^{24}$  energios
4.  $2,51 \cdot 10^{21}$  energios
5. 138,45
6. 9 minutos
7.  $|H_+| = 6,3 \cdot 10^{-5}$
8. 18 años
9. 2 horas
10.  $x = y^2$
11.  $3 \cdot 10^{-17}$
12.  $\log 250 = 3y + x$ .
13. 2 horas y 30 minutos.

**Pág. 25****Taller de habilidades**

1. Pregunta abierta.
2. Pregunta abierta.
3. a. y b. No, se comenten errores al medir.
  - c. Dependiendo del nivel de precisión requerido.
4. 19999; al encontrar la fórmula  $2n^2 - 1$

**Pág. 26****¿Cómo voy?**

1.
 

a. 8	e. $\frac{2}{5}$
b. 3	f. $\frac{3}{2}$
c. $\frac{1}{3}$	g. $-\frac{1}{2}$
d. 2	
2.
  - a.  $4 \log_2 2 + \log 100 - 3 \cdot 0 = 6$
  - b.  $2 \log_4 4 - 4 \log_3 3 - 8 \log_2 2 = -10$
  - c.  $3 \log 10 - 2 \log 10 + 15 \log 10 = 16$
  - d.  $2 \log_{0,3} 0,3 - 3 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} + 2 \log_5 5 = 1$
  - e.  $0 - 3 \log_8 8 - 5 \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} + 6 \log_2 2 = -2$
  - f.  $-\frac{9}{4} \log_{81} 81 - 3 \log_3 3 + 2 \log_6 6 + \frac{3}{2} \log_4 4 = -\frac{7}{4}$
  - g.  $\frac{2}{3} \log_7 7 + \frac{4}{3} \log_2 2 - \frac{1}{2} \log_5 5 - 2 \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}$



- 3.
- |                            |             |
|----------------------------|-------------|
| a. $x = 10$                | d. $x = 11$ |
| b. $x = 10^{\frac{32}{3}}$ | e. $x = 10$ |
| c. $x = 1$                 | f. $x = 5$  |

Pág. 27

### Profundización

- 1.
- En 3 años
  - Tendrá \$13300099
2.  $|H| = 10^{-1120,41}$
3. 674 224 años
4. 20,892 km

Pág. 28

### Matemática en acción

1. y 2.

	Papiro Rhind	Mesopotámicos	Griegos	Ptolomeo	Al-Jwarizmi
Aprox.	3,16049	3,125	3,14159	3,1417	3,1429
Error %	0,60%	0,53%	0%	0,004%	0,042%

Pág. 29

### Sintetizo mis aprendizajes

#### Lección 1 tema 1

1.

$\sqrt{1,44} = 1,2$	Finito
$\sqrt{5} = 2,236067978$	Irracional
$\sqrt{4,9} = 2,213594362$	Irracional
$\sqrt{17} = 4,123105626$	Irracional

- a.  $\sqrt{1,44}$   
 b. Ninguno  
 c.  $\sqrt{5}, \sqrt{4,9}, \sqrt{17}$

#### Lección 1 tema 2

- 1.
- a. 1,415  
 b. 1,58
- 2.
- a. >                      b. <                      c. <

#### Lección 1 tema 3

- 1.
- a. 11  
 b.  $\sqrt{2}$
- 2.
- a.  $3\sqrt{5}$   
 b.  $\frac{\sqrt{7}}{7}$

Pág. 30

### Lección 2 tema 1

- 1.
- |  |  |
|--|--|
| a. $\sqrt[5]{3125} = 5$                      | d. $\sqrt[6]{0,000729} = \frac{3}{10}$ |
| b. $\sqrt[3]{512} = 8$                       | e. $\sqrt[9]{a-z}$                     |
| c. $\sqrt[4]{\frac{81}{6561}} = \frac{1}{3}$ | f. $\sqrt[7]{128a} = 2\sqrt[7]{a}$     |

- 2.
- |                             |                            |
|-----------------------------|----------------------------|
| a. $6\sqrt{14}$             | d. $\sqrt[5]{12}$          |
| b. $2\sqrt[3]{210}$         | e. $\frac{\sqrt{14}}{14}$  |
| c. $\frac{\sqrt{210}}{210}$ | f. $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ |

### Lección 2 tema 2

- 1.
- a.  $7^{\frac{4}{3}}$   
 b.  $3^{\frac{5}{4}}$   
 c.  $2^{\frac{3}{4}}$   
 d.  $\left(\frac{5}{9}\right)^3$   
 e.  $(2x+y)^{\frac{13}{8}}$   
 f.  $(abc)^{\frac{7}{3}}$   
 g.  $\left(\frac{x-1}{4}\right)^{\frac{6}{5}}$   
 h.  $\left(\frac{x}{y}\right)^m$
- 2.
- a.  $\sqrt{15^9}$   
 b.  $\sqrt[15]{24^{37}}$   
 c.  $\sqrt[12]{6^{23}}$   
 d.  $\sqrt[28]{9^5}$   
 e.  $a^2$   
 f.  $\sqrt[9]{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}$   
 g.  $\frac{1}{5}$

Pág. 31

### Lección 2 tema 3

- 1.
- a.  $3^2 = x = 9$   
 b.  $5^{-1} = x = \frac{1}{5}$   
 c.  $0,2^x = 32 \rightarrow x = 5$   
 d.  $x^{-2} = \frac{1}{196} \rightarrow x = 14$   
 e.  $x^{-3} = \frac{1}{216} \rightarrow x = 6$   
 f.  $25^{\frac{5}{2}} = x = 3125$   
 g.  $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \rightarrow x = 10$   
 h.  $(\sqrt{3})^{-4} = x \rightarrow x = \frac{1}{9}$
- 2.
- a. F,  $\log \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n} \log x$   
 b. V  
 c. F,  $2^x = 5 \rightarrow (\log_2 5)^2 = x^2$   
 d. F,  $\log_a n = c \rightarrow a^c = n$   
 e. V  
 f. V

**Lección 2 tema 4**

- 3.
- $3 \log_b b + \log_b b + 4 \log_b b = 8$
  - $\frac{11}{3} \log_x x = \frac{11}{3}$
  - $\frac{4 \log_3 3 + 6 \log_2 2}{4 \log_{10} 10} = \frac{5}{2}$
  - $\frac{-3 \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} + \frac{8}{3} \log_{0,001} 0,001}{4 \log_{0,2} 0,2} = -\frac{1}{12}$
  - $\frac{\log a \cdot \log b}{\log b \cdot \log a} = 1$
  - $\log \left( \frac{6b^3(a+b)}{a} \right)$
- 4.
- 56 años
  - $10^9$  en ergios

**Pág. 32**

**¿Qué aprendí?**

- 1.
- F
  - F
  - V
  - F
  - F
  - F
- 2.
- No se puede.
  - 4
  - 3
  - No se puede.
- 3.
- $2\sqrt{2}$  cm
  - $6\sqrt{2}$  cm
  - $3\sqrt{2}$  m
  - $2a\sqrt{2}$  cm
4.  $\sqrt{23}$
- 5.
- 
- 6.
- 4,12
  - 5,80
  - 3,82
  - 0,15

**Pág. 33**

- 7.
- $\sqrt[6]{5}$
  - $\sqrt[8]{a^7}$
  - $\sqrt[4]{3}$
  - $\sqrt{7} + 2$

- 8.
- $\sqrt{2}$
  - $\frac{38}{11} + \sqrt{3}$
  - 3
  - $\frac{11 - 6\sqrt{2}}{4}$
  - $\sqrt[3]{37}$  m
  - $\frac{\sqrt{14}}{4}$  cm
- 9.
- $0,64^{\frac{1}{2}}$
  - $1331^{\frac{1}{3}}$
  - $4096^{\frac{1}{4}}$
  - $(2a)^{\frac{1}{5}}$
  - $81^{\frac{1}{4}}$
  - $0,49^{\frac{1}{2}}$
  - $0,125^{\frac{1}{3}}$
  - $(xy^3z)^{\frac{1}{6}}$
- 10.
- 8
  - $8x^3\sqrt{2}$
  - 2
  - 3
  - 3
  - $4x$

**Pág. 34**

- 11.
- $\sqrt[7]{34^3}$
  - $\sqrt[11]{63^2}$
  - $\sqrt[3]{(ab)^2}$
  - $\sqrt[9]{28^5}$
  - $\sqrt[13]{\left(\frac{5}{14}\right)^4}$
  - $\sqrt[3]{(x-1)^6}$
- 12.
- $27^{\frac{6}{5}}$
  - $48^{\frac{2}{3}}$
  - $4^{\frac{1}{7}}(2x^3+1)^{\frac{6}{7}}$
  - $18^{\frac{5}{3}}$
  - $(a-1)^6$
  - $(a^2-b^2)^{\frac{m}{n}}$
- 13.
- $10\sqrt{2}y - 10\sqrt{2}$
  - $1041,23 \text{ cm}^3$
  - 36 años
- 14.
- $\sqrt[20]{3^9}$
  - $\sqrt[15]{(4x)^{31}}$
  - 1
  - $\sqrt[3]{12^{11}}$
  - $\sqrt[4]{4^7}$
  - $\sqrt[20]{(2a)^{11}}$

Pág. 35

15.

a.  $2^x = 8 \rightarrow x = 3$

b.  $5^x = \frac{1}{625} \rightarrow x = -4$

c.  $10^x = \frac{1}{1000} \rightarrow x = -3$

d.  $0,1^x = \frac{1}{100} \rightarrow x = 2$

e.  $0,3^x = 0,027 \rightarrow x = 3$

f.  $6^x = \left(\frac{1}{36}\right) \rightarrow x = -2$

g.  $\sqrt{3^x} = 9 \rightarrow x = 4$

h.  $\sqrt{2^x} = \frac{1}{4} \rightarrow x = -4$

16.

a.  $\log_6 36 = 2$

b.  $\log_{\sqrt{5}} 625 = 8$

c.  $\log_{\left(\frac{2}{3}\right)} \frac{2187}{128} = -7$

d.  $\log_{\left(\frac{a}{b}\right)} c = x$

e.  $\log_9 729 = 3$

f.  $\log_{0,8} 0,64 = 2$

g.  $\log_{\left(\frac{1}{16}\right)} 2 = -0,25$

h.  $\log_{(x-y)} z = 2$

17.

a. 21,43 años

b. 1,356 minutos

c. 37,2 años

## Unidad 2: Álgebra y funciones

### Lección 3: Cambio Porcentual

Pág. 37

1.

a. 9800

b. 900

c. 6572,8

d. 34,5

e. 16 191

f. 729,9

2.

a. 625

b. 242 500

c. 13 333,3

d. 2 000 000

e. 636 363,64

f. 0,111

3.

a. 14,857 %

b. 1,5 %

c. 0,00092 %

d. 5,045 %

e. 5,045 %

f. 98 %

4. Un 25 %

5. Un 25 %

6. Un 20 %

7. 400 %

8.

a. \$43 493

b. \$272 992

Pág. 38

Tema 1 ¿Qué se entiende por cambio porcentual?

1.

a. F

b. V

c. F

d. V

2.

a. Decrecimiento

b. Crecimiento

c. Decrecimiento

d. Crecimiento

e. Decrecimiento

3.

a. El valor inicial es 325000 y crece un 1 %.

b. El valor inicial es 8000 y decrece un 80 %.

4.

Mes (n)	Capital (C)
0	10 000
1	15 000
2	22 500
3	33 750
4	50 625
5	75 937,5

5.

Mes (n)	Capital (\$)
0	5 500 000
1	4 950 000
2	4 455 000
3	4 009,5
4	3 60,855
5	32,477

- 6.
- Crecimiento de un 20%,  $I_v = 1,2$ .
  - Decrecimiento de un 5%,  $I_v = 0,95$ .
  - Crecimiento de un 12%,  $I_v = 1,12$ .
  - Crecimiento de un 10%,  $I_v = 1,1$ .
  - Decrecimiento de un 25%,  $I_v = 0,75$ .

**Pág. 39**

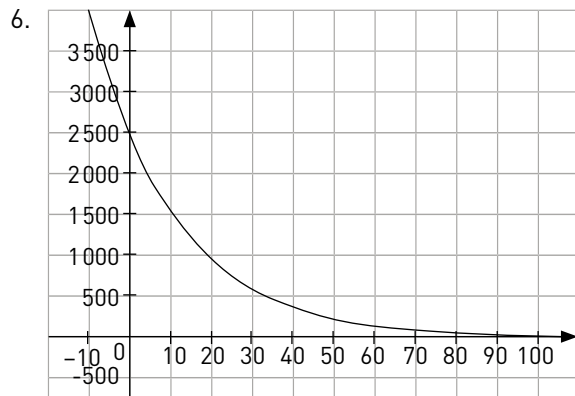
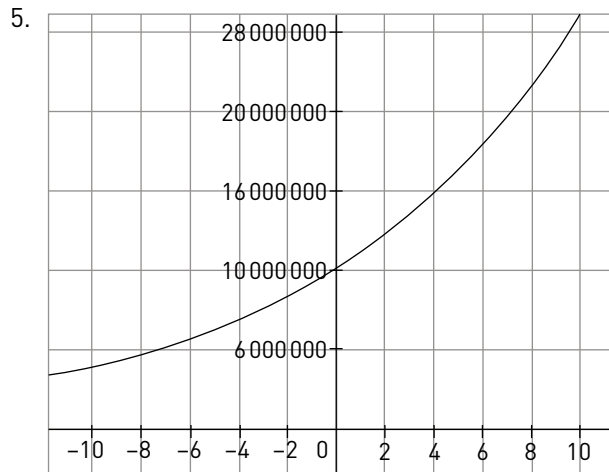
- \$409 599,5
- $x \cdot 1,05^3$
- 38 meses
- 88%
  - 115 185,6
  - 1 mes
- 20%
  - 154,79
  - 4 años
- 6 años
- 6 años
  - 4 años
- 2084 departamentos
  - 3600 departamentos
- 5 meses
  - 10 meses; 0,83 años
- $I_v = 1,1$
  - 408 pacientes

**Pág. 40**

**Tema 2 ¿En qué se aplica el cambio porcentual?**

- Cantidad de dinero cobrado o pagado por el uso del capital durante todo el tiempo, el cual en cada intervalo unitario de tiempo es el mismo.
  - Los intereses que se obtienen al final de cada período no se retiran sino que se reinvierten o añaden al capital inicial, produciendo un capital final.
  - Monto de dinero inicial, prestado o depositado.
  - Tiempo durante el cual el dinero se encuentra prestado o depositado y genera intereses.
- $1,1x = 8500$
  - $0,25x = 12$
  - $1,19x = 12 500$
- \$7727
  - 48 años
  - \$10 504

- Capital inicial: \$700 000  
Tasa de interés: 3% anual  
Período de tiempo: 1 año  
Función:  $C_f = 700 000 \cdot 1,03^1$   
R: \$721 000
  - Capital inicial:  $C_i$   
Tasa de interés: 5% anual  
Período de tiempo: 1 año  
Función:  $C_i \cdot 1,05 = 1 470 000$   
R: \$1 400 000



**Pág. 41**

- \$634
  - \$432
- \$180 785
- \$315 000 000
  - 11 años
- 5 años
  - \$5 212 463
- 4 años
  - $10 000 000 \cdot 0,7^4$
- $P = 25 000(10^{0,1 \log 1,96})^n$
  - 350 000 habitantes

7.  
 a. \$6 180 000  
 b. \$180 000  
 c. \$6 365 400  
 d. 18 años
8.  
 a. \$350 958  
 b. \$444 074  
 c. 31 años  
 d. 18 años

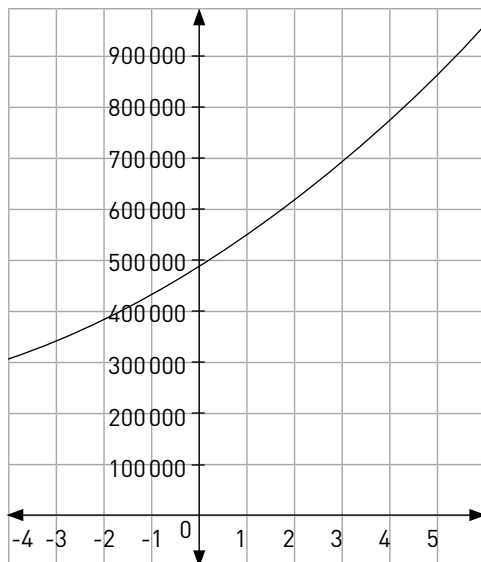
## Pág. 42 ¿Cómo voy?

1.  
 a. Error: No corresponde a un crecimiento porcentual. Corrección: Corresponde a un decrecimiento porcentual.  
 b. Error: El valor inicial corresponde a  $n = 0$ . Corrección: El valor inicial es \$64 530.  
 c. Error: 0,05 corresponde al índice de variación. Corrección: El porcentaje de decrecimiento anual es de un 95%.
2.  
 a.  $P_f = 37\,500 \cdot 0,5^n$   
 b. \$46 883
3.  
 a.  $P_f = P_i \cdot 2,05$   
 b.  $P_f = P_i \cdot 0,9998$   
 c.  $P_f = P_i \cdot 1,205$
4.  
 a. 15 años  
 b. \$1 393 333

## Pág. 43

1.  
 a. F, en 2008 el arancel era \$2 301 561.  
 b. F, la expresión es  $C(4) = 1\,930\,000 \cdot 1,0454$ .  
 c. V, el arancel es \$2 997 230.  
 d. V
2.  
 a. Un 5,4%  
 b.  $C(t) = 450\,500 \cdot 1,045^t$

Tiempo (años)	Costo (\$)
2014	450 500
2015	474 827
2016	500 467
2017	527 492
2018	555 977



3.  
 a. Un 10%  
 b. 12 años  
 c. 134 784 892 infectados

## Pág. 44

### Lección 4: Ecuaciones cuadráticas

1.  
 a.  $a^2 + 2ab + b^2$   
 b.  $a^2 - b^2$   
 c.  $x^2 - 5x - 24$   
 d.  $4y^2 + 2y - 42$   
 e.  $25x^2 - 20xy + 16y^2$   
 f.  $x^2 + 5x + 6$   
 g.  $q^2 - \frac{1}{4}p^2$   
 h.  $y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{1}{8}$   
 i.  $\frac{1}{4}x^2 + 5x + 25$   
 j.  $y^2 - \frac{4}{25}$
2.  
 a.  $6a(m+3c)$   
 b.  $4(p+3q)(p-3q)$   
 c.  $(b+c)(a+p)$   
 d.  $(x+y)(2a+3b)$   
 e.  $(x+6y^2)(x-6y^2)$   
 f.  $(2x+5b)^2$   
 g.  $(x-13)(x+2)$   
 h.  $(x+14+\sqrt{101})(x-14+\sqrt{101})$   
 i.  $(x-5y)(x-y)$
3.  
 a.  $25a^2 - 30ab + 9b^2 = (5a - 3b)^2$   
 b.  $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$   
 c.  $\frac{x^2}{16} - \frac{xy}{5} + \frac{4b^2}{25}$   
 d.  $25a^2b^2 + 90abd^2 + 81d^2 = (5ab + 9d^2)^2$   
 e.  $\frac{1}{25}x^2 + \frac{9}{5}x + \frac{81}{4} = \left(\frac{x}{5} + \frac{9}{2}\right)^2$   
 f.  $\frac{4}{9}y^2 - 4y + 9 = \left(\frac{2}{3}y - 3\right)^2$   
 g.  $\frac{729}{32}z^2 + 27z + 8 = \left(\frac{27}{8}z + \sqrt{8}\right)^2$

## Pág. 45

### Tema 1 ¿Cuándo se dice que una ecuación es cuadrática?

1.  
 a. Sí  
 b. Sí  
 c. Sí  
 d. Sí  
 e. No  
 f. Sí  
 g. No  
 h. No

- 2.
- $\frac{3}{5}x^2 - \frac{29}{10}x - \frac{1}{2} = 0$ ;  $a = \frac{3}{5}$ ,  $b = \frac{29}{10}$ ,  $c = -\frac{1}{2}$
  - $x^2 - 2x - 1 = 0$ ;  $a = 1$ ,  $b = -2$ ,  $c = -1$
  - $x^2 - 7x + 16 = 0$ ;  $a = 1$ ,  $b = -7$ ,  $c = 16$
  - $x^2 - 14x = 0$ ;  $a = 1$ ,  $b = -14$ ,  $c = 0$
  - $2x^2 + 8x - 107 = 0$ ;  $a = 2$ ,  $b = 8$ ,  $c = -107$
- 3.
- $-7x^2 + 2x + 5 = 0$ ,  $c = 16$
  - $3x^2 - 10 = 0$
  - $\sqrt{3}x^2 + 4x - \frac{3}{8} = 0$
  - $\frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$
  - $-2x^2 + \sqrt{3}x + \frac{5}{9} = 0$
  - $10x^2 - 25x - 38 = 0$
- 4.
- V
  - F, el valor de  $c$  es 0.
  - V
  - V
  - V
  - F, el valor de  $c$  es -10.
5. El lado mide 8cm; Solo 8 es solución del problema, ya que al ser una medida de longitud, no puede ser un valor negativo.

#### Pág. 46

- 1.
- $x^2 + x - 272 = 0$ ;  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = -272$
  - $4x^2 + 4x - 80 = 0$ ;  $a = 4$ ,  $b = 4$ ,  $c = -80$
  - $4x^2 + 8x - 480 = 0$ ;  $a = 4$ ,  $b = 8$ ,  $c = -480$
  - $4x^2 + 4x - 4224 = 0$ ;  $a = 4$ ,  $b = 4$ ,  $c = -4224$
  - $4x^2 + 8x - 1020 = 0$ ;  $a = 4$ ,  $b = 8$ ,  $c = -1020$
  - $x^2 + x - 15750 = 0$ ;  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = -15750$
  - $\frac{1}{2}x^2 - 14x + \frac{147}{2} = 0$ ;  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -14$ ,  $c = \frac{147}{2}$
  - $2x^2 - 110x + 1500 = 0$ ;  $a = 2$ ,  $b = -110$ ,  $c = 1500$
2. Respuesta variable, por ejemplo: encuentra dos naturales consecutivos cuyo producto sea 1482;  $x^2 + x - 1482 = 0$ .
3. Al reemplazar el valor de  $x = 2$ , se comprueba la igualdad.
- 4.
- Sí  $x = 5$ , No  $x = 3$
  - Sí  $x = 10$ , Sí  $x = 2$
  - Sí  $x = 4$ , No  $x = -4$
  - No  $x = 3$ , Sí  $x = -3$
5. 3
6. 36
7. 66
8. Respuesta variable
- $x^2 + 2x + 3 = 0$ ;  $4x^2 + 5x + 6 = 0$
  - $x^2 + \sqrt{2} = 0$ ;  $x^2 + \sqrt{3} = 0$
  - $-x^2 + 3x - 2 = 0$ ;  $2x^2 - 5x + 3 = 0$

#### Pág. 47

#### Tema 2 ¿En qué consiste la resolución por factorización?

- 1.
- No  
Sí  
No
  - No  
Sí  
No
- 2.
- $x^2 - 11x + 28 = 0$
  - $x^2 - 3x - 10 = 0$
  - $x^2 - 20x + 100 = 0$
  - $x^2 - \frac{x}{2} = 0$
  - $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8} = 0$
- 3.
- $(x - 7)(x + 5) = 0$ ;  $x_1 = 7$ ,  $x_2 = -5$
  - $(x - 10)(x + 4) = 0$ ;  $x_1 = 10$ ,  $x_2 = -4$
  - $(x - 7)(x + 5) = 0$ ;  $x_1 = 7$ ,  $x_2 = -5$
  - $(x + 8)(x + 7) = 0$ ;  $x_1 = -7$ ,  $x_2 = -8$
  - $(x + 4)(x + 3) = 0$ ;  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = -3$
  - $(x + 1)(x + 5) = 0$ ;  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -5$
- 4.
- B
  - A
  - E
  - D
  - F
  - C
- 5.
- $x_1 = \frac{7}{2}$ ,  $x_2 = \frac{7}{2}$
  - $x_1 = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ,  $x_2 = \frac{5\sqrt{3}}{3}$
  - $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -8$
  - $x_1 = \frac{3}{4}$ ,  $x_2 = -2$
  - $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -4$
  - $x_1 = \frac{8}{3}$ ,  $x_2 = \frac{2}{5}$

#### Pág. 48

- 1.
- $x^2 - 4x - 32 = 0$ , lado: 6 cm.
  - $x^2 + 3x - 28 = 0$ , largo: 9 cm, ancho: 2 cm.
  - $x^2 + 2x - 48 = 0$ , altura: 10cm, base: 8 cm.
2.  $x^2 + (x + 1)^2 - 302 = 0$ , 9, 10 y 11.
3.  $4x^2 + (2x + 2)^2 - 1060 = 0$ , 22 y 24.
4.  $x^2 + (x - 4)^2 - 730 = 0$ , 21 y 17.
5.  $x^2 + (x - 10)^2 - 50^2 = 0$ , 140 cm.
6.  $x^2 - 15x - 100 = 0$ , 20 años.
7.  $x(x + 2) - 360 = 0$ ; 76 m.
8.  $x(x + 1) = 0$ , 16 y 17.
9. 4, 5 y 6.
10.  $x^2 + x - 24 = 0$ , base:  $\frac{\sqrt{97} + 1}{2}$  cm, altura:  $\frac{\sqrt{97} - 1}{2}$  cm.
11.  $(x - 4)^2 + (x + 3)^2 - (2x - 5)^2 = 0$ ,  $x = 9$ .

Pág. 49

**Tema 3** ¿Cuál es el algoritmo para completar el cuadrado?

1.

a.  $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

b.  $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2$

c.  $x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2$

d.  $x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{36}{100} = \left(x - \frac{6}{10}\right)^2$

e.  $x^2 - 20x + 100 = (x - 10)^2$

f.  $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = [x - \sqrt{3}]^2$

g.  $x^2 + 30x + 225 = (x + 15)^2$

h.  $x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} = \left(x + \frac{5}{3}\right)^2$

i.  $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$

j.  $x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2$

k.  $x^2 + 6\sqrt{2}x + 18 = [x + 3\sqrt{2}]^2$

2.

a.  $x_1 = 4, x_2 = -\frac{4}{3}$

b.  $x_1 = 2 + 2\sqrt{5}, x_2 = 2 - 2\sqrt{5}$

c.  $x_1 = 11 + \sqrt{114}, x_2 = 11 - \sqrt{114}$

d.  $x_1 = 7 + \sqrt{46}, x_2 = 7 - \sqrt{46}$

e.  $x_1 = 4 + \sqrt{6}, x_2 = 4 - \sqrt{6}$

f.  $x_1 = 2 + \sqrt{3}, x_2 = 2 - \sqrt{3}$

g.  $x_1 = 6, x_2 = 4$

h.  $x_1 = 7 + \sqrt{46}, x_2 = 7 - \sqrt{46}$

i.  $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$

3.

a. E

b. D

c. F

d. B

e. A

f. C

4.

a. a: 1, h: 0, k: -16

b. a: 1, h:  $-\frac{5}{2}$ , k:  $-\frac{17}{4}$

c. a: 1, h: 3, k: -8

d. a: 3, h: 1, k: 9

e. a: 1, h: 2, k: -25

f. a: 1, h: 7, k: 0

5. Se debe factorizar los elementos literales por a, luego se debe sumar y restar  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ .

Pág. 50

1.  $\frac{b^2}{4a^2}$

2. h:  $-\frac{q}{2p}$ , k:  $\frac{4pr - q^2}{4p}$

3.  $4(x + 6)^2 - 168 = 0$ ,  $x = (\sqrt{42} - 6)$  cm

4.  $x(x + 1)^2 - 12 = 0$ , largo: 4 cm y ancho: 3 cm

5.  $3,14x^2 - 78,5 = 0$ ; radio: 5 cm

6.  $(2x - 2)^2 + (2x)^2 - (2x + 2)^2 = 0$ ; 6, 8 y 10

7.  $x^2 + \frac{16}{9}x^2 - 75^2 = 0$ ; largo: 60 m, ancho: 45 m

8.  $x^2 + (20 - x)^2 - 202 = 0$ ; 9 y 11

9.  $x^2 + (x + 1)^2 - 313 = 0$ ; 12 y 13

10.  $x^2 + (17 - x)^2 - 13^2 = 0$ ; 12 cm y 5 cm

11.  $x^2 + \frac{25}{12}x + 10 = 0$ ;  $\frac{4}{3}$  y  $\frac{3}{4}$

12.  $4x^2 - x - 147 = 0$ ; 7 cm

13. Largo:  $[24 + \sqrt{208}]$  cm y ancho:  $[24 - \sqrt{208}]$  cm

14. 14.

a. 7 amigas

b. \$3500

Pág. 51

**Tema 4** ¿Cómo se aplica la formula general?, ¿Qué es el discriminante?

1.

a. C

b. D

c. B

d. A

e. E

f. F

2.

a. F, para  $\Delta < 0$ , las raíces no son reales.

b. F, tiene dos raíces reales distintas.

c. V

d. F, tiene dos raíces reales iguales.

3.

a.  $x^2 + x - 22 = 0$ ;  $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{89}}{2}$ ;  $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{89}}{2}$

b.  $x^2 + 3x - 4 = 0$ ;  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = 1$

c.  $6x^2 - 12x + 6 = 0$ ;  $x_1 = x_2 = 1$

d.  $x^2 - 9x - 22 = 0$ ;  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 11$

e.  $4x^2 + 4x - 35 = 0$ ;  $x_1 = -\frac{7}{5}$ ,  $x_2 = \frac{5}{2}$

f.  $x^2 - 30x + 81 = 0$ ;  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 27$

g.  $x^2 - 9x - 22 = 0$ ;  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 11$

h.  $3x^2 - 18x + 17 = 0$ ;  $x_1 = 3 - \sqrt{\frac{10}{3}}$ ,  $x_2 = 3 + \sqrt{\frac{10}{3}}$

i.  $4x^2 - 7x + 4 = 0$ ; no tiene raíces reales.

j.  $x^2 - 2x + 3 = 0$ ; no tiene raíces reales.

k.  $x^2 + 9x + 8 = 0$ ;  $x_1 = -8$ ,  $x_2 = -1$

**Pág. 52**

4. Pregunta abierta, por ejemplo: factorizo y luego igualo cada factor a 0 y resuelvo cada ecuación lineal.
- 5.
- $-55 < 0$ , raíces no reales distintas
  - $208 > 0$ , raíces reales distintas
  - $484 > 0$ , raíces reales distintas
  - $0 = 0$ , raíces reales iguales
6. Respuesta variable
- $x^2 + 12x - 16 = 0$
  - $2x^2 - 3x + 8 = 0$
  - $x^2 + 6x + 9 = 0$
- 7.
- $S = -1$ ,  $P = -42$ , Raíces:  $-7$  y  $6$
  - $S = -9$ ,  $P = -36$ , Raíces:  $-12$  y  $3$
  - $S = 11$ ,  $P = 10$ , Raíces:  $10$  y  $1$
  - $S = 21$ ,  $P = 54$ , Raíces:  $18$  y  $3$

1. Deben ser signos opuestos

2.

- $k > \frac{225}{32}$
- $k = \frac{225}{32}$
- $k < \frac{225}{32}$

3.  $k = \frac{11}{5}$

4.  $k = -\frac{5}{3}$

5.  $k = 31$

6.

- $u^2 - 13u + 36 = 0$ ,  $u_1 = 9$ ,  $u_2 = 4$ ;  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = -2$
- $u^2 - 36u + 243 = 0$ ,  $u_1 = 27$ ,  $u_2 = 9$ ;  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 2$

**Pág. 53**

7.  $x^2 + (x + 7)^2 - 13^2 = 0$ ; 12 cm y 5 cm

8.  $x^2 - 3x = 0$ , 3

9.  $6x^2 - 26x + 24 = 0$ ;  $3$  y  $\frac{4}{3}$

10.  $x^2 + 4x - 12 = 0$ ;  $-6$  y  $2$

11.  $x^2 + 4x - 12 = 0$ ; 10 lados

12.  $\frac{884}{3x} = x + \frac{1}{3}$ ; 51 y  $-52$

13.  $4x^2 + 4x - 60 = 0$ ;  $[2\sqrt{31} - 2]$ m

14. 30 m por 40 m o 20 m por 60 m

15.  $r \approx 0,51$  mm

16.  $0,1x^2 - 2x + 1 = 0$ ;  $[3\sqrt{10} + 10]$ mm

17.  $8x^2 - 1800 = 0$ ; 15 y 5

18.  $(x - 3)^2 - (x + 3)^2 = 0$ ; 6 años

19.  $x^2 - 4x - 24 = 0$ ; 36 y 6 años

20.  $u = 2^x$ ;  $u^2 - u - 2 = 0$ ;  $x = 1$

**Pág. 54****¿Cómo voy?**

1.

- Error: Los coeficientes no corresponden a la ecuación cuadrática.  
Corrección: Los coeficientes son  $a = 1$ ,  $b = -1$ ,  $c = 6$
- Error:  $x_2 = -\frac{5}{2}$  no corresponde a una solución de la ecuación.  
Corrección:  $x_2 = 0$

2.

- Las raíces son no reales y distintas.
- $x_1 = 2$  y  $x_2 = -2$
- $x_1 = 0$  y  $x_2 = -\frac{1}{3}$

3. Respuesta variable

a.  $2x^2 - 7x + 3 = 0$ ;  $x^2 - \frac{7}{2}x + 3 = 0$

b.  $x^2 - \frac{9}{2}x + 3 = 0$ ;  $2x^2 - 9x + 4 = 0$

4.

a.  $1$  y  $-\frac{3}{4}$

b. Hay 2 soluciones posibles, ya que se trata de una ecuación cuadrática.

5. 3 años

6. 20 años

**Pág. 55****Profundización**

1.

- 9 m de largo y 5 m de ancho
- 2 m de largo y 1,5 m de ancho

2.

a.  $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

b.  $x^2 + x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$

c.  $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$

d.  $x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = \left(x + \frac{5}{4}\right)^2$

e.  $x^2 + 0,4x + 0,04 = (x + 0,2)^2$

f.  $4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2$

3.

- $k = 5$
- $k = 11$

**Pág. 56****Lección 5: Funciones cuadráticas**

1.

a.  $x = -\frac{5}{2}$

b.  $x = -15$

c.  $x = \frac{4}{15}$

d.  $x_1 = 1$  y  $x_2 = -1$



- 2.
- $f(2) = \frac{23}{2}; f(-1) = -\frac{13}{2}; f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{2}$
  - $f(2) = 3; f(-1) = 12; f\left(-\frac{1}{3}\right) = 10$
  - $f(2) = 1; f(-1) = -2; f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{26}{9}$
  - $f(2) = \frac{11}{3}; f(-1) = -\frac{7}{3}; f\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$

3.

a.

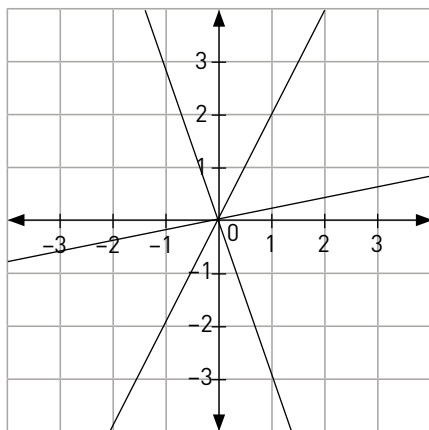
$f(x) = 2x$	
x	f(x)
-1	-2
0	0
1	2

b.

$f(x) = -3x$	
x	f(x)
-1	3
0	0
1	-3

c.

$f(x) = \frac{x}{5}$	
x	f(x)
-1	$-\frac{1}{5}$
0	0
1	$\frac{1}{5}$



4.

a.

$f(x) = 2x$	
x	f(x)
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8

- b.  $f(x) = 2x$   
 c.  $m = 2$ , representa los kilogramos de basura producidos por cada hora de funcionamiento.

5.

- $m = -5, n = 1$
  - $m = 3, n = 8$
  - $m = 1, n = -4$
6.  $f(x) = \frac{x}{10} + 22$

**Pág. 57**

**Tema 1** ¿Cuándo se dice que una función es cuadrática?

1.

- Sí
- No, no corresponde a la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ .
- Sí
- No, no corresponde a la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ .
- No, no corresponde a la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ .
- Sí
- No, no corresponde a la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ .
- No, no corresponde a la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ .

2.

- V
- F
- V
- V
- F
- V

3.

- 12
- 6
- 12
- $-\frac{128}{9}$
- $4p^2 - 2p - 14$

4.

- Sí
- No
- Sí

**Pág. 58**

1.

- No,  $f$  y  $g$  son funciones que presentan una simetría respecto del eje X.
- $f(0) = f(5) = 6$  y  $g(0) = g(5) = -6$ , las funciones  $f$  y  $g$  son opuestas.
- $x_1 = 2$  y  $x_2 = 3$ , las funciones son opuestas respecto al eje X, por lo que intersecan en los mismos puntos.

2. Respuesta variable:  $g(x) = -x^2 + x + 20, h(x) = 2x^2 - 2x - 40$

3. Respuesta variable:  $f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = -ax^2 - b - c, a \neq 0$ .

4. Respuesta variable:  $f(x) = x^2 - 2x - 5$

5.

- $A(r) = \pi r^2$
- $A(x) = 6x^2$
- $D(n) = \frac{n(n-3)}{2}$
- $A(m) = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}$

6.

- Sí, ya que la relación D es de la forma  $ax^2 + bx + c, a \neq 0$
- 8100,665 kg/m<sup>3</sup>
- 1,225 kg/m<sup>3</sup>

- 7.
- Sí, ya que la relación  $h(t)$  es de la forma  $ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ .
  - 8 m
  - 10 segundos
  - Puede tomar valor desde 0 a 10 segundos.
- 8.
- Sí, ya que la relación  $f(t)$  es de la forma  $ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$
  - $t = 0$  segundos y  $t = 5$  segundos
  - Son los tiempos en los que la flecha se encuentra a la altura de lanzamiento.
  - 5 segundos

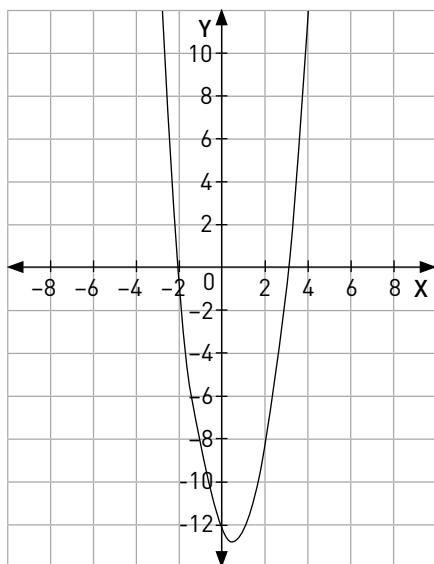
Pág. 59

Tema 2 ¿Cómo se grafica una función cuadrática?

1.

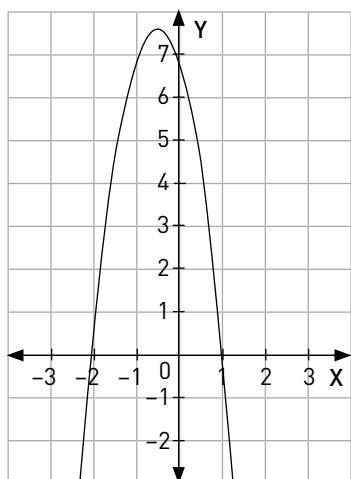
a.

x	-3	-2	-1	1	2	3
f(x)	12	0	-8	-12	-8	0



b.

x	-3	-2	-1	1	2	3
f(x)	-12	0	6	0	-12	-30



- $f(x)$  es una función cóncava hacia arriba y  $g(x)$  es cóncava hacia abajo.
- Gráfico 1:  $(-2, 0)$  y  $(3, 0)$ .
- Gráfico 2:  $(-2, 0)$  y  $(1, 0)$ .

2.

a.

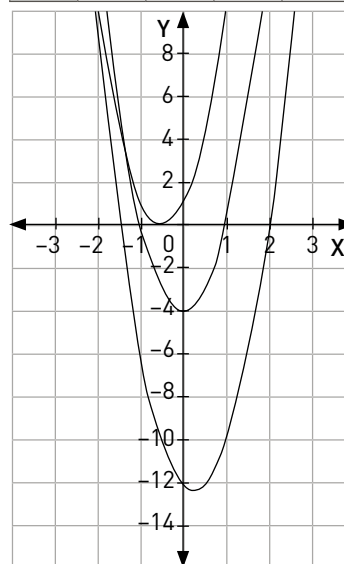
x	-3	-2	-1	1	2	3
f(x)	5	0	-3	-3	0	5

b.

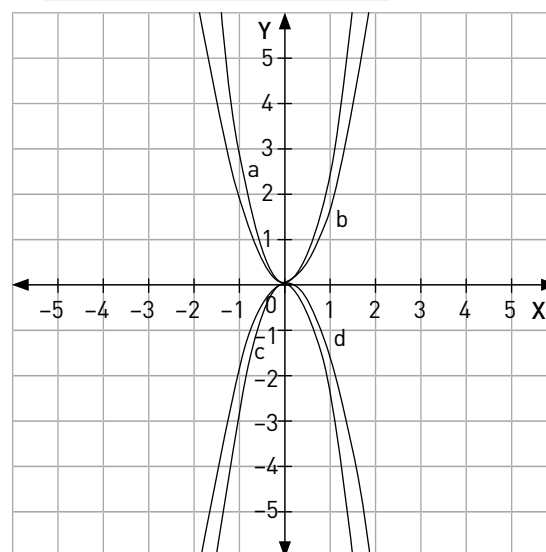
x	-3	-2	-1	1	2	3
f(x)	0	-6	-10	-12	-10	-6

c.

x	-3	-2	-1	1	2	3
f(x)	4	1	0	4	9	16



3.



- al variar los valores de  $a$ , cambia la concavidad y el grado de apertura.
- El signo del parámetro  $a$  cambia la concavidad de la parábola. Para  $a > 0$  la concavidad es hacia arriba y para  $a < 0$  la concavidad es hacia abajo.
- El vértice se traslada al punto  $(0, c)$

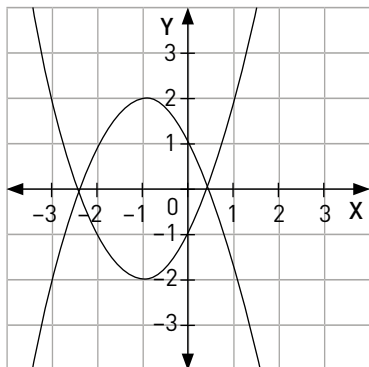
Pág. 60

1.

a.

<b>x</b>	-3	-2	-1	1
<b>f(x)</b>	-2	1	2	-2

<b>x</b>	-3	-2	-1	1
<b>g(x)</b>	2	-1	-2	2



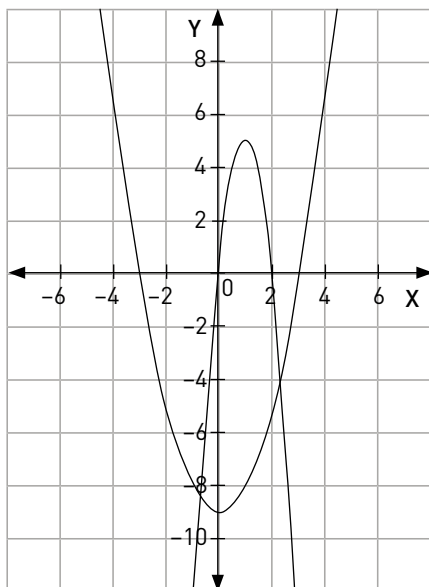
- No,  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones que presentan una simetría respecto del eje X.
- $g(x) = -f(x)$
- Las funciones son opuestas respecto al eje X, por lo que intersecan en los mismos puntos.
- Aplicar una reflexión a  $f(x)$  con respecto al eje X
- $p(x) = -[-p(x)]$

2.

- F, está dada por  $h(x) = -x^2 + 2x + 3 \text{ kg/m}^3$
- F, los ceros de  $h(x)$  son  $x_1 = 3$  y  $x_2 = -1$
- V
- F, el valor máximo que toma  $h(x)$  es 4

3.

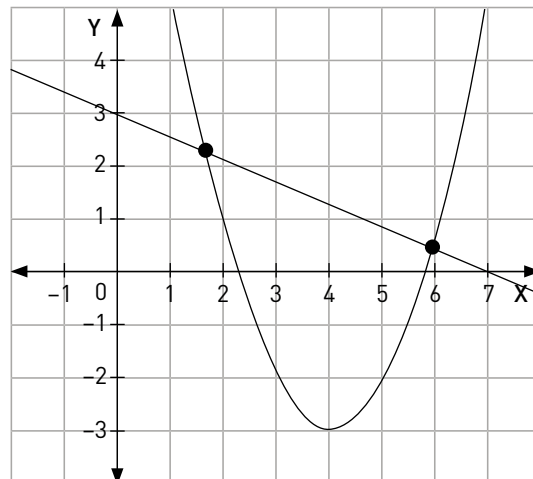
- P1(0, 0), P2(2, 0)
- P1(-3, 0), P2(3, 0)



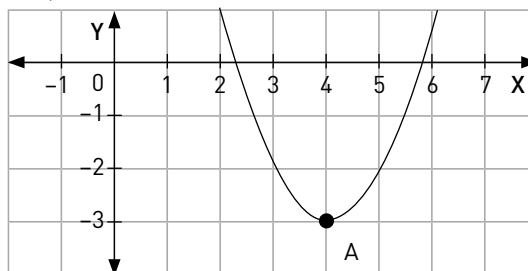
Pág. 61 y 62

Taller TIC

1.  $x_1 = 1,7$ ;  $x_2 = 5,9$



- Para esos valores de  $x$ , las funciones tienen el mismo valor de  $y$ .
- Respuesta variable. (4, -3)



- Pregunta abierta. Por ejemplo,  $2x + y = -4$
- No hay un valor de  $x$  tales que la recta y la parábola contengan el mismo valor de  $y$ .
- Pregunta abierta, por ejemplo: al simplificar el sistema se obtiene una ecuación cuadrática que tiene máximo dos soluciones.
- Pregunta abierta, por ejemplo:  $2x^2 + 3x - 5$  y  $5x + 6y = -8$ ;  $x_1 = -2,62$ ;  $x_2 = 0,7$

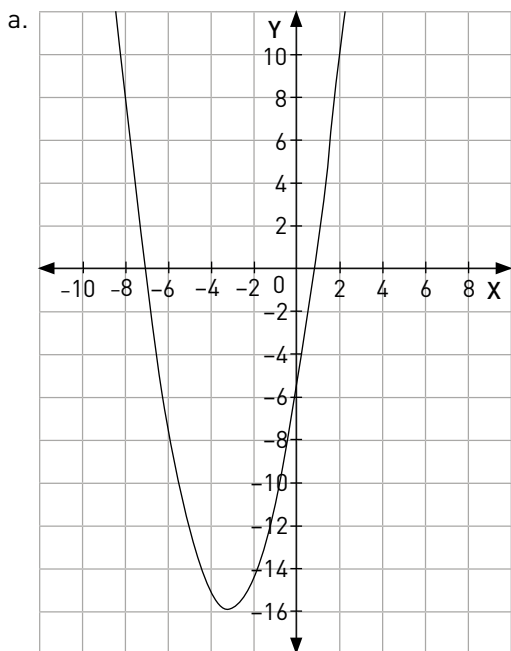
Pág. 63

Tema 3 ¿Cómo cambia la gráfica según cada parámetro?

1.

- P1(2, 0), P2(4, 0)
- P3(0, 8)
- V(3, -1)
- $a = 1$ ,  $d = 3$ ,  $e = -1$

2.



- b.  $f(x) = (x + 3)^2 - 16$
- c. El parámetro d.
- d.  $f(x) = (x + 6)^2 - 16$
- e. El parámetro e.
- f.  $f(x) = (x + 3)^2 - 18$

3.

- a. F, Se traslada dos unidades a la izquierda.
- b. F, son tres unidades hacia abajo.
- c. F, la nueva fórmula es  $j(x) = (x - 2)^2 + 3$ .
- d. V
- e. V

**Pág. 64**

4.

- a.  $g(x) = x^2 - 4x + 2$
- b.  $g(x) = x^2 - 2$
- c.  $g(x) = x^2 - 6$
- d.  $g(x) = x^2 - 4x - 2$

5.

- a. No depende del signo, sino del valor de a, si a aumenta las ramas se cierran y viceversa.
- b.  $y = 1,5x^2$  se ubicará entre  $y = 3x^2$  e  $y = x^2$ ;  $y = -\frac{1}{3}x^2$  se ubicará entre  $y = -0,25x^2$  e  $y = -x^2$
- c. Respuesta variable:  $y = -2x^2$ ,  $y = -0,75x^2$
- d. La parábola  $y = 3x^2$

1.

- a. El parámetro e.
- b.  $g(x) = (x + 2)^2 - 1$
- c. El parámetro d.
- d.  $h(x) = (x - 1)^2 - 4$
- e. El parámetro a.
- f.  $i(x) = -(x + 2)^2 - 4$

2.  $k \in \left[-\frac{49}{8}, \infty\right)$ ,  $k \neq 0$

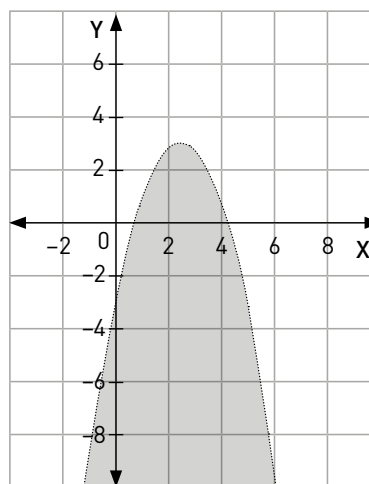
3.  $k = \frac{25}{4}$

**Pág. 65**

4.

a.  $y = x^2 - x - 6$

b.



6.

- a. V
- b. F, El punto  $(2, -1)$  es parte de la solución.
- c. F, El punto  $(4, -2)$  no es parte de la solución.

7.

- a.  $g(x) = 0,5(x + 5)^2 + 3$ , vector:  $(-5, 3)$
- b.  $h(x) = 0,5(x - 2)^2 - 2$ , vector:  $(2, -2)$
- c.  $p(x) = 0,5(x - 3)^2 + 1$ , vector:  $(3, 1)$
- d.  $q(x) = 0,5(x + 4)^2 - 3$ , vector:  $(-4, -3)$

8.

$f(x) = -2(x - 1)^2 + 5$

**Pág. 66**

**Tema 4** ¿En qué se aplican las funciones cuadrática?

1.

- a. La variable descuento (D).
- b. La variable v.
- c. 240 visitas
- d. 90% de descuento.
- e. 40 o 200 visitantes.

2.

- a. La variable cajas (C).
- b. La variable tiempo (t).
- c. A las 12 h.
- d. A las 16 h.
- e. A las 10:12 h y 13:47 h.

3.

- a. La variable costos de producción (C).
- b. La variable unidades elaboradoras (x).
- c. \$4500
- d. \$2500
- e. 500 o 2500 unidades.

4.

- a. La variable producción en toneladas de cebollas (C).
- b. La variable mes de recolección (x).
- c. En el mes de Junio.
- d. 120 toneladas de cebollas.
- e. En febrero y noviembre.

**Pág. 67**

1.

- a. 70 metros
- b. 4,57 metros

2.
  - a. 50 625 unidades cuadradas
  - b. 223 de ancho y 227 de largo
3.
  - a. 0,331 metros
  - b. 11 metros
4.
  - a. 10 °C
  - b. 21,2 °C
  - c. Aproximadamente a los 7,7 minutos
5.
  - a. 1 enfermo
  - b. 856 enfermos
  - c. A los 15 días
6.
  - a. Inicia el ascenso a los 24 m de profundidad
  - b. Sale a los 2 segundos y se sumerge a los 4 segundos

## Pág. 68

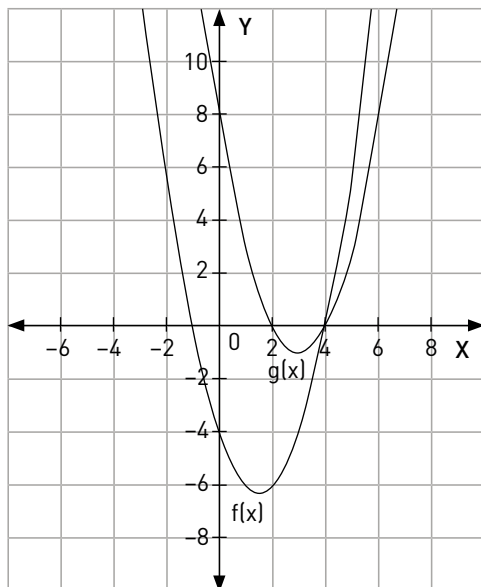
### ¿Cómo voy?

1.

a.

x	-3	-2	-1	1	2	3
f(x)	14	6	0	-6	-6	-4

x	-3	-2	-1	1	2	3
g(x)	35	24	15	3	0	-1



- b. f(x): eje X: P1[-1,0], P2[4,0], eje Y:[0,-4]  
g(x): eje X: P1[2,0], P2[4,0], eje Y:[0,8]
  - c. f(x):  $V\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{4}\right)$   
g(x):  $V(3, -1)$
2.
    - a. Error: no considerar el signo negativo:  
 $f(-5) = -252$ ,  $f(5) = -12$ ,  $f(-5) - f(5) = -252 - 12 = -264$   
Corrección:  $f(-5) - f(5) = -252 - (-12) = -240$
    - b. Error: no considerar el signo negativo en  $-4(x - 4)(x - 2)$   
Corrección: los ceros de f(x) son 2 y 4
    - c. Error: Los parámetros d y e no corresponden  
Corrección: La forma canónica de la función es  $g(x) = -4(x - 3)^2 + 4$

3.

- a. F, El punto P(3, -4) queda fuera del conjunto solución de la inecuación
- b. V
- c. V

## Pág. 69

### Profundización

Función	Vértice	Forma Canónica
f(x)	(0,0)	$f(x) = -\frac{3}{2}x^2$
g(x)	(1,3)	$g(x) = -\frac{3}{2}(x - 1)^2 + 3$
h(x)	(3,0)	$h(x) = -\frac{3}{2}(x - 3)^2$
i(x)	(0,-3)	$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3$

2.

- a. La variable altura
- b. La variable tiempo
- c. 10 unidades de tiempo

3.

- a. En el mes de Junio
- b. 24 unidades monetarias

## Pág. 70

### Lección 6: Función inversa

1.  $f(x) = x^2 + 3x + 6$

2.

x	f(x)
1	3
2	5
3	7

x	f(x)
1	0
2	2
3	4

x	f(x)
1	3
2	3
3	3

$$f(x) = 2x - 2$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}$$

$$f(x) = 2x + 1$$

3.

$$f(x) = 2x$$

x	0	1	2	3
f(x)	0	2	4	6

$$f(x) = x + 3$$

x	0	1	2	3
f(x)	3	4	5	6

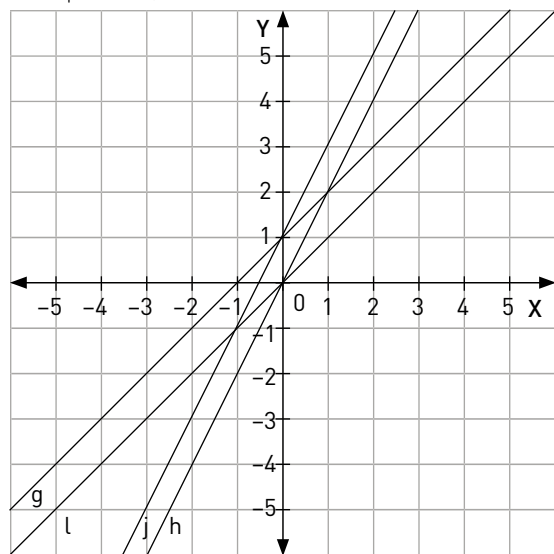
$$f(x) = x^2$$

x	0	1	2	3
f(x)	0	1	4	9

$$f(x) = 5$$

x	0	1	2	3
f(x)	5	5	5	5

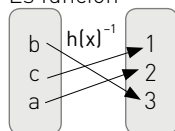
- 4.
- $f(x)$  es una función lineal intersecando el eje Y en el origen y  $g(x)$  es una función afín intersecando el eje Y en el punto  $(0, 1)$ .
  - $h(x)$  es una función lineal intersecando el eje Y en el origen y  $j(x)$  es una función afín intersecando el eje Y en el punto  $(0, 1)$ .



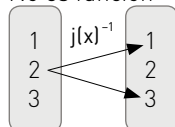
**Pág. 71**

**Tema 1** ¿Cuándo una función tiene función inversa?

- $f(x)^{-1} = \{(3, 2), (5, 3), (7, 4)\}$ , es función.
  - $g(x)^{-1} = \{(3, -1), (5, 1), (3, 2), (5, -2)\}$ , no es función.
  - Es función



- No es función



- En a. y c.

x	0	1	2	3
f(x)	1	0,5	$\frac{1}{3}$	0,25

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
g(x)	3	2	1	0

- Las imágenes de  $g(x)$  corresponden a las pre-imágenes de  $f(x)$ .
  - $f(x) = g(x)^{-1}$
- Su inversa es  $g(x)$ .
  - Su inversa es  $f(x)$ .
  - No está su inversa.
  - Su inversa es  $j(x)$ .
  - Su inversa es  $r(x)$ .
  - Su inversa es  $k(x)$ .
  - Su inversa es  $t(x)$ .
  - Su inversa es  $s(x)$ .
  - No está su inversa.

**Pág. 72**

- |      |               |               |   |   |   |
|------|---------------|---------------|---|---|---|
| x    | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 |
| g(x) | -2            | -1            | 0 | 1 | 2 |
  - |      |               |               |   |   |   |
|------|---------------|---------------|---|---|---|
| x    | -2            | -1            | 0 | 1 | 2 |
| g(x) | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 |

- Las curvas son simétricas respecto de la recta  $y = x$ . Las imágenes de  $g(x)$  corresponden a las pre-imágenes de  $f(x)$ .

- Dom  $f(x) = ] 0, \infty[$   
Rec  $f(x) = ] -\infty, \infty[$
  - Dom  $g(x) = ] -\infty, \infty[$   
Rec  $g(x) = ] 0, \infty[$
  - Dom  $f(x) = \text{Rec } g(x)$   
Rec  $f(x) = \text{Dom } g(x)$

- Se debe despejar  $x$  en función de  $y$  al multiplicar y por 5, sumarle 7 y dividir todo por 3.
  - Se debe despejar  $x$  en función de  $y$  al restar 7 a  $y$ , multiplicar la diferencia por 3 y dividir todo por 2.
  - Corresponden a las operaciones opuestas realizadas al valor de  $x$

- 4.
- Sí, porque sus gráficas son simétricas respecto de  $y = x$ , el  $\text{dom } f(x) = \text{rec } g(x)$  y el  $\text{rec } f(x) = \text{dom } g(x)$ .
  - Sí, el  $\text{dom } f(x) = \text{rec } g(x) = \mathbb{R} - \{-2\}$  y el  $\text{rec } f(x) = \text{dom } g(x) = \mathbb{R} - \{0\}$ .
  - $f(2) = 0,25$ ,  $g(0,25) = 2$ , la imagen de  $g(x)$  es la preimagen de  $f(x)$ .

Pág. 73

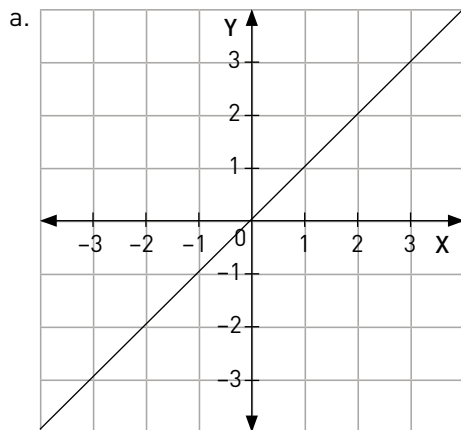
### Taller de habilidades

- Pregunta abierta.
- No, porque se pide las dimensiones y no el valor de la incógnita.
  - Argumentar y comunicar, porque no comunicó la respuesta ni la justificó.
- 23 años
  - Al resolver la ecuación y sumarle 3 a la solución para responder la pregunta.
  - Pregunta abierta.

Pág. 74

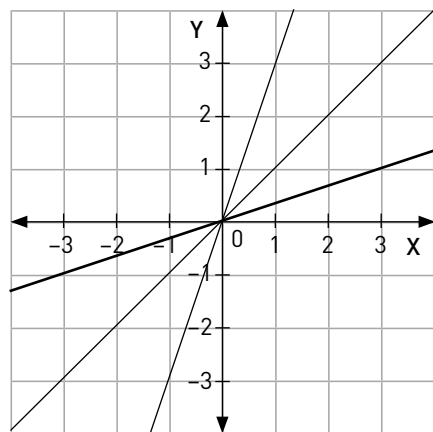
Tema 2 ¿Cómo se relaciona la gráfica de una función y la de su inversa?

1.



b.  $\text{dom } f(x) = \mathbb{R}$ ,  $\text{rec } f(x) = \mathbb{R}$

2.

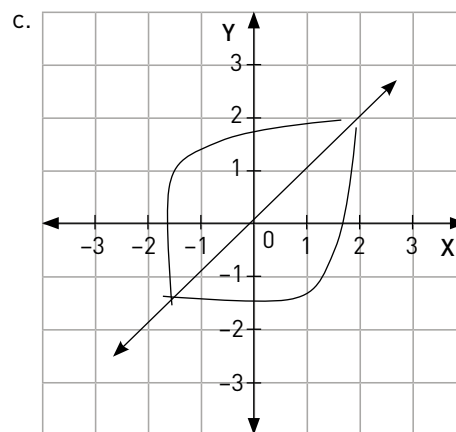
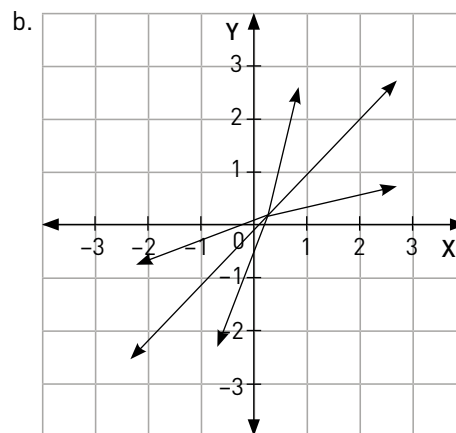
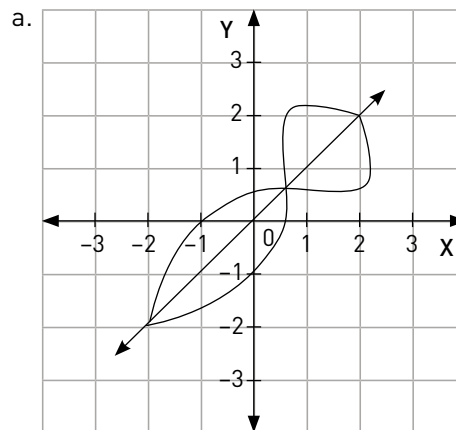


a.  $r(x) = 3f(x)$ ,  $s(x) = \frac{1}{3}f(x)$ .

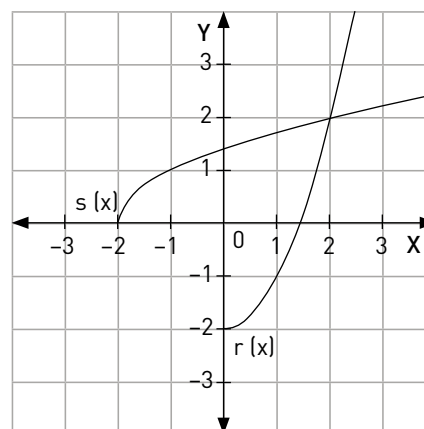
b.  $90^\circ$

c. las curvas  $r(x)$  y  $s(x)$  coinciden.

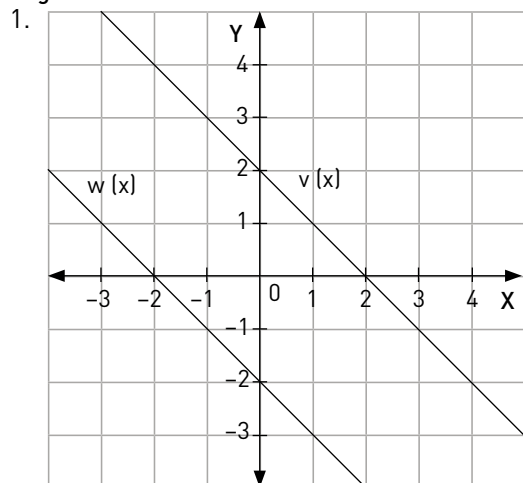
3.



4.

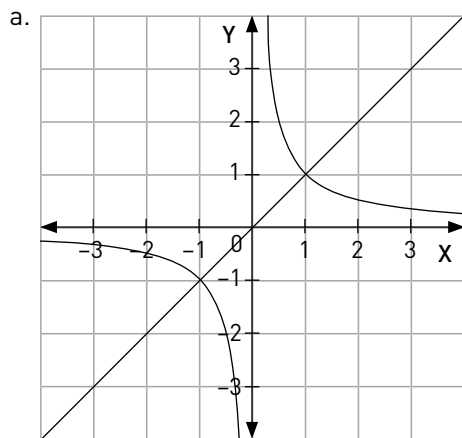


Pág. 75



- a. No, ya que no son simétricas respecto de  $y = x$   
 b.  $v(x) = h(x) + 2$   
 $w(x) = h(x) - 2$

2.



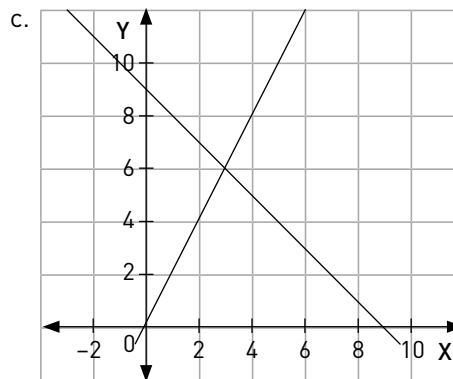
- b.  $f^{-1}(x) = x$   
 $g^{-1}(x) = \frac{1}{x}$   
 c.  $f(x) = -x + 2$   
 $g(x) = -x - 2$

3.

- a. No, porque a los valor de  $x$  la corresponderían 2 valores de  $y$ .  
 b. Se debe restringir el recorrido de las funciones.

4. 3 días  
 8 días

- a.  $f(x) = 9 - x$   
 $g(x) = 2x$   
 b. No



Pág. 76

Tema 3 ¿Cómo es la función inversa de funciones lineales y afines?

1.

- a.  $r(x)^{-1} = x - 3$   
 b.  $s(x)^{-1} = \frac{x}{2}$   
 c.  $t(x) = \frac{x-3}{2}$   
 d.  $r(x)$  función afín  
 $s(x)$  función lineal  
 $t(x)$  función afín

e.

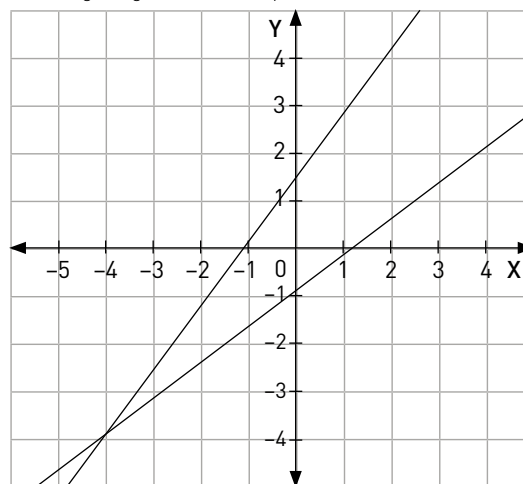
$f(x) = ax$	$f^{-1}(x) = \frac{x}{a}$	$a \neq 0$
$g(x) = x + b$	$g^{-1}(x) = x - b$	$b \in \mathbb{R}$
$h(x) = ax + b$	$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$	$a \neq 0$

2.

- a.  $f$   
 b.  $e$   
 c.  $b$   
 d.  $a$   
 e.  $d$   
 f.  $c$

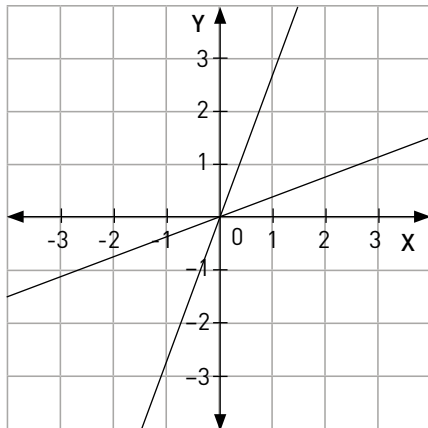
3.

a.  $f(x) = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}, f^{-1}(x) = \frac{3x-4}{4}$

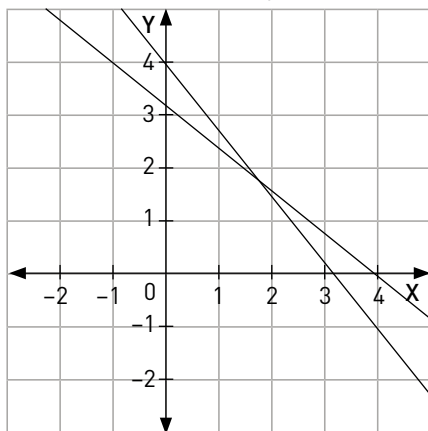




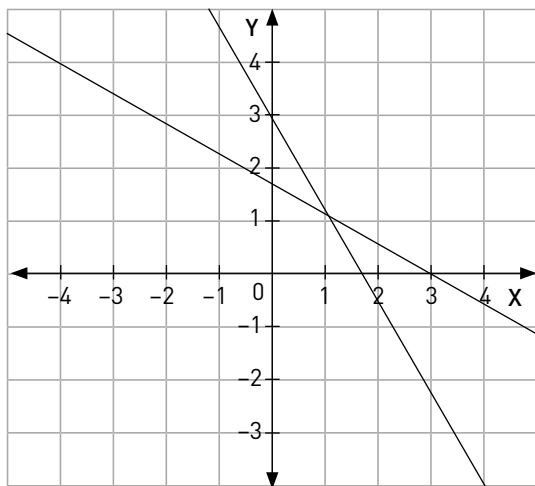
b.  $g(x) = \frac{8}{3}x, g^{-1}(x) = \frac{3}{8}x$



c.  $h(x) = \frac{-5x+16}{4}, h^{-1}(x) = \frac{-4x+16}{5}$



d.  $j(x) = \frac{-4x+12}{7}, j^{-1}(x) = \frac{-7x+12}{4}$



Pág. 77

1.

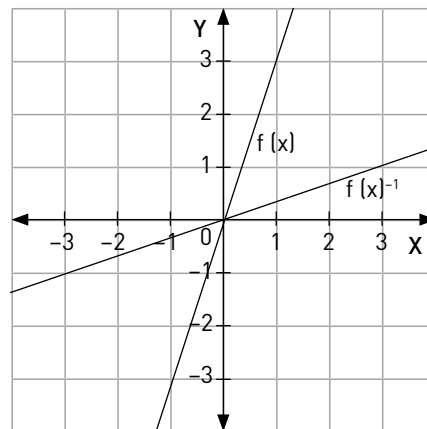
- 130 es el costo por kilómetro recorrido y 200 es la tarifa mínima.
- La diferencia recorrida.
- $f^{-1}(x) = \frac{x-200}{130}$
- Para conocer la distancia recorrida respecto del dinero pagado.

2. Respuesta variable: El día sábado desde las 16 h a las 22 h, se emite la maratón de mi serie favorita, si en una hora se transmiten 3 capítulos de la serie sin pausas ni cortes ¿Cuántos capítulos de la serie serán transmitidos?

a.  $f(x) = 3x, f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$

b. Si he estado viendo la serie durante 4 horas ¿Cuántos capítulos he visto?

c.



3.

a.  $f(x) = 19x$

b.  $f^{-1}(x) = \frac{x}{19}$

c. Respuesta variable: Si Paz pagó \$437 ¿Cuántas fotocopias sacó?  $f^{-1}(437) = 23$  fotocopias.

4.

a.  $f(x) = \frac{2}{1000}x + 5$

b.  $f^{-1}(x) = \frac{1000}{2}(x - 5) = 500(x - 5)$

c. Respuesta variable: Si uno de los gatos fue vacunado con 7cc de la solución, ¿cuánto pesa?,  $f^{-1}(7) = 1000$  kilogramos.

5.

a.  $f(x) = -2x + 16$

b. Con los puntos (2,7) y (6,5)

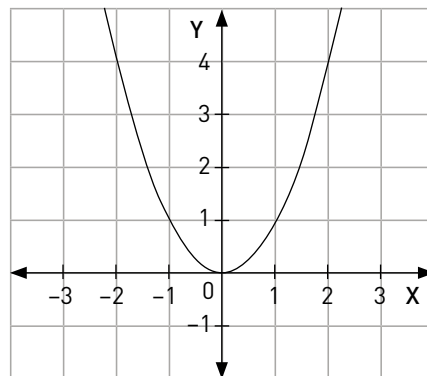
c.  $f^{-1}(x) = \frac{-x+16}{2}$

Pág. 78

Tema 4 ¿Cuál es la función inversa de la función cuadrática?

1.

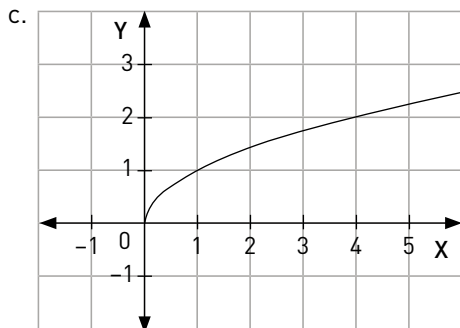
a.



b.  $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$\text{Rec } f(x) = [0, \infty[$

- 2.
- Se debe restringir el dominio de  $f(x)$  para que sea biyectiva y luego, extraer raíz cuadrada a  $x$ .
  - $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$



- Los valores negativos de  $x$  para,  $f(x)^{-1}$  no tienen solución real.
  - Dom  $f(x) = [0, \infty[$   
Rec  $f(x) = [0, \infty[$
- 3.
- $p^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
  - $q^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$
  - $r^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$
  - $s^{-1}(x) = 3\sqrt{x-1}$
  - $t^{-1}(x) = 5\sqrt{x}$

- 4.
- |                        |                      |
|------------------------|----------------------|
| a. Otra función.       | d. Otra función.     |
| b. Función cuadrática. | e. No tiene inversa. |
| c. Función cuadrática. |                      |

#### Pág. 79

- Sí, determinando el radio que tiene un círculo de área (c)
- $A(x) = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$
  - $A^{-1}(x) = 2\sqrt{\frac{x}{\sqrt{3}}}$
  - Para conocer el lado de un triángulo equilátero conocida su área.
- $g(x)$  corresponde a una traslación dos unidades hacia arriba de  $f(x)$ .
  - $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ,  $g^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$
  - $g^{-1}(x)$  corresponde a una traslación de dos unidades hacia la derecha  $f(x)$ .
- Al ser la gráfica de una parábola, existe la posibilidad de que tenga una inversa.
  - $f(x) = -1,125x^2 + 4,5$
- En el segundo cuadrante.
- Ninguno

#### Pág. 80

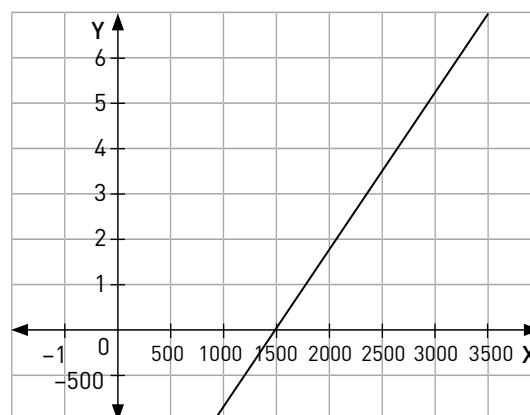
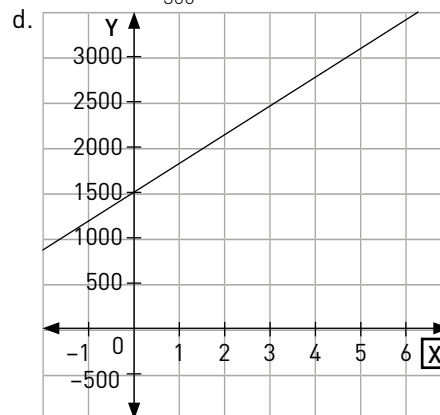
##### ¿Qué aprendí?

- $\mathbb{R} - \{-4\}$
  - $\mathbb{R} - \{2\}$
  - $f(x)^{-1} = \frac{-1-4x}{x-2}$
- A:  $[-1, \infty[$  y B:  $[0, \infty[$
- a. y b
- c. y d.

#### Pág. 81

##### Profundización

- 2
  - a + b
- $C(x) = 300x + 1500$
  - Tendrá 5 ingredientes.
  - $C^{-1}(x) = \frac{x-1500}{300}$



- El valor del departamento.
  - $d(x) = 0,1x$
  - $c(x) = 0,95x - 100000$
  - Una función representa el descuento realizado al departamento y la otra función el costo.
  - $d^{-1}(x) = \frac{10x}{1}$   
 $C^{-1}(x) = \frac{20}{19}(x + 100000)$

#### Pág. 82

##### Matemática en acción

Las respuestas del taller dependen de los resultados obtenidos por los y las estudiantes en el taller propuesto en el texto.

Pág. 83

Sintetizo

**Lección 3 Tema 1**

- Es una forma de comparar cantidades, relacionando una magnitud con el todo que le corresponde.

**Lección 3 Tema 2**

- Los depósitos bancarios y los descuentos comerciales.
- \$ 4000
- 20%

**Lección 4 Tema 1**

- Una ecuación cuadrática se caracteriza porque puede tener dos soluciones, una o ninguna en el conjunto de los reales. Cualquier ecuación cuadrática se puede expresar de la siguiente forma:  $ax^2 + bx + c = 0$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales cualesquiera y  $a$  es distinto de cero.
- Si,  $x^2 - x - 7 = 0$
  - No
- $a = 1, b = -1, c = -7$
  - $a = 0, b = 1, c = -30$

**Lección 4 Tema 2**

- Cada factor se debe igualar a 0 y despejar el valor de  $x$ .
- $(x - 4)(x + 2) = 0, x = 4$  y  $x = -2$
  - $(x + 3)(x - 1) = 0, x = -3$  y  $x = 1$
  - $(x + 6)(x + 5) = 0, x = -6$  y  $x = -5$
  - $(x - 11)(x - 10) = 0, x = 11$  y  $x = 10$

Pág. 84

**Lección 4 Tema 3**

- $x^2 - 6x + 9 - 9 + 8 = 0; (x - 3)^2 - 1 = 0;$   
 $((x - 3) - 1)((x - 3) + 1) = 0; (x - 2)(x - 4) = 0; x = 2$  y  $x = 4$

**Lección 4 Tema 4**

- $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Si  $\Delta > 0$  hay 2 raíces reales distintas  
 Si  $\Delta = 0$  hay 2 raíces reales iguales  
 Si  $\Delta < 0$  hay 2 raíces no reales distintas
- $x_1 = 0,5, x_2 = \frac{1}{3}$
  - $x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{3}$

**Lección 5 Tema 1**

- Una función real  $f$  cuya regla de formación se pueda expresar como  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , con  $a, b, c$  perteneciente a los reales y  $a \neq 0$ , se llama función cuadrática. Su dominio es los reales, mientras que su recorrido es un intervalo de los reales.

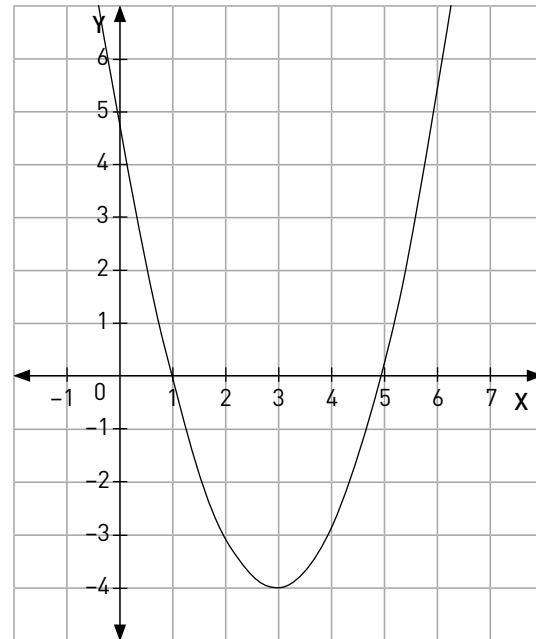
**Lección 5 Tema 2**

- Parábola

- Respuesta variable:  $f(x) = (x - 3)^2 - 4$

Vértice:  $(3, -4)$

Ceros:  $(1, 0)$  y  $(5, 0)$



**Lección 5 Tema 3**

- Parábola

Pág. 85

**Lección 6 Tema 1**

- Se debe considerar si la función es biyectiva, es decir, sus gráficas deben ser simétricas respecto de  $y = x$ .  
 $\text{Dom } f(x) = \text{Rec } f^{-1}(x), \text{Rec } f(x) = \text{Dom } f^{-1}(x)$
- Solo  $f(x)$
- Si, restringiendo el dominio para que la función sea biyectiva.
- $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$   
 $\text{Rec } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

**Lección 6 Tema 2**

- Corresponden a una reflexión respecto de  $y = x$
- Las gráficas de  $k(x)$  y su inversa son coincidentes, ya que

$$k^{-1}(x) = k(x)$$

x	k(x)
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
0	
1	1
2	$\frac{1}{2}$

Se restringió el dominio de  $k(x)$  para definir la función inversa.

- Si
  - No, porque las gráficas no corresponden a funciones.

**Lección 6 Tema 3**

- Una función lineal tiene la forma  $f(x) = mx$ , y una función afín  $g(x) = mx + b$ .
- Una función lineal interseca en el origen, y una función afín,  $f(x) = mx + b$ , interseca el eje Y en el punto  $(0, b)$ .
- $f^{-1}(x) = 3x - 7$

**Pág. 86**

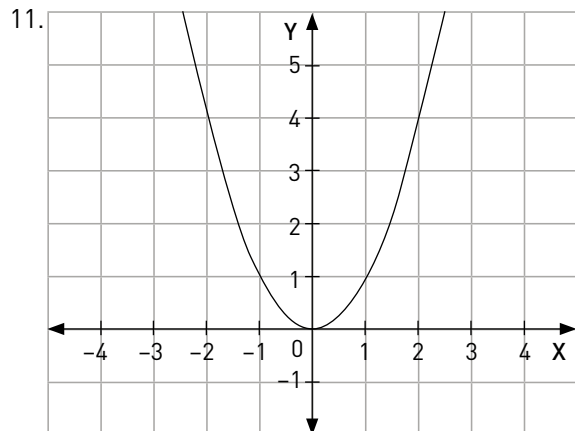
**¿Qué aprendí?**



3.
  - a.  $f(x) = 1000 \cdot 0,95^x$
  - b. En el contexto del problema, el valor de  $x$  no puede ser negativo, porque cambia el valor del índice de variación.
  - c. En el contexto del problema  $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}_0^+$ ,  $\text{Rec } f(x) = ]0, \infty[$
4.
  - a.  $C(x) = 150x$
  - b.  $150x \cdot (1,02 - 0,02x)$
  - c. En una verdulería el precio está condicionado por un descuento el cual ocurre al comprar más de una manzana.
  - d. Una gráfica corresponde a una función lineal y la otra es una función cuadrática.
5.
  - a. 1 año \$4 900 000  
2 años \$4 802 000  
3 años \$4 705 960  
5 años \$4 519 604
  - b. En 2 años

**Pág. 87**

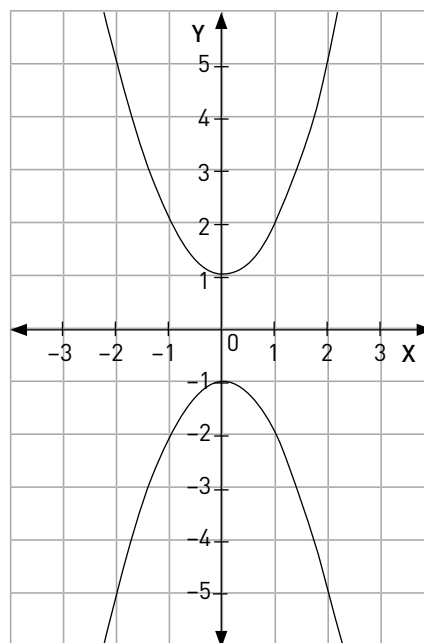
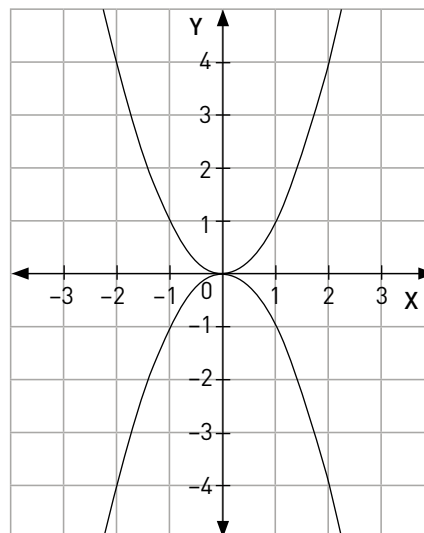
6.
  - a.  $x^2 + 3x - 54 = 0$
  - b. 9 m de largo y 6 m de ancho.
  - c. 30 m de perímetro.
7.
  - a.  $x_1 = -3, x_2 = 3$
  - b.  $x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{2}$
  - c.  $x_1 = 3, x_2 = 6$
8.
  - a.  $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$
  - b.  $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$
  - c.  $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$
9.
  - a. 6, -6
  - b. 3, -3
10. Si  $\Delta > 0$  hay 2 raíces reales distintas  
Si  $\Delta = 0$  hay 2 raíces reales iguales  
Si  $\Delta < 0$  hay 2 raíces no reales distintas



12.
  - a.  $x_1 = -1, x_2 = 3$
  - b.  $x_1 = 1, x_2 = 1$
  - c.  $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$
13. Respuesta variable: La función tiene la forma  $f(x) = |x + d|^2$ , con  $d \in \mathbb{R}$

**Pág. 88**

14. El signo del parámetro  $a$  cambia la concavidad de la parábola. Para  $a > 0$  la concavidad es hacia arriba y para  $a < 0$  la concavidad es hacia abajo.



15.
  - a.  $P1(\frac{1}{2}, 0), P2(2, 0)$
  - b.  $P1(-2, 0), P2(1, 0)$
  - c.  $V(-2, 0)$
  - d. Calcular el discriminante y luego sus raíces por fórmula general.
16.  $y = 4(x - 1)^2 - 3$

17.

- a.  $x^2 - x - 6 = 0$
- b.  $(x - 3)(x + 2) = 0$
- c.  $x = 3$  y  $x = -2$

d.

	-2	3
$(x - 3)$	-	+
$(x + 2)$	-	+
$(x - 3)(x + 2)$	+	+

e. El signo cambia entre los ceros a negativo, por lo que entre los ceros, la curva es negativa.

18.

- a. Sí
- b. No
- c. Sí
- d. No

**Pág. 90**

19. a y c.

20. Sí

x	-1	0	1	2
f(x)	4	3	2	1

X	4	3	2	1
f <sup>-1</sup> (x)	-1	0	1	2

21.

→ [4]:  $f(x) = x^2 + 2$  18 \_\_\_\_\_

↑ [11]: 122 \_\_\_\_\_

→ [-3]:  $f(x) = 4x^2 - 3$  33 \_\_\_\_\_

↑ [0,5]: -3 \_\_\_\_\_

→ [-0,2]:  $f(x) = 2x + 1$  0,6 \_\_\_\_\_

↑ [0,5]: 1 \_\_\_\_\_

22.

- a. Sí
- b. No
- c. No

23. Luego de restringir el dominio de cada función para que sean biyectivas se obtienen las siguientes funciones inversas.

- a.  $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{a}}$
- b.  $g^{-1}(x) = \sqrt{x - b}$
- c.  $h^{-1}(x) = \sqrt{x} - c$
- d.  $j^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x - b}{a}} - c$

## Unidad 3: Geometría

### Lección 7: La esfera

**Pág. 91**

**Lección 7 La Esfera**

1.

- a. 20
- b. 18,3
- c. 18,256
- d. 18

2.

- a.  $2 < \sqrt{7} < 3$
- b.  $11 < \sqrt[3]{131} < 12$
- c.  $2 < \sqrt[3]{12} < 3$
- d.  $2 < \sqrt[3]{23} < 3$

3.

- a. C = 37,68 cm; A = 113,04 cm<sup>2</sup>
- b. C = 25,12 cm; A = 50,24 cm<sup>2</sup>

4. P = 16,11 cm; A = 15,26 cm<sup>2</sup>

5.

- a. A = 904,32 cm<sup>2</sup>; V = 203,72 cm<sup>3</sup>
- b. A = 169,56 cm<sup>2</sup>; V = 169,56 cm<sup>3</sup>
- c. A = 2009,6 cm<sup>2</sup>; V = 3215,36 cm<sup>3</sup>
- d. A = 1130,4 cm<sup>2</sup>; V = 2712,96 cm<sup>3</sup>

6.

- a. A = 4069,44 cm<sup>2</sup>; V = 10 851,84 cm<sup>3</sup>
- b. A = 452,16 cm<sup>2</sup>; V = 401,92 cm<sup>3</sup>

**Pág. 92**

**Tema 1 ¿Qué es una esfera?**

1.

- a. F
- b. V
- c. V
- d. V
- e. V

2.

- a. Sí, r = 3 cm.
- b. No
- c. No
- d. Sí, r = 13 cm.

3.

- a. Cara plana, casquete esférico.
- b. Círculo máximo y centro, semiesfera.

**Pág. 93**

1. 6 cm

2. 94,99 cm<sup>2</sup>

3. 6 cm

4. 1,5 cm

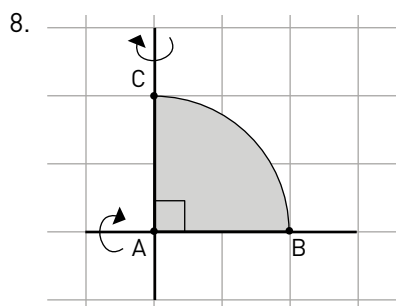
5.

- a. 2,5 cm
- b. 5 cm

6.

- a. 48 cm
- b. 1808,64 cm<sup>2</sup>

7. Se genera un sector de la esfera al que se le quitaron dos conos de altura igual al radio de la esfera.



- a. 2 : 3  
 b. 4 : 9  
 c.  $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$   
 9. 56,25%  
 10. 9%

**Pág. 94**

**Tema 2** ¿Cómo se calcula el volumen de la esfera?

1.  
 a. 33,49 cm<sup>3</sup>  
 b. 523,3 dm<sup>3</sup>  
 c. 2143,57 m<sup>3</sup>  
 d. 14 130 cm<sup>3</sup>  
 e. 40,69 mm<sup>3</sup>  
 f. 904,32 m<sup>3</sup>  
 2.  
 a. 267,95 cm<sup>3</sup>  
 b. 133,97 dm<sup>3</sup>  
 c. 3617,28 cm<sup>3</sup>  
 d. 56,52 mm<sup>3</sup>  
 3.  
 a. 133,97 m<sup>3</sup>  
 b. 904,23 mm<sup>3</sup>  
 4.  
 a. 2 cm  
 b. 12 cm  
 c. 1,2 mm  
 d. 1,2 dm  
 5. 267,95 cm<sup>3</sup>  
 6. 409,6%  
 7.  
 a. 452,16 cm<sup>3</sup>  
 b. 904,32 cm<sup>3</sup>  
 8. 2 conos  
 9. 113,04 cm<sup>3</sup>

**Pág. 95**

1. El volumen se reduce a la octava parte.  
 2. 706,5 mm<sup>2</sup>  
 3.  $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} V_{\text{cono}} = 2\sqrt[3]{6}$   
 4. 37,68 cm<sup>3</sup>  
 5.  
 a. 195,33 cm<sup>3</sup>  
 b. 72,61 cm<sup>3</sup>  
 6. V(Tierra) = 6,64V(Marte)  
 7. 3471,22 kilómetros  
 8.  $2\sqrt[3]{6}$  cm  
 9. Sí, faltaría 3186,67 cm<sup>3</sup> para llenar la esfera.  
 10. 214,36 cm<sup>3</sup>  
 11. 64,3 kilogramos

12. 150,72 cm<sup>3</sup>  
 13. 53,3 mm de largo.  
 14.  
 a.  $\frac{4}{3} \pi r^3 \frac{5}{12}$   
 b.  $2\pi r^3$   
 c.  $V_{\text{hielos}} = \frac{2}{3} V_{\text{vaso}}$   
 d. Sí, faltarían llenar  $\frac{2}{3} \pi r^3 \text{cm}^3$ .

**Pág. 96** ¿Cómo se calcula el área de la esfera?

1.  
 a. 162,78 cm<sup>2</sup>  
 b. 1017,36 dm<sup>2</sup>  
 c. 50,24 m<sup>2</sup>  
 d. 1808,64 cm<sup>2</sup>  
 e. 28,26 mm<sup>2</sup>  
 f. 4,52 m<sup>2</sup>

2.

Radio	Diámetro	Área
3 cm	6 cm	113,04 cm <sup>2</sup>
6,4 dm	12,8 dm	514,46 dm <sup>2</sup>
5 mm	10 mm	314,00 dm <sup>2</sup>
4,5 mm	9 mm	254,34 mm <sup>2</sup>
8 dm	16 dm	803,84 dm <sup>2</sup>
1,2 m	2,4 m	18,09 m <sup>2</sup>

3.  
 a. 1256 cm<sup>2</sup>  
 b. 615,44 cm<sup>2</sup>  
 c. 1139,82 mm<sup>2</sup>  
 d. 763,02 cm<sup>2</sup>  
 e. 226,08 cm<sup>2</sup>  
 4.  
 a. 150,72 m<sup>2</sup>  
 b. 1808,64 mm<sup>2</sup>  
 5. La superficie de una esfera de radio r es igual a la superficie lateral de un cilindro de radio basal r y altura 2r.

Radio	Esfera (área)	Cilindro (área)
3 cm	36π cm <sup>2</sup>	36π cm <sup>2</sup>
2 cm	16π cm <sup>2</sup>	16π cm <sup>2</sup>
6 cm	144π cm <sup>2</sup>	144π cm <sup>2</sup>
8 cm	256π cm <sup>2</sup>	256π cm <sup>2</sup>
10 cm	400π cm <sup>2</sup>	400π cm <sup>2</sup>

**Pág. 97**

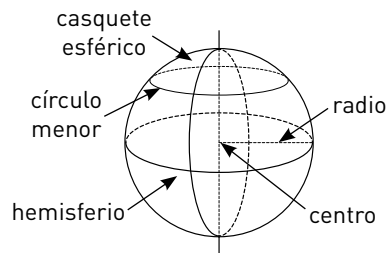
1. 73,42 cm<sup>3</sup>  
 2. Disminuye en un 93,75%.  
 3. 71,21 mm<sup>2</sup>  
 4. 8 cm  
 5. 16,58 cm<sup>2</sup>  
 6. 964,7 litros  
 7. 271,71 m<sup>2</sup>  
 8.  
 a. 0,66 m<sup>2</sup>  
 b. 0,139 m<sup>3</sup>  
 9. 113,04 cm<sup>2</sup>  
 10.  $\frac{256}{3} \pi \text{cm}^3$  y  $288\pi \text{cm}^3$

11.  
 a.  $256\pi \text{ cm}^2$   
 b.  $256\pi \cdot 0,85^4 \text{ cm}^2$   
 c.  $A(n) = 256\pi \cdot 0,85^{2n-2}$

**Pág. 98**

**¿Cómo voy?**

1.



2.  
 a. Error:  $50,24 \text{ cm}^2$  corresponde a la superficie de la esfera. Se utiliza el diámetro para el cálculo del área. Corrección: El área del círculo máximo es  $12,56 \text{ cm}^2$ .  
 b. Error: El diámetro de la esfera obtenida no corresponde. Corrección: Se obtiene una esfera de diámetro  $11,6 \text{ cm}$ .
3.  
 a.  $904,32 \text{ cm}^3$   
 b.  $3052,08 \text{ cm}^3$
4.  $1079,57 \text{ cm}^2$
5.  $64,42 \text{ m}^3$
6.  
 a.  $803,84 \text{ cm}^2$   
 b.  $9452,16 \text{ cm}^2$
7.  $706,5 \text{ cm}^2$
8.  $24 \text{ cm}$

**Pág. 99**

**Profundización**

1.  
 a.  $8115,33 \text{ cm}^3$   
 b.  $5024 \text{ mm}^2$
2.  $151,98 \text{ cm}^2$
3.  
 a.  $5,089 \cdot 10^8 \text{ km}^2$   
 b.  $1,74 \cdot 10^8 \text{ km}^2$
4.  
 a.  $3\sqrt{2}$   
 b.  $56,52 \text{ u}^2$   
 c.  $39,96 \text{ u}^3$

**Pág. 100**

## Lección 8: Razones trigonométricas

1.  $\sqrt{106} \text{ cm}$   
 2.  $\sqrt{7} \text{ cm}$   
 3. b, c y d  
 4.  $4 \text{ m}$   
 5.  $4,32 \text{ cm}$   
 6. La razón es r.

7.

- A = (2, 1)  
 B = (2, 5)  
 C = (-3, 3)  
 D = (-6, 0)  
 E = (-1, 1)  
 F = (-2, -4)  
 G = (1, -2)  
 H = (4, -2)

**Pág. 101**

**Tema 1 ¿Qué son las razones trigonométricas?**

1.

- a.  $\frac{a}{b}$   
 b.  $\frac{c}{b}$   
 c.  $\frac{a}{c}$   
 d.  $\frac{c}{b}$   
 e.  $\frac{a}{b}$   
 f.  $\frac{c}{a}$

2.

a.

	$\alpha$	$\beta$
seno	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
coseno	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
tangente	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$

b.

	$\alpha$	$\beta$
seno	$\frac{15}{17}$	$\frac{8}{17}$
coseno	$\frac{8}{17}$	$\frac{15}{17}$
tangente	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{15}$

c.

	$\alpha$	$\beta$
seno	$\frac{5}{13}$	$\frac{12}{13}$
coseno	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{13}$
tangente	$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{5}$

d.

	$\alpha$	$\beta$
seno	0,46	0,88
coseno	0,88	0,46
tangente	0,51	1,92

3.

- a. F  
 b. F  
 c. V  
 d. F  
 e. F  
 f. V

4.

	17°	73°	24°	66°
seno	0,29	0,96	0,41	0,91
coseno	0,96	0,29	0,91	0,41

- a.  $\text{seno } 17^\circ = \text{coseno } 73^\circ$  y  $\text{seno } 73^\circ = \text{coseno } 17^\circ$ .  
 b. El seno de un ángulo es igual al coseno del complemento del ángulo.  
 c.  $\cos(90 - a) = \text{sen}(a)$ ,  $\text{sen}(90 - a) = \cos(a)$

**Pág. 102**

5.  
 a. 85,71  
 b. 0,247  
 c. 0,6
6.  
 a. 0,447  
 b. 0,612
1. 10 metros  
 2. 26 metros  
 3. 200 metros
4.  
 a.  $\left(\frac{500\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$  m  
 b.  $\left(\frac{1000}{1+\sqrt{3}}\right)$  m y  $\left(\frac{500\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}\right)$  m.

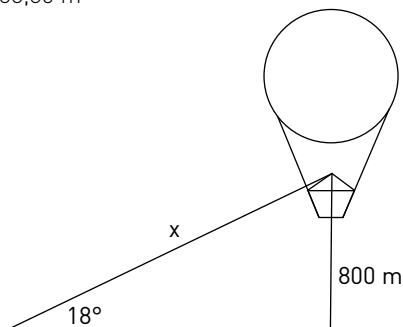
**Pág. 103**

5. 438,81 m  
 6. 227,4 m  
 7. 186,68 m  
 8. 112,67 m  
 9. 9,08 m  
 10. 1352,29 m  
 11. 42,89 m  
 12. 10,43 m  
 13. 17,28 m  
 14. 76,6 cm de largo y 64,3 cm de ancho.  
 15. 47,3 mm  
 16. 43,63 cm  
 17. 33,72 cm  
 18. 10,46 cm

**Pág. 104**

**Taller de habilidades**

4.  $x = 2588,85$  m



**Pág. 105**

**Herramientas tecnológicas**

1.  
 a.  $\text{sen } 22^\circ = 0,3746\dots$   
 $\text{cos } 68^\circ = 0,3746\dots$   
 $\tan 22^\circ = 0,4040\dots$   
 b. Ingreso mal el ángulo a la calculadora, corresponde al  $\cos(63,8^\circ)$ .  
 c.  $2,0228756\dots \approx 2,02$  cm.  
 d. despejar mal el valor de a, debe ser  $a = 5,4\text{sen}(22^\circ)$ .
2.  
 a.  $\alpha = 33,69^\circ$ ;  $\beta = 56,31^\circ$

**Pág. 106**

- b. Camila tiene el resultado correcto.  
 3. Tomás tiene el resultado correcto. Matilda despeja mal el valor de y respecto de la  $\text{tg}(50^\circ)$ .

**Pág. 107**

**Tema 2 ¿En qué se aplican las razones trigonométricas?**

1.  
 a.  $AB = \frac{40}{3}\sqrt{3}$  mm;  $BC = \frac{20}{3}\sqrt{3}$  mm;  $\beta = 30^\circ$ .  
 b.  $DE = \frac{10}{3}\sqrt{3}$  mm;  $DF = \frac{20}{3}\sqrt{3}$  mm;  $\alpha = 60^\circ$ .  
 c.  $AB = 15$  cm;  $BC = 15$  cm;  $\gamma = 45^\circ$ .  
 d.  $DF = 40,93$  m;  $EF = 38,46$  m;  $\epsilon = 20^\circ$ .  
 e.  $GH = 7,88$  cm;  $HI = 6,15$  cm,  $\alpha = 52^\circ$ .  
 f.  $CB = 13$  cm;  $\alpha = 67,38^\circ$ ;  $B = 22,62^\circ$ .  
 g.  $CB = \sqrt{245}$  cm;  $\gamma = 41,8^\circ$ ;  $\alpha = 48,2^\circ$ .  
 h.  $AB = 7,55$  cm;  $AC = 11,74$ ;  $\gamma = 40^\circ$ .

2.

a.

	$\alpha$	$\beta$
seno	0,819	0,572
coseno	0,572	0,819
tangente	1,431	0,698

b.

	$\alpha$	$\beta$
seno	0,653	0,758
coseno	0,758	0,653
tangente	0,862	1,161

c.

	$\alpha$	$\beta$
seno	0,927	0,374
coseno	0,374	0,927
tangente	2,475	0,404

d.

	$\alpha$	$\beta$
seno	0,819	0,573
coseno	0,573	0,819
tangente	1,428	0,701

e.

	$\alpha$	$\beta$
seno	0,734	0,678
coseno	0,678	0,734
tangente	1,083	0,922

f.

	$\alpha$	$\beta$
seno	0,579	0,815
coseno	0,815	0,579
tangente	0,711	1,407



g.

	$\alpha$	$\beta$
seno	0,868	0,496
coseno	0,496	0,868
tangente	1,75	0,571

h.

	$\alpha$	$\beta$
seno	0,8	0,6
coseno	0,6	0,8
tangente	1,3	0,75

### Pág. 108

3.

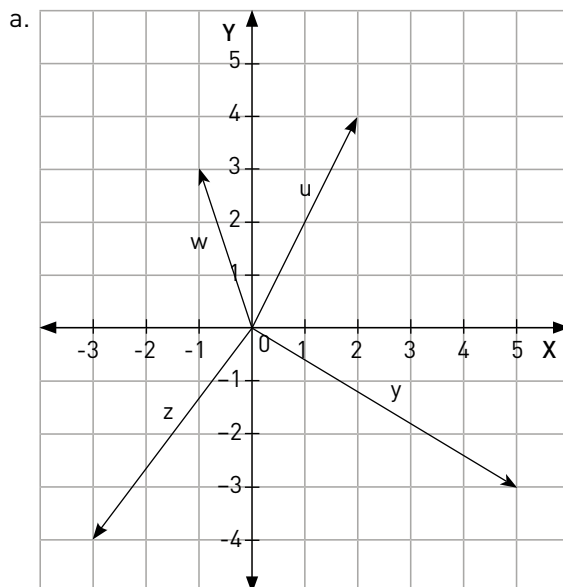
- a.  $(\text{sen}\alpha)^2 + (\text{cos}\alpha)^2 = 1$ ;  $(\text{sen}\beta)^2 + (\text{cos}\beta)^2 = 1$   
 b.  $(\text{sen}\alpha)^2 + (\text{cos}\alpha)^2 = 1$ ;  $(\text{sen}\beta)^2 + (\text{cos}\beta)^2 = 1$   
 c.  $(\text{sen}37^\circ)^2 + (\text{cos}37^\circ)^2 = 1$ ;  $(\text{sen}37^\circ)^2 + (\text{cos}37^\circ)^2 = 1$   
 d.  $(\text{sen}\alpha)^2 + (\text{cos}\alpha)^2 = 1$

- 30°
- 21,79 cm
- 5301,9 m
- 19,598 m de radio circunscrito y 18,106 m de radio inscrito.
- 29,84 cm de lado y 36,03 cm de apotema.
- 14,422 km
- 13,065 m
- 37,502 cm
- 118,2 mm
- 2,3346 km
- 2,4228 km

### Pág. 109

Tema 3 ¿Cómo se determinan los componentes de un vector?

1.



- b.  $\vec{u}$ : 1°;  $\vec{v}$ : 4°;  $\vec{w}$ : 2°;  $\vec{z}$ : 3°  
 c.  $|\vec{u}| = 4,47$ ;  $|\vec{v}| = 5,83$ ;  $|\vec{w}| = 3,16$ ;  $|\vec{z}| = 5$   
 d.  $\vec{u}$ : 63,43°;  $\vec{v}$ : 329,03°;  $\vec{w}$ : 108,43°;  $\vec{z}$ : 233,13°

2.

- a.  $p = (21,65; 12,5)$   
 b.  $u = (-12,02; 12,02)$   
 c.  $v = (40,56; 10,87)$   
 d.  $z = (7,76; -28,97)$   
 e.  $w = (60, -103,92)$

### Pág. 110

3.

- a.  $a_x = 3, a_y = 2$   
 b.  $b_x = 1, b_y = 2$   
 c.  $c_x = -1, c_y = 3$   
 d.  $d_x = -2, d_y = 1$   
 e.  $e_x = -3, e_y = -1$   
 f.  $f_x = 2, f_y = 3$

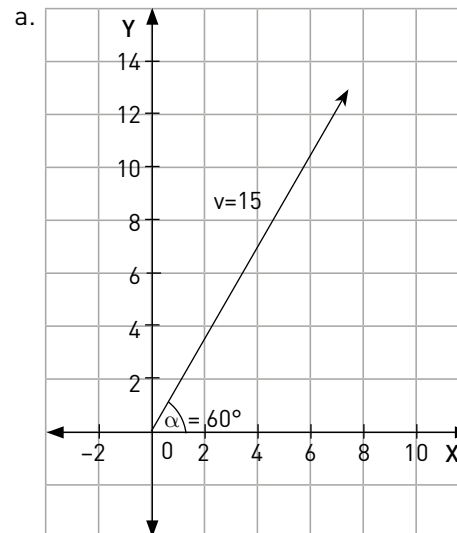
4.

- a.  $\vec{a} = (\sqrt{13} \cos 33^\circ, \sqrt{13} \sin 33^\circ)$   
 b.  $\vec{b} = (\sqrt{5} \cos 63^\circ, \sqrt{5} \sin 63^\circ)$   
 c.  $\vec{c} = (\sqrt{10} \cos 108^\circ, \sqrt{10} \sin 108^\circ)$   
 d.  $\vec{d} = (\sqrt{5} \cos 153^\circ, \sqrt{5} \sin 153^\circ)$   
 e.  $\vec{e} = (\sqrt{10} \cos 198^\circ, \sqrt{10} \sin 198^\circ)$   
 f.  $\vec{f} = (\sqrt{13} \cos 303^\circ, \sqrt{13} \sin 303^\circ)$

5.

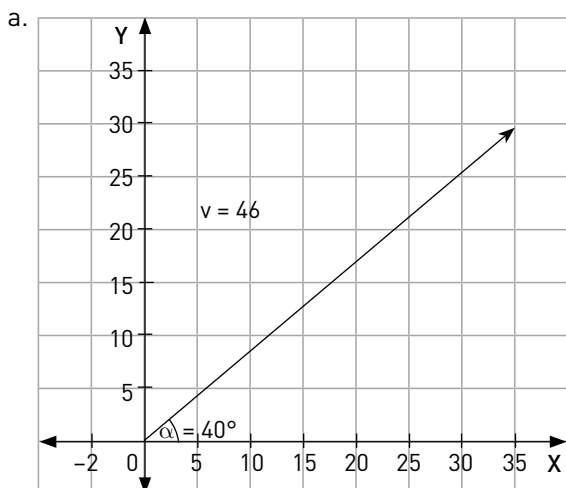
- a. (4,69; 1,71)  
 b. (2,12; 2,12)  
 c. (1; 1,73)  
 d. (-2,93; 0,62)  
 e. (-3,11; -11,59)

1.



- b.  $\vec{v} = (7, 5; 12, 99)\text{m/s}$

2.



b.  $\vec{F} = (35, 24; 29, 57) \text{ N}$ ;  $B = \sqrt{306} \text{ cm}$ ;

Pág. 111

3.  $\vec{V} = (12; 23,06) \text{ m/s}$ ;  $\angle = 62, 51^\circ$ .

4.  $\vec{S} = (18, 5) \text{ m}$

5.  $|\vec{V}| = 6\sqrt{5} \text{ m/s}$ ;  $\angle = 154, 43^\circ$ .

6.  $|\vec{F}_R| = 84, 05 \text{ N}$ ;  $\angle = 4, 5^\circ$ .

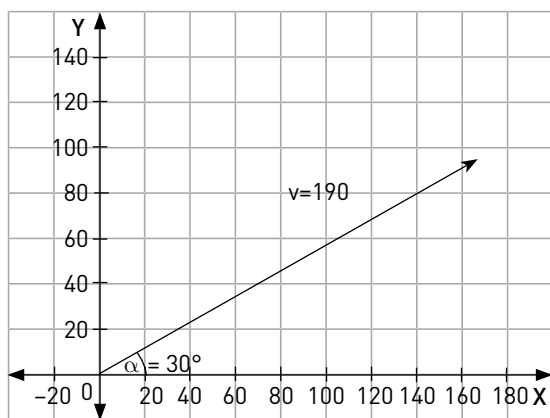
7.

a. Los ángulos del romboide son  $45^\circ$  y  $135^\circ$ .

b. 5

c.  $2(\sqrt{5} + \sqrt{10})$

8.  $\vec{V} = (164,54; 95) \text{ Km/h}$



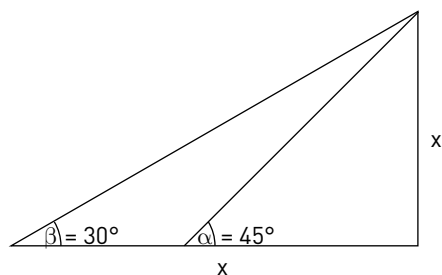
Pág. 112

¿Cómo voy?

1.  $\text{sena} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

2.

a.



b.  $\text{tg}(30^\circ)$

c.  $c. 118,3 \text{ m}$

3.

a.  $34,64 \text{ m}$

b. Se debe calcular el seno de  $60^\circ$ , relacionando la altura de  $30 \text{ m}$  y la distancia que los separa, despejando esta última de la razón trigonométrica.

4.  $13 \text{ m}$

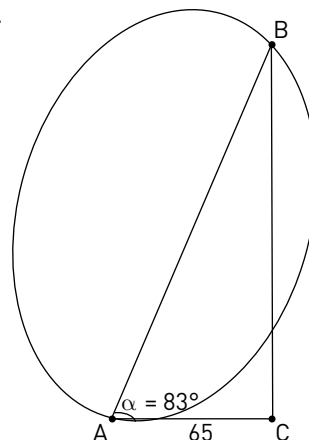
5.  $|\vec{V}| = 32,98 \text{ m/s}$ ;  $\angle = 14,03^\circ$

Pág. 113

Profundización

1.

a.

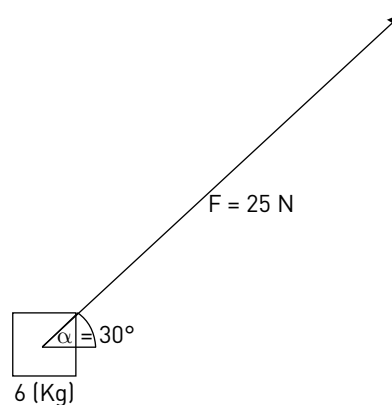


b. 1 minuto

2.  $|\vec{V}| = (21, 35; 15) \text{ m/s}$ ;  $\angle = 54, 76^\circ$ .

3.

a.



b.  $180,41 \text{ m}$

Pág. 114

Matemáticas en acción

1.

x correcto =  $7,6088 \text{ m}$ .

x incorrecto =  $8,5319 \text{ m}$ .

2.  $12,13\%$  no es aceptable, ya que en este caso la palmera estaría midiendo aproximadamente un metro más.

3.

Medir varias veces.

Revisar los instrumentos de medición.

## Pág. 115 Sintetizo

### Lección 7 Tema 1

- $C: 12\pi \text{ cm}; A: 36\pi \text{ cm}^2$
  - $C: 8\pi \text{ cm}; A: 16\pi \text{ cm}^2$
- 2,5 cm
  - 3,2 cm
  - $254,34 \text{ cm}^2$
  - $200,96 \text{ cm}^2$
  - 5,6 cm

### Lección 7 Tema 2

- $523,3 \text{ cm}^3$
  - $310,18 \text{ cm}^3$
  - $50,24 \text{ ml}$

## Pág. 116

### Lección 7 Tema 3

- $113,05 \text{ cm}^2$
  - $120,7 \text{ cm}^2$
  - $\$11\,304\,000$

### Lección 8 Tema 1

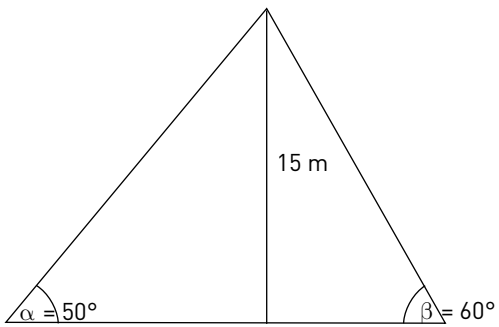
- $\frac{a}{c}$
  - $\frac{b}{c}$
  - $\frac{a}{b}$
  - $\frac{b}{c}$
  - $\frac{a}{c}$
  - $\frac{b}{a}$

- |        | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           |
|--------|----------------------|----------------------|----------------------|
| seno   | 0,5                  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| coseno | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0,5                  |

- $b = 3,906 \text{ cm}; c = 6,34 \text{ cm}; a = 52$
  - $c = \sqrt{306} \text{ cm}; a = 30,96^\circ; B = 59,04^\circ$

## Pág. 117

### Lección 8 Tema 2

- 700 m
- $18,47 \text{ cm}^2$
- 

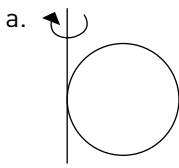
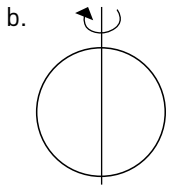
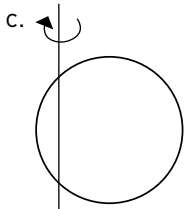
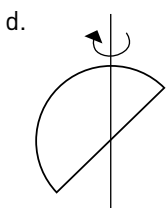
- 21,24 m

## Lección 8 Tema 3


- $\vec{a} = (2, 4); |\vec{a}| = 3\sqrt{2}$   
 $\vec{b} = (-2, 2); |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$   
 $\vec{c} = (-2, -1); |\vec{c}| = \sqrt{5}$   
 $\vec{d} = (3, 1); |\vec{d}| = \sqrt{10}$
- $a = 26,56^\circ$   
 $b = 45^\circ$   
 $c = 63,43^\circ$   
 $d = 71,56^\circ$
  - $\vec{a} = (3\sqrt{2} \text{ sen } 26,56^\circ; 3\sqrt{2} \text{ cos } 26,56^\circ)$   
 $\vec{b} = (-2\sqrt{2} \text{ sen } 45^\circ; 2\sqrt{2} \text{ cos } 45^\circ)$   
 $\vec{c} = (-\sqrt{5} \text{ sen } 63,43^\circ; -\sqrt{5} \text{ cos } 63,43^\circ)$   
 $\vec{d} = (\sqrt{10} \text{ sen } 71,56^\circ; -\sqrt{10} \text{ cos } 71,56^\circ)$

## Pág. 118


### ¿Qué aprendí?

- 
  - 
  - 
  - 
- $439041,88 \text{ km}$
- $586 \text{ cm}^3$
  - $1172 \text{ cm}^3$
- Las alturas son iguales si el volumen de la esfera es 1420.

- $V_{\text{cono}} = \frac{1}{4} V_{\text{esfera}}$



$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi(x-4)^3$$



$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi(x-4)^3$$

- 62,5 ml

## Pág. 119

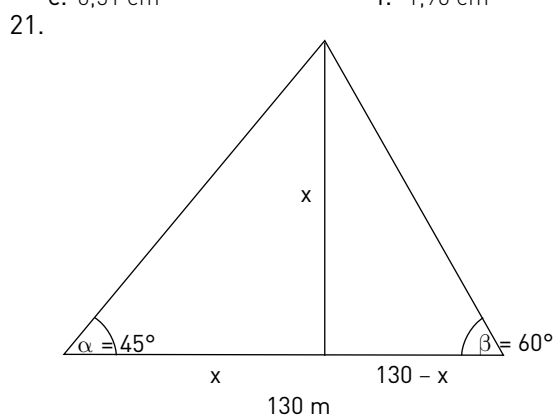
- $234,453 \text{ cm}^3$
- $8.476,6 \text{ cm}^3$
- Cubo de 21,22 cm de lado.
- $216\pi \text{ cm}^2$
- Ambos tienen la razón, ya que ambos métodos se relacionan con el lado del cubo, el cual corresponde al doble del radio.

12.  $144\pi \text{cm}^2$
13.  $r = 1$
14.  $50,24 \text{ cm}^2$
15. Disminuye a la cuarta parte.

**Pág. 120**

16.
  - a.  $\text{sen } \alpha = \frac{12}{13}$ ,  $\text{cos } \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\text{tga } \alpha = \frac{12}{5}$
17.  $c = 500,624 \text{ m}$ ;  $\alpha = 56^\circ$ ;  $\beta = 34^\circ$
18.  $24 \text{ cm}$
19.  $0,766$  y  $0,839$
20.
 

a. $0,86 \text{ cm}$	d. $0,59 \text{ cm}$
b. $1,69 \text{ cm}$	e. $1,16 \text{ cm}$
c. $0,51 \text{ cm}$	f. $1,96 \text{ cm}$



**Pág. 121**

22.
  - a.  $\vec{u} = [3, 1]$ ,  $\vec{v} = [2, 4]$ ,  $\vec{w} = [-2, 3]$ ,  $\vec{z} = [-2, 1]$
  - b.  $|\vec{u}| = \sqrt{10}$ ,  $|\vec{v}| = 2\sqrt{5}$ ,  $|\vec{w}| = \sqrt{13}$ ,  $|\vec{z}| = \sqrt{5}$
  - c.  $\vec{u}$ :  $18, 43^\circ$ ;  $\vec{v}$ :  $63, 43^\circ$ ;  $\vec{w}$ :  $56, 31^\circ$ ;  $\vec{z}$ :  $26, 56^\circ$
  - d.
 
$$\vec{u} = [\sqrt{10} \cos 18,43^\circ, \sqrt{10} \sin 18,43^\circ]$$

$$\vec{v} = [2\sqrt{5} \cos 63,43^\circ, 2\sqrt{5} \sin 63,43^\circ]$$

$$\vec{w} = [-\sqrt{13} \cos 56,31^\circ, \sqrt{13} \sin 56,31^\circ]$$

$$\vec{z} = [-\sqrt{5} \cos 26,56^\circ, \sqrt{5} \sin 26,56^\circ]$$

23.  $12,8 \text{ m}$
24.  $|\vec{v}| = 32,98 \text{ m/s}$ ;  $\angle = 14,03^\circ$

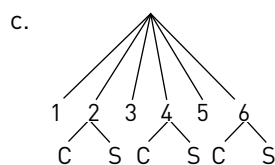
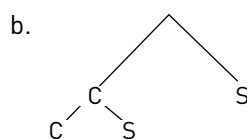
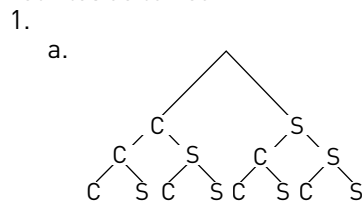
25.  $\vec{F} = \{-0,464; 3,196\}N$

**Unidad 4: Probabilidades y estadísticas**

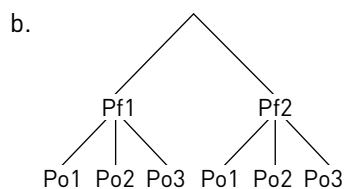
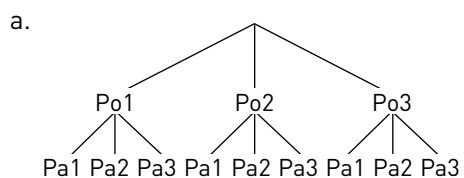
**Lección 9: Técnicas de conteo**

**Pág. 123**

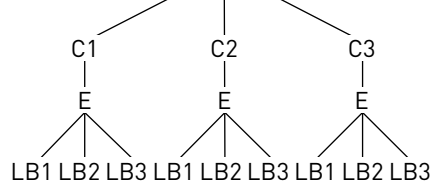
**Técnicas de conteo**



2.



3.



4.  $\{ACB, ADB, AEB\}$

5.

- a. X
- b. E
- c. E

6.

- a. Casos favorables: 1  
Casos posibles: 2  
R:  $0,5$
- b. Casos favorables: 3  
Casos posibles: 6  
R:  $0,5$
- c. Casos favorables: 3  
Casos posibles: 9  
R:  $0,33$

## Pág. 124

**Tema 1** ¿Cuándo se aplica el principio multiplicativo?

1.
 

a. 6	d. 122
b. 24	e. 30
c. 40 296	f. $\frac{1}{9}$
2.
  - a. 15 maneras
  - b. 105 maneras
  - c. El principio utilizado.
3.
  - a. 10 opciones
  - b. 24 formas
  - c. El principio utilizado.
4.
  - a.  $5 \cdot 4 = 20$
  - b. 20 formas
5.
  - a. 28 formas
  - b. 15 formas
6. 15 opciones
7.
  - a. 12 combinaciones
  - b. Principio multiplicativo.

## Pág. 125

1. 6435 combinaciones
2. La 2ª opción.
3. 5040 combinaciones
4. 8568 combinaciones
5. 192 combinaciones
6.
  - a. 24 formas
  - b. {(madera, c. piedra, plástico), (madera, c. piedra, papel), (madera, palitos, plástico), (madera, palitos, papel)}
  - c. {(zinc, palitos, plástico), (zinc, palitos, papel)}
7.
  - a. 27 maneras
  - b. 3 maneras
  - c. 24 posibilidades
  - d. 6 posibilidades

## Pág. 126

**Tema 2** ¿Qué son las permutaciones y las combinaciones?

1.
 

a. 120	c. 362 880
b. 24	d. 720
2.
 

a. 20	c. 1 814 400
b. 360	d. 3375
3.
 

a. $k = 5$	c. $k = 2$	e. $n = 8$
b. $n = 8$	d. $k = 2$	f. $n = 6$
4.
 

a. 10	d. 220
b. 45	e. 3003
c. 15	f. 7
5.
  - a. 20!
  - b. 10!

6.
  - a. Permutaciones
  - b. Combinaciones
  - c. Combinaciones
  - d. Variaciones
7.
  - a. Permutaciones  
10!  
3 628 800 formas
  - b. Permutaciones  
9!  
362 880 formas
  - c. Combinación  
 $\frac{12!}{(12 - 5)! 5!}$   
792 grupos

## Pág. 127

1. 20 números
2.
  - a. 5040 formas
  - b. 720 formas
3. 720 formas
4. 720 números de RUT.
5. 1 307 674 368 000 maneras
6.  $2,433 \cdot 10^{18}$
7. 210 selecciones
8. 9 colaciones
9. No, al lanzar 3 veces el dado se obtienen 216 resultados.
10. 360 360 formas posibles.
11. 40 320 formas
12. 45 partidos
13. 84 maneras
14. 4 triángulos

## Pág. 128

¿En que se aplican las combinaciones?

1.
  - a. 20 maneras
  - b. 6 maneras
  - c. 6 maneras
  - d. 0,6
  - e. 0,3
2.
  - a. 10 parejas
  - b. Casos favorables: 3  
Casos posibles: 10  
R: 0,3
  - c. Casos favorables: 1  
Casos posibles: 10  
R: 0,1
3.
  - a. 15
  - b. 0,2
  - c. 0,6
4.
  - a. 120 directivas
  - b. 0,05
  - c. 0,45
5.
  - a. 120 maneras
  - b. 0,2

**Pág. 129**

- 1.
- a.
- |              |   |   |   |   |
|--------------|---|---|---|---|
| N° de sellos | 0 | 1 | 2 | 3 |
| N° de casos  | 1 | 3 | 3 | 1 |
- b. 0,375  
c. 0,875
- 2.
- a. 780 resultados  
b.  $\frac{33}{65}$   
c.  $\frac{77}{260}$
- 3.
- a. 504 números  
b. 224 números par  
c.  $\frac{4}{9}$   
d.  $\frac{26}{63}$
- 4.
- a. 0,04  
b. 0,03
- 5.
- a. 35 formas  
b.  $\frac{15}{35}$
6.  $\frac{1}{40320}$
7. 0,086
- 8.
- a. 705432 alineaciones  
b. 0,5

**Pág. 130****¿Cómo voy?**

1. 671
- 2.
- a. 24 formas  
b. 120 formas
- 3.
- a. Error: relación de variación con repetición  
Corrección:  $5^5$   
b. Error: considerar la vocal final en el conteo  
Corrección: 24 formas  
c. Error: son tres colores  
Corrección: 6 casos
- 4.
- a. 504 maneras  
b. 24 maneras
5. 27216 números

**Pág. 131****Profundización**

- 1.
- a. 13800 podios  
b.  $\frac{204}{13800}$
- 2.
- a. 720 maneras  
b. 0,066
3. 970 diálogos
4. 15 personas
- 5.
- a. 3125 palabras  
b. 0,0384

**Pág. 132****Lección 10: Variable aleatoria**

- 1.
- a. R:  $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$   
R:  $\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$   
b. R:  $\{(CC),(CS),(SC)\}$   
R:  $\{(SS)\}$
2.  $\frac{7}{8}$
3.  $\frac{1}{10000}$
4.  $P(\text{Rojo}) = \frac{2}{5}$ ,  $P(\text{Blanco}) = \frac{3}{5}$
- 5.
- a.  $\frac{2}{15}$   
b.  $\frac{1}{3}$   
c.  $\frac{4}{15}$

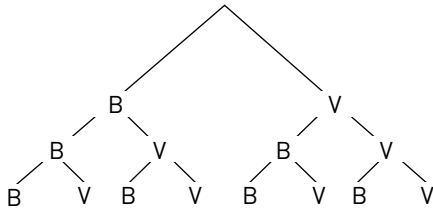
**Pág. 133****Tema 1 ¿Qué es una variable aleatoria?**

- 1.
- a. Cantidad de lanzamientos hasta obtener un número par.  
b. Tiempo transcurrido en una caja de supermercado hasta ser atendido.  
c. Cantidad de autos que pasan por una calle de 8:00 a 12:00 horas.  
d. Cantidad de productos defectuosos encontrados.  
e. Temperatura medida en grados Celsius a las 12 horas.  
f. Cantidad de caramelos de menta extraídos de la bolsa.
- 2.
- a.  $\{0, 1, 2, 3\}$   
b.  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- 3.
- a. Corresponde a todas las combinaciones de 3 bolitas del total de 9 bolitas, sin repetición de los dígitos.  
b.  $\{0, 1, 2, 3\}$   
c. No, porque se extraen 3 bolitas.  
d. Que ninguno de las 3 bolitas extraídas es un número primo.  
e. Que las 3 bolitas extraídas son números primos.
- 4.
- a. Corresponde a todas las combinaciones de 3 bolitas del total de 9 bolitas, sin repetición de los dígitos.  
b. Se diferencian en que las combinaciones de los elementos del espacio muestral están asociadas a la aparición del dígito 9, por lo que cada elemento del espacio puede tener 1, 2 o 3 combinaciones.  
c.  $\{1, 2, 3, 4\}$ , el recorrido comienza en 1, ya que por lo menos debe realizar una extracción para encontrar el dígito 9.  
d. La cantidad de casos posibles cambia, sin reposición los casos posibles disminuyen.

## Pág. 134

- {1, 2, 3, 4, 5}
  - {(A, B y C), (A, B y D), (A, B y E), (A, C y D), (A, C y E), (A, D y E), (B, C y D), (B, C y E), (B, D y E), (C, D y E)}
  - 20 casos
  - Sí, ya que se conoce que hay al menos un departamento con fuga, dejando un máximo de 4 departamentos posibles sin fuga, es decir, {1, 2, 3, 4}.

- 4%
  - Sí, ya que solo considera grupos distintos de cajas.
  -



- 1048576 posibles resultados
- Calculando la variación de 3 cajas vencidas de un total de 20 cajas.

- |             |   |   |    |    |    |   |   |
|-------------|---|---|----|----|----|---|---|
| X           | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5 | 6 |
| Nº de casos | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

- 42 casos
- X: cantidad de personas que suben al último vagón
    - {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}.
  - X: cantidad de alumnos que usan anteojos.  
Y: cantidad de mujeres que no usan anteojos.

## Pág. 135

**Tema 2** ¿Cuál es la probabilidad de una variable aleatoria?

- V
  - F, puede tomar el valor cero, según como está definida la variable.
  - V
  - V
- a = 0,5
  - a = 0,2
  - a = 0,2
  - a = 0,04
- {0, 1, 2, 3 o más}
  - 1 hijo con alguna enfermedad hereditaria.
  - 0,25
  - 0,35
  - 0,35
  - 0,65
- La sumatoria de la probabilidad de X debe ser 1.

## Pág. 136

- X: Cantidad de puntos obtenidos.
  - {3, 4, 5, 6}
  - |            |       |       |       |       |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| $x_i$      | 3     | 4     | 5     | 6     |
| $P(X=x_i)$ | 0,125 | 0,375 | 0,375 | 0,125 |
  - No, las probabilidades de obtener 6 o 3 puntos son iguales.

- a = 0,4  
b = 0,1
  - 0,7
  - 0,1
  - 1

- Recorrido: {0, 1, 2}

$x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,25	0,5	0,25

- Recorrido: {0, 1, 2}

$x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,245	0,51	0,245

- Recorrido: {0, 1, 2}

$x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,25	0,5	0,25

- Recorrido: {0, 1, 2}

$x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,2	0,6	0,2

- Recorrido: {0, 1, 2}

$x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,25	0,5	0,25

- Recorrido: {0, 1, 2, 3}

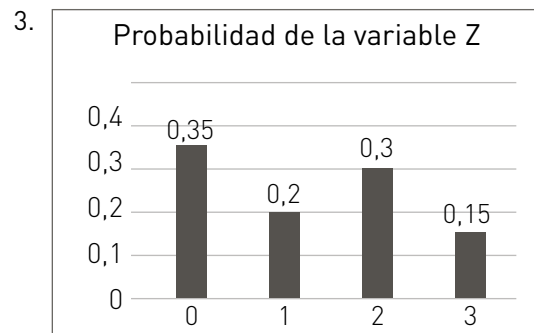
$x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,216	0,432	0,288	0,064

## Pág. 137

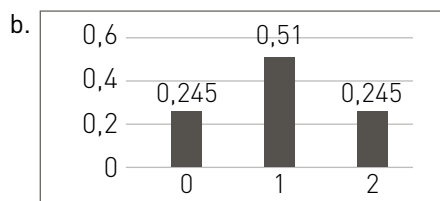
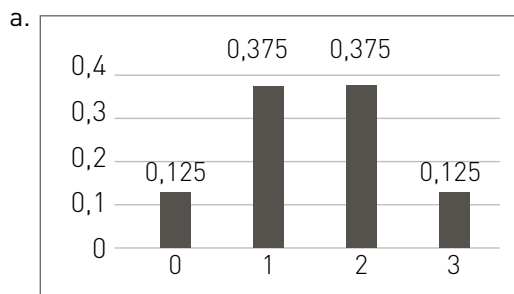
**Tema 3** ¿Cómo se grafica la distribución de una variable aleatoria?

- |            |      |     |      |     |
|------------|------|-----|------|-----|
| $y_i$      | 0    | 1   | 2    | 3   |
| $P(Y=y_i)$ | 0,35 | 0,4 | 0,15 | 0,1 |

- |            |     |      |      |      |      |
|------------|-----|------|------|------|------|
| $x_i$      | 0   | 1    | 2    | 3    | 4    |
| $P(X=x_i)$ | 0,3 | 0,15 | 0,14 | 0,26 | 0,15 |
  - {0, 1, 2, 3, 4}
  - Para x = 0
  - Para x = 2
  - 0,14
  - 0,41
  - 0,59



4.



Pág. 138

1.

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

- a. F, el recorrido es  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$   
 b. F, ya que son 6 unidades de bebida por caja  $P\{x>6\} = 0$   
 c. F,  $P(X = 0) = \frac{2}{12}$   
 d. F,  $P(X = 5) = \frac{1}{12} = 0,083$   
 e. V,  $P(3 \leq X \leq 4) = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} \approx 0,416$   
 f. F,  $P(X = 2) = \frac{3}{12} > P(X = 5) = \frac{1}{12}$

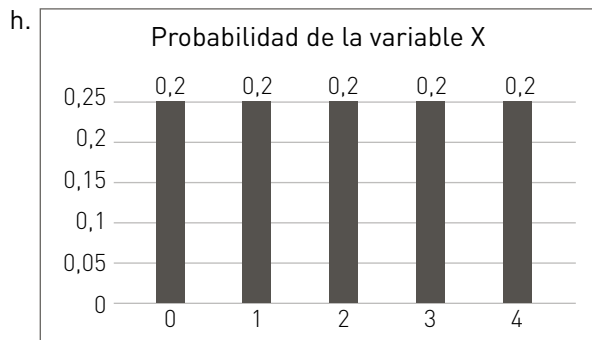
2.

- a. X: N° de computadores sin licencia de antivirus  
 b.  $\{0,1,2,3,4\}$

c.

$x_i$	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

- d. 0,2  
 e. La probabilidad de que 3 computadores sin licencia de antivirus es 0,2.  
 f. 0,2  
 g. 0,4



Pág. 139

2.

- a. V                      b. V                      c. F

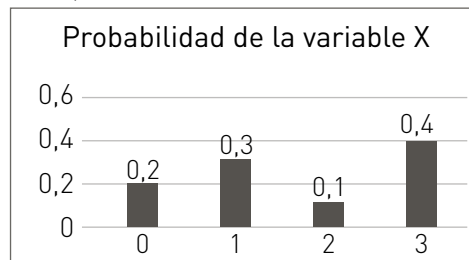
3.

- a. X

4.

- a. La mayor probabilidad es para  $x = 0$ .  
 b. La menor probabilidad es para  $x = 1$ .  
 c. La probabilidad de a lo más 1 es 0,55.  
 d. La probabilidad de a lo menos 1 es 0,45.  
 e. La probabilidad de 1 o 2 es 0,4.

5.



- a. 0,5  
 b. 0,4  
 c. Porque al realizar esa operación está considerando el valor de  $x = 2$ .  
 d.  $x_i = 1$

Pág. 140

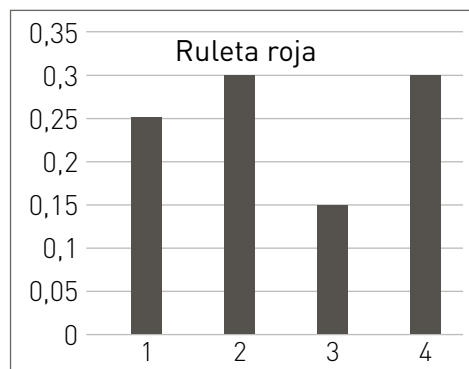
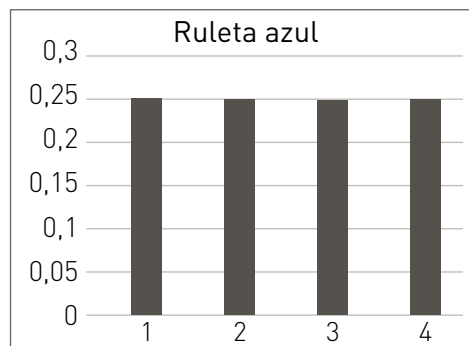
Taller TIC

1. Definan una variable aleatoria para cada ruleta.  
 X: El número que después de girar la ruleta.  
 Y: El número que después de girar la ruleta.  
 Z: El número que después de girar la ruleta.

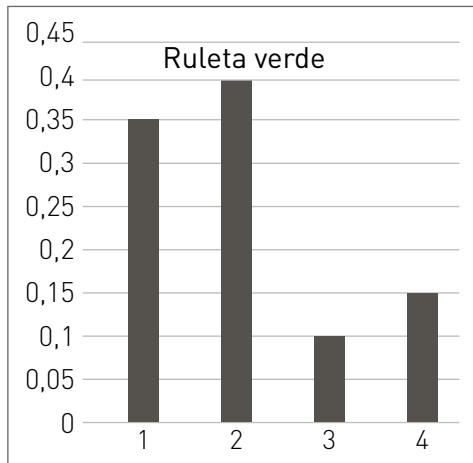
2.

X = $x_i$	1	2	3	4
P(X = $x_i$ )	0,25	0,3	0,15	0,3
Y = $y_i$	1	2	3	4
P(Y = $y_i$ )	0,35	0,4	0,1	0,15
Z = $z_i$	1	2	3	4
P(Z = $z_i$ )	0,25	0,25	0,25	0,25

3.

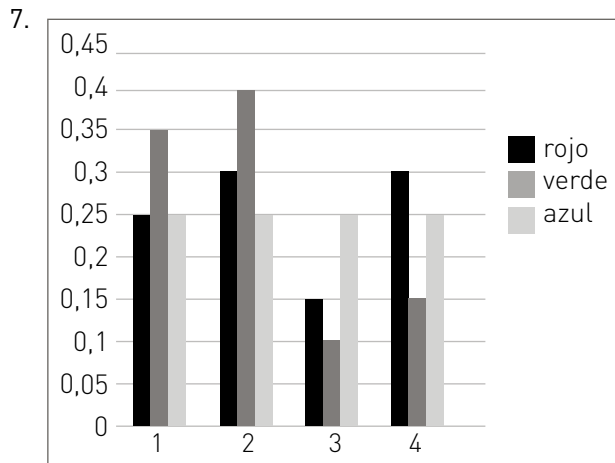






- En Herramientas de gráficos, diseño.
- Botón derecho sobre el gráfico y Cambiar tipo de gráfico.

Ruleta	P(1)	P(2)	P(3)	P(4)
X	0,25	0,3	0,15	0,3
Y	0,35	0,4	0,1	0,15
Z	0,25	0,25	0,25	0,25



- A continuación encontrarás varias preguntas, responde cada una de ellas y además indica cuál gráfico (de los cuatro que hiciste) es el más adecuado para encontrar la respuesta.
  - Roja, gráfico 4.
  - Verde, gráfico 4.
  - 2 o 4, gráfico 2.
  - Si, si se quiere apostar al 3.

### Pág. 142

#### ¿Cómo voy?

- X: Cantidad de lanzamientos realizados hasta obtener una diferencia de cero.  
Recorrido: {1, 2, 3, 4 o más}
- 0,05
  - 0,35
- Error: En la relación de las probabilidades  
Corrección:  $P(X = 4) > P(X = 3)$

- Error: En el valor del recorrido de X y su probabilidad  
Corrección:  $P(X = 4) = 0,3$
- Error: El conjunto no corresponde al recorrido de la variable  
Corrección: el recorrido es {1, 2, 3, 4, 5}

### Pág. 143

#### Profundización

- X: resultado del test de hipertensión
  - {positivo, negativo}
  - | $x_i$        | Positivo | Negativo |
|--------------|----------|----------|
| $P(X = x_i)$ | 0,2      | 0,8      |
  - | $x_i$        | Positivo | Negativo | Error |
|--------------|----------|----------|-------|
| $P(X = x_i)$ | 0,19     | 0,8      | 0,01  |
- {0, 1, 2, 3, 4, 5}
  - 0,2
  - 0,1
  - No, ya que no se encuentra en el recorrido de x que muestra el gráfico.
  - | $x_i$        | 0   | 1   | 2   | 3   | 4    | 5    |
|--------------|-----|-----|-----|-----|------|------|
| $P(X = x_i)$ | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,2 | 0,05 | 0,05 |

### Pág. 144

#### Lección 12: Probabilidades

- M, 12 formas
  - A, 5 formas
  - M, 30 formas
  - A, 5 formas
- 24
  - 720
  - 19 958 400
  - 120
  - 10
  - 120
- 20 formas
- 435 parejas
- 45 formas
- 120 maneras

### Pág. 145

#### Tema 1 ¿Cómo se aborda la probabilidad en los medios de comunicación?

- En 2001
  - 64,3%
  - En 2003
  - 71,0%
- F
  - V
  - V
  - V

### Pág. 146

- El sedentarismo, el sobrepeso y la obesidad infantil.
  - 0,25
  - El sedentarismo.
- El porcentaje de persona más alto come 1 porción de fruta diaria.
  - 14,5%

3.

- a. 17,6%
- b. 14,6%

**Pág. 147**

**Tema 2** ¿Cómo se aplica la probabilidad en la toma de decisiones?

1.

- a. En la empresa B, ya que en dos de los fondos hay más probabilidad de ganancia.
- b. En la empresa A.
- c. En la empresa B, fondo plus.

2.

- a. En la maquina B.
- b. En la maquina A.

3.

- a. El fondo E.
- b. El fondo D.
- c. El fondo C.
- d. El fondo E.
- e. El fondo D.

4.

- a. 0,15
- b. 0,01125
- c. El color verde.
- d. 0,5

**Pág. 148**

1.

- a. La cámara A.
- b. La cámara B.

2.

- a. La caja N° 1 tiene menor probabilidad de encontrar un tarro vencido.
- b. La caja N° 5.
- c. 0,416
- d. 0,651

3.

- a. La ruta A.
- b. La ruta B.
- c. La ruta B, para priorizar la luz en el camino.

4.

- a. 0,52
- b. La línea B.
- c. 0,35

**Pág. 149**

**Tema 3** ¿Cómo puede interpretarse la probabilidad?

1.

- a. Probabilidad subjetiva, es un valor asignado bajo juicio propio.
- b. Probabilidad frecuencial, frecuencia relativa del suceso al existir un gran número de experimentos (partidos) como base.
- c. Probabilidad frecuencial, frecuencia relativa del suceso al existir repetición del evento (años anteriores).
- d. clásica, es un cociente entre la cantidad de sucesos favorables y la cantidad total de sucesos posibles de un experimento equiprobable.
- e. Probabilidad subjetiva, corresponde al valor asignado de acuerdo al conocimiento que posee del suceso.

2.

- a. F, corresponde al valor que un observador asigna bajo su propio juicio de acuerdo al conocimiento que posea del suceso.

- b. V, en el caso de que el estudio este basado en la repetición de un experimento.
- c. V, es un cociente entre la cantidad de sucesos favorables y la cantidad total de sucesos posibles de un experimento equiprobable.

3.

- a. Lanzar un dado y obtener un par
- b. Basado años anteriores, la probabilidad de que la 12° temporada de una serie se estrene en octubre es de un 95%
- c. En invierno si la temperatura baja de los 10°C la probabilidad de lluvia es 60%

4.

- a. Debido a la coincidencia de los eventos en casos anteriores
- b. No, ya que debe haber una base científica o un registro de muchas repeticiones del evento.
- c. Probabilidad subjetiva.

5.

- a. La base científica explica, debido a que la presión barométrica de la atmosfera tiende a disminuir con el mal clima y quienes tienen algún daño en los tejidos, sienten como esa presión más baja hace que estos se expandan, haciendo presión por sobre la articulación.
- b. Probabilidad subjetiva.

**Pág. 150**

1.

- a. Error: No corresponde a una probabilidad clásica  
Corrección: Corresponde a una probabilidad subjetiva
- b. Error: No corresponde con una probabilidad frecuencial  
Corrección: La frecuentista calcula la probabilidad frecuencial debido a la ausencia de un evento equiprobable como sucede con la clásica.
- c. Error: No corresponde con la probabilidad subjetiva  
Corrección: Esta asociado a la probabilidad frecuencial
- d. Error: No correspondería una interpretación clásica  
Corrección: Al estar relacionado con el conteo y repetición de un evento no equiprobable, corresponde con una interpretación frecuencial.

2.

- Para la probabilidad clásica se requiere de eventos equiprobables. Si esto no es posible, se debe utilizar las frecuencias relativas y calcular la probabilidad frecuencial. Con esto, conforme el número total de repeticiones del experimento se incrementa, las estimaciones correspondientes tienden a acercarse a la probabilidad real.

3.

- a. R: Según los resultados de los últimos 15 años, la probabilidad de que mañana caiga nieve es 0,02.  
Justificación: Corresponde a la frecuencia relativa de un suceso al realizar un gran número de veces un experimento.
- b. R: La probabilidad de obtener un número impar al lanzar un dado de doce caras es 0,5.  
Justificación: Corresponde al cociente entre la cantidad de sucesos favorables y la cantidad total de sucesos posibles de un experimento equiprobable.

4.
  - a. Interpretación subjetiva
  - b. Se debe haber utilizado frecuencias relativas y calculado la probabilidad frecuencial para el número total de repeticiones del experimento, acercándose a la probabilidad real.

## Pág. 151

### Taller de habilidades

1. y 2. Preguntas abiertas
3. Se ponen en juego más de una habilidad.
4. Pregunta abierta; 0,24.

## Pág. 152

### ¿Cómo voy?

1.
  - a. Error: los años consultados y la probabilidad no corresponden.  
Corrección: Es un 24% entre los años 2011 y 2014
  - b. Error: Identificar incorrectamente la menor probabilidad.  
Corrección: La enfermedad con menor probabilidad son las enfermedades del sistema digestivo.
  - c. Error: La probabilidad no corresponde.  
Corrección: La probabilidad es de un 0,32.
2.
  - a. La aerolínea B.
  - b. La aerolínea A.

## Pág. 153

### Profundización

1.
  - a. 29%
  - b. 24%
  - c. Las entradas al cine/ conciertos/ estadio.
  - d. 40%
2.
  - a. La caja 3.
  - b. Los círculos.

## Página 154

### Matemática en acción

1. No, porque la probabilidad no es del 50% de cada una.
2.
  - a. Debe cambiar de pan.
  - b. Pregunta abierta, depende de los resultados obtenidos.
  - c. Por la ley de los grandes números.
3. Pregunta abierta.

## Pág. 155

### Sintetizo

#### Lección 10 Tema 1

1. 36 maneras
2. 30 maneras

#### Lección 10 Tema 2

3. Una permutación de un conjunto que tiene  $n$  elementos es cada una de las formas en que se pueden ordenar sus  $n$  elementos, que difieren entre sí por el orden de estos. Una combinación de  $k$  elementos de un conjunto que tiene  $n$  elementos distintos es cada una de las formas en que se pueden ordenar  $k$  elementos, con  $k < n$ , que difieren entre sí por algún elemento.
4. 40320 formas
5. 39916800 formas

#### Lección 10 Tema 3

6. Se entreguen dos valores y no importe el orden de la selección.
7.
  - a. 0,2125
  - b. 0,45

## Pág. 156

#### Lección 11 Tema 1

8. Una variable aleatoria, denotada generalmente con una  $X$ , es una función que asocia un número real  $x$  a cada elemento del espacio muestral de un experimento:  $X: \Omega \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}$ . Donde  $\Omega$  es el espacio muestral y  $A$  es un subconjunto de números reales.
9.
  - a. Cantidad de tiempo esperado en un banco.
  - b. Cantidad de números divisibles por cinco.

#### Lección 11 Tema 2

10. Si  $X$  es una variable aleatoria discreta asociada a un experimento aleatorio con espacio muestral  $\Omega$ , entonces la probabilidad de que  $X$  asuma el valor  $x_i$ , denotado como  $P(X = x_i)$ , corresponde a la probabilidad de que ocurra el suceso  $x_i$ .
11. 0,24
12. Pregunta abierta, por ejemplo: 0,22 y 0,11.

#### Lección 11 Tema 3

13. La representación gráfica de las probabilidades de una variable aleatoria discreta se realiza en un gráfico de barras, donde el eje horizontal representa los valores de la variable y el eje vertical muestra la probabilidad.
- 14.

a.

$x_i$	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,15	0,25	0,3	0,17	0,13

- b. 0,3
- c.  $x_i = 4$

## Pág. 157

#### Lección 12 Tema 1

15. En los medios de comunicación la posibilidad de que ocurra algún suceso se muestra a través de gráficos, tablas o simplemente se puede desprender de algún texto. Por ello, para poder estar informados, es necesario conocer los conceptos estadísticos y probabilísticos involucrados.
16.
  - a. 83%
  - b. Pescado congelado



